

Méthodes Mathématiques pour Physiciens

Martin Kunz
Mathias Albert
Mona Frommert

Université de Genève

2010/2011

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 5 |
| 1.1 | Motivation | 5 |
| 1.2 | Evaluation | 5 |
| 1.3 | Calendrier provisoire | 6 |
| 1.4 | Enseignants | 6 |
| 1.5 | Remarques sur les notes du cours | 6 |
| 2 | Les Tenseurs | 7 |
| 2.1 | Vecteurs | 7 |
| 2.2 | Tenseurs | 9 |
| 2.3 | Tenseurs sur un espace vectoriel muni d'une métrique | 19 |
| 2.4 | Champs de tenseurs | 25 |
| 3 | La fonction δ de Dirac et les distributions | 31 |
| 3.1 | Motivation | 31 |
| 3.2 | L'espace de fonctions test \mathcal{S} (espace de Schwartz) | 32 |
| 3.3 | Les distributions sur \mathcal{S} | 33 |
| 3.4 | Opérations sur les distributions I | 33 |
| 3.5 | Opérations sur les distributions II | 35 |
| 3.6 | Transformée de Fourier et Convolution | 37 |
| 3.7 | Distributions en n dimensions | 39 |
| 4 | Fonctions de Green | 41 |
| 4.1 | Fonctions de Green en une dimension | 41 |
| 4.2 | Détermination de la fonction de Green | 42 |
| 4.3 | Fonction de Green en trois dimensions | 44 |
| 5 | Intégration complexe et applications aux intégrales réelles | 47 |
| 5.1 | Intégration Complexe | 47 |
| 5.2 | Applications au calcul d'intégrales réelles | 52 |
| 5.3 | Méthode du Col | 55 |
| 6 | Notions de probabilités et de statistique | 61 |
| 6.1 | Le concept de probabilité. | 61 |
| 6.2 | Variables aléatoires et distributions de probabilité. | 65 |
| 6.3 | Quelques distributions de probabilité particulières. | 74 |
| 6.4 | Éléments de statistique. | 82 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7 | Eléments de la théorie des groupes | 97 |
| 7.1 | Définition d'un groupe | 97 |
| 7.2 | Représentations | 98 |
| 7.3 | Groupes et algèbres de Lie | 100 |
| 8 | Espaces de Hilbert et opérateurs linéaires | 107 |
| 8.1 | Une courte introduction à l'intégrale de Lebesgue | 107 |
| 8.2 | Définition et exemples d'espaces de Hilbert | 113 |
| 8.3 | Différents types de sous-ensembles d'un espace de Hilbert \mathcal{H} | 117 |
| 8.4 | Applications linéaires | 119 |
| 8.5 | Le dual d'un espace de Hilbert | 120 |
| 8.6 | Opérateurs non-bornés | 123 |
| 8.7 | Spectre d'un opérateur | 124 |
| 8.8 | ANNEXE | 126 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

Ce cours n'est censé remplacer ni les cours de mathématique, ni les cours de physique. En effet, ce n'est pas du tout un cours de théorie, l'élément central étant les exercices. On va donc essayer de limiter l'enseignement théorique à une heure de telle sorte que vous ayez deux heures à disposition pour le travail sur les exercices, avec l'aide des assistants.

Le but de ce cours est de présenter certains outils mathématiques importants pour les cours de physique de deuxième et troisième année. Aussi, il est fait pour vous mettre en confiance et vous familiariser avec les calculs, ce qui est plus difficile dans un cours traditionnel. Utilisez alors cette opportunité d'apprendre à travailler sur des problèmes, et surtout n'hésitez pas à poser des questions aux assistants !

1.2 Evaluation

Votre progrès est évalué par des contrôles continus, ce qui veut dire qu'il y a un test de courte durée (2h à la place d'une séance d'exercices) à la fin de chaque bloc, donc 5 tests en tout. Le but est de voir si vous avez compris l'essentiel du sujet, l'étudiant (ou l'étudiante) qui travaille bien pendant les heures du cours sur les exercices devrait réussir. Vous avez droit aux calculatrices et aux notes du cours, mais les notes des exercices ne sont pas admises. La note finale est la moyenne arithmétique des quatre meilleures notes. Si vous êtes absent lors d'un contrôle continu, vous recevez la note "0". Un contrôle continu est toujours annoncé au plus tard pendant la session précédente.

Il est cependant possible de passer un examen régulier pendant la session d'examens, qui a lieu après la fin du cours, à la place des contrôles continus. Toutefois, la participation à deux tests entraîne l'inscription automatique au contrôle continu. Ceci exclut l'inscription à l'examen. L'échec au contrôle continu compte comme une tentative à l'évaluation de l'enseignement, et est donc équivalent à l'échec d'un examen.

1.3 Calendrier provisoire

Le calendrier provisoire (qui changera fort probablement selon les besoins) est :

| | |
|----------|---|
| 22.9.10 | Tenseurs 1 |
| 29.9.10 | Tenseurs 2 |
| 6.10.10 | Tenseurs 3 |
| 13.10.10 | Tenseurs 4 |
| 20.10.10 | Tenseurs 5 |
| 27.10.10 | Tenseurs 6 et contrôle continu 1 (tenseurs) |
| 3.11.10 | Distributions 1 |
| 10.11.10 | Distributions 2 |
| 17.11.10 | Distributions 3 |
| 24.11.10 | Fonctions de Green 1 |
| 1.12.10 | Fonctions de Green 2 |
| 8.12.10 | Fonctions de Green 3 |
| 15.12.10 | Intégration complexe 1 et contrôle continu 2 (distributions et fonctions de Green) |
| 22.12.10 | Intégration complexe 2 |
| 23.2.11 | Intégration complexe 3 |
| 2.3.11 | Intégration complexe 4 |
| 9.3.11 | Intégration complexe 5 et contrôle continu 3 (intégration complexe) |
| 16.3.11 | Probabilité 1 |
| 23.3.11 | Probabilité 2 |
| 30.3.11 | Probabilité 3 |
| 6.4.11 | Statistique 1 |
| 13.4.11 | Statistique 2 |
| 20.4.11 | Statistique 3 |
| 4.5.11 | Groupes 1 et contrôle continu 4 (probabilité et statistique) |
| 11.5.11 | Groupes 2 |
| 18.5.11 | Groupes 3 |
| 25.5.11 | Groupes 4 et contrôle continu 5 (groupes) |
| 1.6.11 | réserve |

1.4 Enseignants

| nom | bureau | email |
|----------------|-----------------------|----------------------|
| Martin Kunz | Ecole de Physique 224 | Martin.Kunz@unige.ch |
| Mathias Albert | Sciences I 217 | |
| Mona Frommert | Sciences I 219 | |

1.5 Remarques sur les notes du cours

Une première version de ce cours a été créée par Werner Amrein (distributions, fonctions de Green, tenseurs, espaces de Hilbert), Jean-Pierre Imhof (probabilités et statistique) et Henri Ruegg (groupes). Les notes ont été modifiées et étendues par d'autres enseignants, principalement par Michel Droz, Cathérine Leluc et Xin Wu (probabilité et statistique), Eugène Sukhorukov (distributions, fonctions de Green), Olivier Piguet et Michele Maggiore (théorie des groupes) et Ruth Durrer (espaces de Hilbert, fonctions de Green). Je remercie aussi Umberto Cannella pour la transcription en latex de certains chapitres, et Mathias Albert pour son aide avec le chapitre sur l'intégration complexe.

Chapitre 2

Les Tenseurs

On considère un espace géométrique (par exemple \mathbb{R}^3 , une sphère dans \mathbb{R}^3). Grosso modo un tenseur est un objet associé à cet espace (par exemple une grandeur physique) qui obéit à une certaine loi de transformation lorsqu'on change de système de coordonnées (l'expression de cet objet dans le nouveau système de coordonnées est obtenue à partir de celle dans l'ancien système de coordonnées d'une façon très spécifique). Le terme "tenseur" fut introduit par le physicien W. Voigt; le mot vient du fait que l'on peut représenter les tensions dans un solide par un tenseur.

Du point de vue mathématique, le concept de tenseur est une généralisation de celui de vecteur.

2.1 Vecteurs

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel réel de dimension n ($n < \infty$)¹. Nous désignons par \mathcal{V}^* le dual de \mathcal{V} : \mathcal{V}^* est l'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ des applications linéaires $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. \mathcal{V}^* est également un espace vectoriel réel de dimension n . Si $f \in \mathcal{V}^*$, nous utilisons la notation $\langle f, v \rangle$ pour la valeur $f(v)$ de f appliqué au vecteur $v \in \mathcal{V}$; donc

$$\langle f, v \rangle \equiv f(v) \in \mathbb{R}.$$

Dans la suite nous utiliserons la notation v^* (plutôt que f) pour les éléments de \mathcal{V}^* . Donc

$$\langle v^*, v \rangle \equiv v^*(v) \in \mathbb{R} \quad \text{si } v^* \in \mathcal{V}^*, v \in \mathcal{V}.$$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de \mathcal{V} nous désignons par $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ la base duale de \mathcal{V}^* :

$$\langle e^{*i}, e_j \rangle \equiv e^{*i}(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}. \quad (2.1)$$

Nous utilisons des indices inférieurs pour des vecteurs de \mathcal{V} et des indices supérieurs pour des vecteurs de \mathcal{V}^* . La raison pour ce choix deviendra plus claire par la suite.

L'espace vectoriel \mathcal{V} et son dual \mathcal{V}^* sont isomorphes. Néanmoins, il convient de distinguer entre des vecteurs appartenant à \mathcal{V} et des vecteurs appartenant à \mathcal{V}^* . Les premiers sont appelés des vecteurs contravariants, les derniers des vecteurs covariants. Cette terminologie reflète le comportement des composantes des vecteurs dans différentes bases lors du passage d'une base à une autre, comme nous allons l'expliquer maintenant.

1. Nous ne considérons ici que des espaces vectoriels sur le corps \mathbb{R} , car c'est suffisant pour des applications en physique; les définitions s'étendent aisément à des espaces vectoriels sur des corps \mathbb{K} plus généraux.

2.1.1 Vecteurs covariants

Les éléments v^* de \mathcal{V}^* sont appelés des *vecteurs covariants*. Donc un vecteur covariant est une application linéaire $v^* : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour expliquer la terminologie, regardons comment se transforment leurs composantes dans différentes bases lors du passage entre deux bases. Si $v^* \in \mathcal{V}^*$ et $\{e_j\}$ est une base de \mathcal{V} , on peut exprimer v^* comme combinaison linéaire des n vecteurs e^{*1}, \dots, e^{*n} qui forment une base de \mathcal{V}^* :

$$v^* = \sum_{k=1}^n T_k e^{*k}, \quad (2.2)$$

où T_1, \dots, T_k sont des nombres réels appelés les *composantes de v^* par rapport à la base $\{e_j\}$* (observer que le développement dans (2.2) est dans la base duale $\{e^{*k}\}$, qui est une base de \mathcal{V}^* ; la base duale est déterminée de façon univoque par la donnée de la base $\{e_j\}$ de \mathcal{V} , donc la terminologie “composantes de v^* par rapport à la base $\{e_j\}$ ” est raisonnable). En vertu de (2.1), on a l’expression suivante pour les composantes de v^* :

$$T_k = \langle v^*, e_k \rangle \equiv v^*(e_k).$$

Prenons maintenant une deuxième base $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ de \mathcal{V} , et désignons la base duale par $\{\tilde{e}^{*1}, \dots, \tilde{e}^{*n}\}$ (donc $\langle \tilde{e}^{*i}, \tilde{e}_j \rangle = \delta_j^i$). Chacun des vecteurs \tilde{e}_j est une combinaison linéaire de e_1, \dots, e_n , nous pouvons donc écrire

$$\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j^k e_k.$$

Les n^2 nombres α_j^k décrivent le changement de base $\{e_j\} \rightarrow \{\tilde{e}_j\}$, on peut les considérer comme formant une matrice $n \times n$, $\alpha \equiv \{\alpha_j^k\}$ (le premier indice j spécifiant la ligne, le deuxième indice k la colonne de cette matrice; leur emplacement, supérieur ou inférieur, sera expliqué ultérieurement).

De façon similaire, chacun des vecteurs \tilde{e}^{*j} est une combinaison linéaire de e^{*1}, \dots, e^{*n} :

$$\tilde{e}^{*j} = \sum_{k=1}^n \beta_k^j e^{*k}. \quad (2.3)$$

Comme les bases duales sont déterminées par la donnée des bases de \mathcal{V} , il est clair qu’il doit y avoir une relation entre la matrice $\beta \equiv \{\beta_k^j\}$ et la matrice $\alpha \equiv \{\alpha_j^k\}$.

Exercice 1 :

(a) Montrer que $\sum_{k=1}^n \beta_k^i \alpha_j^k = \delta_j^i$, ou écrit avec des matrices (en faisant attention à l’ordre des indices relative à la loi de multiplication de matrices) $\beta \alpha^T = I =$ la matrice identité (donc $\beta = (\alpha^T)^{-1}$ est l’inverse de la transposée de la matrice α).

(b) Si T_k désignent les composantes d’un vecteur covariant v^* par rapport à la base $\{e_j\}$ et \tilde{T}_j celles par rapport à la base $\{\tilde{e}_j\}$ (donc $v^* = \sum_{k=1}^n T_k e^{*k} = \sum_{k=1}^n \tilde{T}_k \tilde{e}^{*k}$), montrer que

$$\tilde{T}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j^k T_k. \quad (2.4)$$

(c) Considérer le cas particulier :

$$\tilde{e}_1 = -3e_1 + 5e_2 \quad (2.5)$$

$$\tilde{e}_2 = e_1 - e_2 \quad (2.6)$$

et calculer les composantes α_j^k de la matrice de changement de base, ainsi que les composantes \tilde{T}_j du vecteur covariant dans cette nouvelle base (exprimés comme fonction des T_k).

(d) Soit

$$w^* = 2e^{*1} + e^{*2};$$

trouver T_1 et T_2 puis calculer \tilde{T}_1 et \tilde{T}_2 pour le changement de base de (c).

Commentaire : La formule (2.4) montre que les composantes d'un vecteur covariant se transforment de la même façon que les bases de \mathcal{V} (c'est-à-dire avec la matrice α), d'où la terminologie **covariant** (se transformer **comme** les bases). Il ne faut pas oublier dans ce contexte que les composantes d'un vecteur covariant sont définies par rapport à des bases de \mathcal{V}^* , tandis que la matrice α détermine un changement de base dans \mathcal{V} .

2.1.2 Vecteurs contravariants

Les éléments v de \mathcal{V} sont appelés des *vecteurs contravariants*. Ces vecteurs peuvent être développés dans des bases de \mathcal{V} . Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une telle base, on aura

$$v = \sum_{k=1}^n T^k e_k,$$

où T^1, \dots, T^n sont des nombres réels appelés les *composantes de v par rapport à la base $\{e_j\}$* . Ils sont donnés par $T^k = \langle e^{*k}, v \rangle$. Si on désigne par \tilde{T}^k les composantes de v par rapport à une autre base $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ de \mathcal{V} (donc $v = \sum_{k=1}^n T^k e_k = \sum_{k=1}^n \tilde{T}^k \tilde{e}_k$), alors

$$\tilde{T}^j = \sum_{k=1}^n \beta_k^j T^k, \quad (2.7)$$

où $\beta \equiv \{\beta_k^j\}$ est la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$.

Exercice 2 :

Démontrer la loi de transformation (2.7).

Commentaire : Le terme “vecteur **contravariant**” s'explique par le fait que ses composantes se transforment **contrairement** aux vecteurs de base (c'est-à-dire comme les vecteurs des bases duales, avec la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$).

2.2 Tenseurs

2.2.1 Tenseurs covariants d'ordre 2

Soit v^{*1} et v^{*2} deux vecteurs covariants. On peut leur associer un produit (leur “*produit tensoriel*”), désigné par $v^{*1} \otimes v^{*2}$, de la façon suivante : $v^{*1} \otimes v^{*2}$ est une application de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans \mathbb{R} donnée par

$$v^{*1} \otimes v^{*2}(v_1, v_2) = \langle v^{*1}, v_1 \rangle \langle v^{*2}, v_2 \rangle, \quad (2.8)$$

où v_1, v_2 varient sur \mathcal{V} (tandis que v^{*1} et v^{*2} sont fixés). Il est clair que $v^{*1} \otimes v^{*2}$ définit une application bilinéaire (linéaire dans le premier argument v_1 ainsi que dans le deuxième argument v_2) de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans \mathbb{R} . C'est un cas particulier de tenseur covariant d'ordre 2. En général un *tenseur covariant d'ordre 2* est une application bilinéaire $T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, donc satisfaisant

$$\begin{aligned} T(v_1 + \lambda_1 w_1, v_2 + \lambda_2 w_2) &= T(v_1, v_2) + \lambda_2 T(v_1, w_2) + \\ &+ \lambda_1 T(w_1, v_2) + \lambda_1 \lambda_2 T(w_1, w_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

si $v_i, w_i \in \mathcal{V}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Nous désignons par \mathcal{T}_2^0 l'ensemble des tenseurs covariants d'ordre 2. \mathcal{T}_2^0 est un espace vectoriel (on peut additionner des applications bilinéaires, et on peut les multiplier par des constantes). \mathcal{T}_2^0 contient également des applications qui ne sont pas un produit de vecteurs covariants².

2. Exemple : si $\{e_1, e_2\}$ est une base de \mathcal{V} , alors l'application bilinéaire $e^{*1} \otimes e^{*1} + e^{*2} \otimes e^{*2}$ n'est pas un produit ; on peut vérifier que l'hypothèse $e^{*1} \otimes e^{*1} + e^{*2} \otimes e^{*2} = v^{*1} \otimes v^{*2}$, pour certains $v^{*1}, v^{*2} \in \mathcal{V}^*$, mène à une contradiction.

La dimension de l'espace vectoriel \mathcal{T}_2^0 est n^2 . Pour le voir, soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de \mathcal{V} , $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ la base duale de \mathcal{V}^* . Considérons les n^2 éléments de \mathcal{T}_2^0 formés par les tenseurs produits

$$E^{jk} \equiv e^{*j} \otimes e^{*k} \quad (j, k = 1, \dots, n),$$

donc $E^{jk}(v_1, v_2) = \langle e^{*j}, v_1 \rangle \langle e^{*k}, v_2 \rangle$. Ces n^2 tenseurs $\{E^{jk}\}$ forment une base de \mathcal{T}_2^0 , comme expliqué dans l'exercice qui suit :

Exercice 3 :

(a) Vérifier que les E^{jk} sont linéairement indépendants. Plus précisément : supposer que $T \equiv \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk} E^{jk} = 0$; en calculant $T(e_i, e_\ell)$, on trouve que $\lambda_{i\ell} = 0$.

(b) Si $T \in \mathcal{T}_2^0$ est un tenseur covariant arbitraire d'ordre 2, montrer qu'il existe des constantes T_{jk} telles que

$$T = \sum_{j,k=1}^n T_{jk} E^{jk}. \quad (2.10)$$

Indication : Puisque T et E^{jk} sont bilinéaires, il suffit de vérifier l'identité (2.10) sur des vecteurs de la base $\{e_j\}$, donc

$$T(e_i, e_\ell) = \sum_{j,k=1}^n T_{jk} E^{jk}(e_i, e_\ell) \quad \forall i, \ell = 1, \dots, n.$$

Se convaincre que ceci est satisfait si

$$T_{jk} = T(e_j, e_k).$$

Les n^2 nombres T_{jk} sont appelés les *composantes du tenseur* T par rapport à la base $\{e_j\}$. Par rapport à une autre base $\{\tilde{e}_j\}$ de \mathcal{V} , les composantes de T sont les nombres

$$\tilde{T}_{jk} = T(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k).$$

Exercice 4 :

Soit $\{\alpha_j^k\}$ la matrice donnant le changement de base $\{e_j\} \rightarrow \{\tilde{e}_j\}$, c'est-à-dire $\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j^k e_k$.

(a) Vérifier la loi de transformation des composantes de T :

$$\tilde{T}_{jk} = \sum_{i,\ell=1}^n \alpha_j^i \alpha_k^\ell T_{i\ell}$$

(un facteur α_\bullet^\bullet pour chacun des deux indices spécifiant les composantes !)

(b) Pour $n = 2$ considérer le tenseur suivant

$$T = 2e^{*1} \otimes e^{*1} + e^{*1} \otimes e^{*2} - 2e^{*2} \otimes e^{*1} + 3e^{*2} \otimes e^{*2};$$

en utilisant la matrice $\{\alpha_j^k\}$ trouvée dans (1c), calculer \tilde{T}_{jk} .

Exercice 5 :

Soit $n = 3$ et les vecteurs de base e_i forment une base orthonormée "normale" (nous allons voir la définition précise plus tard, ce n'est pas important ici). L'énergie cinétique ε d'un système en rotation peut être écrite comme $\varepsilon = 1/2 I(\omega, \omega)$ où $\omega = \sum_{i=1}^3 \omega^i e_i$ est le vecteur (axial) de la vitesse angulaire, et $I = \sum_{j,k=1}^3 I_{jk} E^{jk}$ est le tenseur d'inertie.

(a) Calculer ε pour $\omega = \gamma e_3$ (rotation autour de l'axe e_3 avec vitesse angulaire α) et $I = 2m\ell^2(e^{*2} \otimes e^{*2} + e^{*3} \otimes e^{*3})$ (le tenseur d'inertie de deux masses ponctuelles m au points $(\pm\ell, 0, 0)$).

(b) Calculer les composantes de ω et I pour le changement de base correspondant à une rotation autour de l'axe e_2 d'un angle φ .

(c) Calculer explicitement l'énergie cinétique ε pour le cas (b) et vérifier qu'elle ne dépend pas de l'orientation des vecteurs de base.

2.2.2 Tenseurs covariants d'ordre q

Les considérations précédentes s'étendent aisément au concept de tenseur covariant d'ordre général q ($q \in \mathbb{N}$). Choisissons q vecteurs covariants, c'est-à-dire q éléments de \mathcal{V}^* désignés par v^{*1}, \dots, v^{*q} . Leur produit tensoriel est une application de $\underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{q \text{ fois}}$ dans \mathbb{R} donnée par

$$v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*q}(v_1, \dots, v_q) = \langle v^{*1}, v_1 \rangle \langle v^{*2}, v_2 \rangle \dots \langle v^{*q}, v_q \rangle, \quad (2.11)$$

où les v_1, \dots, v_q varient sur \mathcal{V} . Le produit $v^{*1} \otimes \dots \otimes v^{*q}$ définit une application multilinéaire (linéaire dans chacun des q arguments) de $\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ dans \mathbb{R} . Plus généralement, un *tenseur covariant d'ordre q* est défini comme une application multilinéaire

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{q \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R},$$

satisfaisant donc

$$\begin{aligned} T(v_1, \dots, v_{j-1}, v + \lambda w, v_{j+1}, \dots, v_q) &= T(v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_q) \\ &\quad + \lambda T(v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_q) \end{aligned} \quad (2.12)$$

pour chaque $j = 1, \dots, q$ ($v, w, v_i \in \mathcal{V}, \lambda \in \mathbb{R}$).

Nous désignons par \mathcal{T}_q^0 l'ensemble des tenseurs covariants d'ordre q . (Pour $q = 1$ on obtient les vecteurs covariants, donc $\mathcal{T}_1^0 = \mathcal{V}^*$). \mathcal{T}_q^0 est un espace vectoriel (on peut additionner des tenseurs covariants du même ordre q , et on peut les multiplier par des constantes). On peut introduire une base de \mathcal{T}_q^0 , en commençant par une base $\{e_j\}$ de \mathcal{V} et en prenant tous les tenseurs qui sont un produit de q vecteurs de la base duale $\{e^{*i}\}$. Plus précisément, soit

$$E^{i_1 \dots i_q} = e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_q} \quad (i_1, \dots, i_q = 1, \dots, n) \quad (2.13)$$

le produit (au sens tensoriel) des vecteurs $e^{*i_1}, \dots, e^{*i_q}$ (à noter que le même vecteur de la base duale $\{e^{*j}\}$ peut apparaître plusieurs fois dans (2.13)). Donc $E^{i_1 \dots i_q}$ est une application multilinéaire $\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$E^{i_1 \dots i_q}(v_1, \dots, v_q) = \langle e^{*i_1}, v_1 \rangle \langle e^{*i_2}, v_2 \rangle \dots \langle e^{*i_q}, v_q \rangle.$$

En répétant les arguments de l'Exercice 3 (avec q facteurs au lieu de 2 facteurs), on voit que les n^q tenseurs $\{E^{i_1 \dots i_q}\}$ forment une base de \mathcal{T}_q^0 . Donc si $T \in \mathcal{T}_q^0$ est un tenseur covariant d'ordre q , on peut l'écrire comme combinaison linéaire des $E^{i_1 \dots i_q}$:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_q=1}^n T_{i_1 \dots i_q} E^{i_1 \dots i_q},$$

les nombres $T_{i_1 \dots i_q}$ étant donnés par

$$T_{i_1 \dots i_q} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}). \quad (2.14)$$

Ce sont les *composantes du tenseur T* par rapport à la base $\{e_i\}$.

Exercice 6 :

Déterminer la loi de transformation des composantes d'un tenseur T covariant. Plus précisément : soit $\{\tilde{e}_j\}$ une deuxième base de \mathcal{V} ($\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j^k e_k$), et soit $\tilde{T}_{i_1 \dots i_q}$ les composantes de T par rapport à cette base :

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_q} = T(\tilde{e}_{i_1}, \dots, \tilde{e}_{i_q}).$$

Etablir la relation entre les $\tilde{T}_{i_1 \dots i_q}$ et les $T_{i_1 \dots i_q}$.

Dans (2.8) et (2.11) nous avons introduit la multiplication de vecteurs covariants. De façon similaire on peut définir la *multiplication de tenseurs covariants arbitraires* (pas nécessairement du même ordre). Si $S \in \mathcal{T}_q^0$ et $T \in \mathcal{T}_s^0$, alors le *produit* $S \otimes T$ est un tenseur covariant d'ordre $q + s$ (c'est-à-dire $S \otimes T \in \mathcal{T}_{q+s}^0$) défini par

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_{q+s}) = S(v_1, \dots, v_q)T(v_{q+1}, \dots, v_{q+s}). \quad (2.15)$$

Pour $q = s = 1$, (2.15) est identique avec (2.8).

Exercice 7 :

- (a) Vérifier que la formule (2.15) définit bien un tenseur (c'est-à-dire une application multilinéaire).
- (b) Est-ce que la multiplication de tenseurs est commutative ou non ?
- (c) Exprimer les composantes du produit $S \otimes T$ en termes des composantes de S et de T .

2.2.3 Tenseurs contravariants

La théorie des tenseurs contravariants est très semblable à celle des tenseurs covariants, il suffit de remplacer partout l'espace vectoriel \mathcal{V} par \mathcal{V}^* (et donc \mathcal{V}^* par $(\mathcal{V}^*)^*$). Ici il faut se rappeler qu'on peut identifier $(\mathcal{V}^*)^*$ avec \mathcal{V} . En effet, chaque vecteur $v \in \mathcal{V}$ définit une application linéaire $\mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$v(v^*) = \langle v^*, v \rangle ;$$

ici v est fixé et v^* varie sur \mathcal{V}^* . D'autre part $\dim(\mathcal{V}^*)^* = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V} = n$; donc chaque élément de $(\mathcal{V}^*)^*$ peut être identifié de façon univoque avec un vecteur v de \mathcal{V} .

Un vecteur contravariant était défini comme un élément v de \mathcal{V} , c'est donc aussi une application linéaire $\mathcal{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Un *tenseur contravariant d'ordre p* ($p \in \mathbb{N}$) est une application multilinéaire $T : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{p \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant donc

$$T(v^{*1}, \dots, v^{*j-1}, v^* + \lambda w^*, v^{*j+1}, \dots, v^{*p}) = T(v^{*1}, \dots, v^{*j-1}, v^*, v^{*j+1}, \dots, v^{*p}) + \lambda T(v^{*1}, \dots, v^{*j-1}, w^*, v^{*j+1}, \dots, v^{*p}) \quad (2.16)$$

pour $j = 1, \dots, p$ ($v^*, w^*, v^{*i} \in \mathcal{V}^*, \lambda \in \mathbb{R}$). L'ensemble des tenseurs contravariants d'ordre p est désigné par \mathcal{T}_0^p ($\mathcal{T}_0^1 \equiv \mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs contravariants). \mathcal{T}_0^p est un espace vectoriel ; une base de \mathcal{T}_0^p est donnée par les n^p tenseurs

$$E_{j_1 \dots j_p} = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p} \quad (j_1, \dots, j_p = 1, \dots, n).$$

$E_{j_1 \dots j_p}$ est le produit, au sens tensoriel, de p vecteurs d'une base $\{e_j\}$ de \mathcal{V} . Ses valeurs sont

$$E_{j_1 \dots j_p}(v^{*1}, \dots, v^{*p}) = \langle v^{*1}, e_{j_1} \rangle \langle v^{*2}, e_{j_2} \rangle \dots \langle v^{*p}, e_{j_p} \rangle.$$

Si $T \in \mathcal{T}_0^p$ est un tenseur contravariant d'ordre p , il peut être écrit comme combinaison linéaire des $E_{j_1 \dots j_p}$:

$$T = \sum_{j_1, \dots, j_p=1}^n T^{j_1 \dots j_p} E_{j_1 \dots j_p}, \quad (2.17)$$

avec

$$T^{j_1 \dots j_p} = T(e^{*j_1}, \dots, e^{*j_p}). \quad (2.18)$$

Les nombres $T^{j_1 \dots j_p}$ sont appelés les *composantes* du tenseur $T \in \mathcal{T}_0^p$ par rapport à la base $\{e_j\}$ (les indices spécifiant ces composantes sont placés en haut, ce qui distingue les tenseurs contravariants des tenseurs covariants dont les composantes sont écrites avec des indices inférieurs).

Exercice 8 :

- (a) Soit $T \in \mathcal{T}_0^p$ et $p = 2$. En procédant comme dans l'Exercice 3(b), vérifier (2.17)-(2.18) dans ce cas.
 (b) Soit $T \in \mathcal{T}_0^p$, $T^{j_1 \dots j_p}$ ses composantes par rapport à une base $\{e_j\}$ de \mathcal{V} et $\tilde{T}^{j_1 \dots j_p}$ ses composantes par rapport à une autre base $\{\tilde{e}_j\}$. En utilisant (2.3), déterminer la loi de transformation de ces composantes (considérer d'abord le cas $p = 2$, puis le cas général).
 (c) Donner la formule pour la multiplication de tenseurs contravariants (si $S \in \mathcal{T}_0^p$ et $T \in \mathcal{T}_0^r$, alors $S \otimes T$ sera un tenseur contravariant d'ordre $p + r$).

2.2.4 Tenseurs mixtes

Une combinaison des notions de tenseur covariant et tenseur contravariant donne celle de *tenseur mixte*. Un tenseur p fois contravariant et q fois covariant sur \mathcal{V} est une application multilinéaire (c'est-à-dire linéaire dans chaque argument)

$$T : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \dots \times \mathcal{V}^*}_{p \text{ fois}} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}}_{q \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.19)$$

(donc les p premiers arguments sont des vecteurs de \mathcal{V}^* , les q derniers des vecteurs appartenant à \mathcal{V}). Nous dirons aussi que T est un tenseur du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ sur \mathcal{V} . Le nombre $p + q$ est appelé le *rang* du tenseur T .

L'ensemble des tenseurs du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ sera désigné par \mathcal{T}_q^p . Si $p = 0$, resp. $q = 0$, on retrouve l'espace \mathcal{T}_q^0 des tenseurs covariants d'ordre q , resp. l'espace \mathcal{T}_0^p des tenseurs contravariants d'ordre p . On définit encore (pour $p = q = 0$) les tenseurs de \mathcal{T}_0^0 comme étant des constantes; donc un tenseur du type $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un nombre réel, et ces tenseurs sont appelés des *scalaires*.

Il est clair que \mathcal{T}_q^p est un espace vectoriel (on peut additionner des tenseurs du même type, et on peut les multiplier par des scalaires). On peut aussi multiplier deux tenseurs quelconques : Si $S \in \mathcal{T}_q^p$ et $T \in \mathcal{T}_s^r$, leur *produit* $S \otimes T$ est un tenseur du type $\begin{bmatrix} p+r \\ q+s \end{bmatrix}$ donné par

$$S \otimes T(v^{*1}, \dots, v^{*p+r}, v_1, \dots, v_{q+s}) = S(v^{*1}, \dots, v^{*p}, v_1, \dots, v_q) T(v^{*p+1}, \dots, v^{*p+r}, v_{q+1}, \dots, v_{q+s}). \quad (2.20)$$

Une base de \mathcal{T}_q^p peut être construite en prenant les n^{p+q} produits de p vecteurs d'une base $\{e_j\}$ de \mathcal{V} et q vecteurs de la base duale $\{e^{*j}\}$:

$$E_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_q}.$$

Donc

$$E_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}(v^{*1}, \dots, v^{*p}, v_1, \dots, v_q) = \langle v^{*1}, e_{i_1} \rangle \dots \langle v^{*p}, e_{i_p} \rangle \langle e^{*j_1}, v_1 \rangle \dots \langle e^{*j_q}, v_q \rangle.$$

Le développement d'un tenseur général $T \in \mathcal{T}_q^p$ dans cette base est :

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_q=1}^n T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} E_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}, \quad (2.21)$$

où les coefficients $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ (des nombres réels) sont donnés par

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).$$

Exercice 9 :

Pour des cristaux anisotropes, la conductivité électrique σ peut être différente dans certaines directions. Dans ce cas, la densité de courant est $j = \sigma E$, où j et E sont des vecteurs et σ est alors un tenseur mixte du type $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pour assurer que la densité de courant est une quantité indépendante du choix de base.

(a) Ecrire la loi de transformation des composantes σ_i^j du tenseur de conductivité.

(b) Soient dans une base "standard" (orthonormée) $\{e_1, e_2, e_3\}$ ($n = 3$) les composantes du tenseur $\sigma = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_i^j E_j^i$:

$$[\sigma_i^j] = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Faire une transformation de base

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} e_3 \\ \tilde{e}_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} e_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} e_3 \\ \tilde{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3. \end{aligned}$$

(Ecrit comme matrice, l'inverse de cette transformation est la matrice transposée.) Quels sont les composantes de σ dans la base $\{\tilde{e}_j\}$? Donnez une interprétation physique du résultat.

Exercice 10 :

(a) Soit $S, T \in \mathcal{T}_q^p$. Quelles sont les composantes de la somme $S + T$ en termes de composantes de S et T ?

(b) Soit $S \in \mathcal{T}_q^p$ et $T \in \mathcal{T}_s^r$. Donner les composantes du produit $S \otimes T$ en termes de composantes de S et de T .

(c) Vérifier la loi de transformation des composantes d'un tenseur $T \in \mathcal{T}_q^p$ lors d'un changement de base $\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j^k e_k$:

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \sum_{k_1, \dots, k_p=1}^n \sum_{\ell_1, \dots, \ell_q=1}^n \beta_{k_1}^{i_1} \dots \beta_{k_p}^{i_p} \alpha_{j_1}^{\ell_1} \dots \alpha_{j_q}^{\ell_q} T_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p} . \quad (2.22)$$

Donc chaque composante contravariante se transforme avec la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$ et chaque composante covariante avec la matrice α .

Attention : Une matrice $n \times n$ est une notation commode pour plusieurs objets mathématiques de nature très différente : a) une collection quelconque de n^2 valeurs, b) la représentation d'une application linéaire $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ dans une base donnée de cet espace, c) les composantes d'un tenseur de rang 2 dans une base donnée (notons que cette possibilité d'écriture pour un tenseur est très particulière : dès que le rang de celui-ci est supérieur à 2, l'écriture matricielle n'est plus possible). Les matrices $\alpha = \{\alpha_j^k\}$ et $\beta = \{\beta_k^j\}$, faisant partie de la catégorie b) ci-dessus, décrivent le passage entre deux bases et n'ont aucun rapport avec un tenseur ; les composantes d'un tenseur se réfèrent à une seule base, tandis que les α_j^k et β_k^j sont des objets dépendant de deux bases différentes.

2.2.5 Convention de sommation d'Einstein

Dorénavant l'équation (2.22) sera écrite comme suit :

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \beta_{k_1}^{i_1} \dots \beta_{k_p}^{i_p} \alpha_{j_1}^{\ell_1} \dots \alpha_{j_q}^{\ell_q} T_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p} . \quad (2.23)$$

Dans (2.23) nous avons omis d'indiquer les opérations de sommation, en utilisant la convention suivante :

Si dans une expression un indice apparaît deux fois (une fois en haut, une fois en bas), il est sous-entendu qu'on somme sur les valeurs possibles de cet indice (donc de 1 à n). Un indice de ce type est appelé un *indice muet*.

Un indice apparaissant une seule fois dans une expression est appelé un *indice libre*.

Exemples : (a) Dans (2.23), $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ sont des indices libres, ils apparaissent une fois dans le membre de gauche et une fois dans celui de droite. k_1, \dots, k_p et ℓ_1, \dots, ℓ_q sont des indices muets (comparer avec (2.22)).

(b) Soit $n = 2$. Si $\{T_{jk}\}$ est une matrice 2×2 , $\{S_{ijk}\}$ un ensemble de $2^3 = 8$ nombres ($i, j, k = 1$ ou 2) et $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$ un vecteur, alors la formule

$$T_{jk} = S_{ijk} a^i \quad (2.24)$$

est une abréviation pour les quatre équations

$$T_{11} = \sum_{i=1}^2 S_{i11} a^i, \quad T_{12} = \sum_{i=1}^2 S_{i12} a^i, \quad T_{21} = \sum_{i=1}^2 S_{i21} a^i, \quad T_{22} = \sum_{i=1}^2 S_{i22} a^i.$$

Dans l'équation (2.24), i est un indice muet et j, k sont des indices libres.

2.2.6 Terminologie des physiciens

En physique il est usuel d'utiliser le terme "tenseur" pour les composantes $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ (et non pour l'application multilinéaire T). Ces composantes ont une signification physique (par rapport à une base d'un espace vectoriel \mathcal{V} qui peut être par exemple l'espace \mathbb{R}^3 ou l'espace-temps de Minkowski). Donc les physiciens considèrent un tenseur comme un objet avec des indices en haut et/ou en bas (indices contravariants respectivement covariants); plus précisément, les physiciens appellent tenseur du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ la donnée, dans chaque base de \mathcal{V} , d'un arrangement de n^{p+q} nombres $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ayant la loi de transformation (2.23) pour tout changement de base.

2.2.7 Tenseurs et grandeurs avec indices

Etant donné des nombres $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ et une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathcal{V} , on peut définir une application $T : \mathcal{V}_q^p \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule (2.21), donc un tenseur du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ (comme dans (2.19), \mathcal{V}_q^p désigne le produit cartésien de p copies de \mathcal{V}^* et q copies de \mathcal{V}). D'autre part, étant donné, pour chaque base $\{\tilde{e}_i\}$ de \mathcal{V} , un arrangement de n^{p+q} nombres $\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$, ceci ne définit en général pas un tenseur : pour chaque base $\{\tilde{e}_i\}$ on obtient bien une application $\tilde{T} : \mathcal{V}_q^p \rightarrow \mathbb{R}$, mais en général ces applications sont différentes l'une de l'autre (elles sont identiques si et seulement si la loi de transformation (2.22) est satisfaite pour chaque couple $\{e_i, \tilde{e}_i\}$ de bases). Donc la propriété que les $\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ soient un tenseur (plus précisément qu'ils définissent les composantes d'un tenseur dans les différentes bases de \mathcal{V}) est une propriété très spéciale.

Exercice 11 :

Soit $n = 3$.

(a) Dans chaque base de \mathcal{V} , on se donne trois nombres comme suit : $T = (0, 1, 0)$ [donc le même arrangement de trois nombres dans chaque base]. Est-ce que ceci définit un vecteur covariant ou non ?

(b) Dans chaque base de \mathcal{V} , on se donne neuf nombres par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que ces nombres définissent un tenseur d'ordre 2 covariant (donc $T_{jk} = \delta_{jk}$ dans chaque base) ? Un tenseur d'ordre 2 contravariant (donc $T^{jk} = \delta^{jk}$ dans chaque base) ? Un tenseur d'ordre 2 mixte (donc $T_j^k = \delta_j^k$ dans chaque base) ?

Exercice 12 :

Supposons donné dans chaque base d'un espace vectoriel \mathcal{V} un arrangement de n^2 nombres b_j^k ayant la propriété suivante : pour chaque vecteur covariant S , les nombres $T_j = b_j^k S_k$ se transforment comme les composantes d'un vecteur covariant. Alors b_j^k se transforme nécessairement comme un tenseur.

Ce résultat peut être utile en physique. En mécanique par exemple on a la relation $L_j = I_j^k \omega_k$ entre la vitesse angulaire ω et le moment cinétique \mathbf{L} ; comme ce sont deux grandeurs vectorielles (densités vectorielles de même poids -1 , ou "vecteurs axiaux"), I doit être un tenseur.

2.2.8 L'opération de contraction

La *contraction (simple)* est une application linéaire de \mathcal{T}_q^p dans \mathcal{T}_{q-1}^{p-1} (si $p, q \geq 1$). La définition la plus simple est en termes de composantes. Soit $T \in \mathcal{T}_q^p$. Les composantes $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ de T dans une base $\{e_i\}$ portent p indices libres contravariants (i_1, \dots, i_p) et q indices libres covariants (j_1, \dots, j_q). On choisit une paire formée d'un indice contravariant et d'un indice covariant et on donne le même nom à ces deux indices; ainsi deux indices libres deviennent muets (et il y a une sommation à effectuer). De cette façon on obtient un arrangement de n^{p+q-2} nombres ($p-1$ indices libres contravariants et $q-1$ indices libres covariants), et il s'agit en effet d'un tenseur du type $\begin{bmatrix} p-1 \\ q-1 \end{bmatrix}$ (en effectuant dans chaque base $\{\tilde{e}_i\}$ la contraction sur la même paire d'indices).

Exemple : Choisissons la paire (i_1, j_q) . Les composantes du tenseur contracté seront $T_{j_1 \dots j_{q-1} k}^{k i_2 \dots i_p}$ (k étant un indice muet, donc de sommation), ou également $T_{j_1 \dots j_{q-1} i_1}^{i_1 \dots i_p}$ (i_1 désignant l'indice de sommation).

Exercice 13 :

(a) Soit S un vecteur contravariant et T un vecteur covariant. Dans une base $\{e_i\}$ on a $S = S^j e_j$ et $T = T_j e^{*j}$. Les nombres $S^j T_k$ définissent un tenseur du type $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Après contraction on obtient un scalaire (le "produit scalaire" des vecteurs S et T). Vérifier cela explicitement avec le changement de base de (1c), $S = 2e_1 + e_2$ et $T = e^{*1} + 2e^{*2}$, c'est-à-dire montrer qu'on a $\tilde{S}^k \tilde{T}_k = S^j T_j$.

(b) Soit $T_{k\ell}^{ij}$ les composantes d'un tenseur du type $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vérifier que la loi de transformation de $T_{j\ell}^{ij}$ est bien celle d'un tenseur du type $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. En d'autres termes : si $t_\ell^i = T_{j\ell}^{ij}$ et $\tilde{t}_\ell^i = \tilde{T}_{j\ell}^{ij}$, alors on a bien $\tilde{t}_\ell^i = \beta_k^i \alpha_\ell^r t_r^k$.

Remarque : On peut itérer l'opération de contraction et définir des *contractions multiples*. Si $m \in \mathbb{N}$ et $p, q \geq m$, on peut choisir m paires d'indices différents, chacune formée d'un indice contravariant et d'un indice covariant, et effectuer une contraction sur chacune de ces paires. Le résultat est un tenseur du type $\begin{bmatrix} p-m \\ q-m \end{bmatrix}$. Exemple ($m = 2$) : si $T_{k\ell r}^{ij}$ sont les composantes d'un tenseur du type $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, alors T_{jir}^{ij} est un vecteur covariant (r est l'indice libre).

2.2.9 Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques

Soit $q \geq 2$ et $1 \leq i < j \leq q$. Un tenseur $T \in \mathcal{T}_q^0$ est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) par rapport à la paire (i, j) si ses valeurs ne changent pas (resp. changent de signe) sous permutation du i -ème et j -ième argument, c'est-à-dire si

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_q) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_q) \quad (2.25)$$

resp.

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_q) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_q). \quad (2.26)$$

T est *complètement symétrique* (resp. *complètement antisymétrique*) si (2.25) (resp. (2.26)) est satisfait pour toute paire (i, j) .

De façon analogue on définit des propriétés de symétrie ou d'antisymétrie de tenseurs contravariants.

Exercice 14 :

- (a) Utiliser (2.14) pour exprimer la propriété de symétrie ou d'antisymétrie d'un tenseur $T \in \mathcal{T}_q^0$ en termes des composantes de T . Si $q = 2$, les composantes T_{jk} de T peuvent être considérées sous forme de matrice $n \times n$; quelles sont les propriétés spéciales de cette matrice si T est symétrique ou antisymétrique ?
 (b) Vérifier que chaque tenseur covariant (ou contravariant) d'ordre 2 possède une décomposition unique en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.
 (c) Soit $S \in \mathcal{T}_2^0$ un tenseur symétrique et $T \in \mathcal{T}_0^2$ un tenseur antisymétrique. Montrer que $S_{jk}T^{jk} = 0$.

Rajoutons que l'ensemble des tenseurs complètement symétriques (q fois covariants) est un sous-espace de l'espace vectoriel de \mathcal{T}_q^0 . Il en est de même pour l'ensemble des tenseurs complètement antisymétriques.

2.2.10 Pseudotenseurs

Le terme "pseudotenseur" est utilisé pour certaines grandeurs qui ont une loi de transformation tensorielle pour une classe restreinte de changements de base. Des cas particuliers sont souvent rencontrés en physique.

Définition : Une *densité tensorielle* du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ et de poids N consiste en la donnée, dans chaque base de \mathcal{V} , de n^{p+q} nombres $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ se transformant comme suit (comparer avec (2.22)) :

$$\tilde{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = |\alpha|^N \beta_{k_1}^{i_1} \dots \beta_{k_p}^{i_p} \alpha_{j_1}^{\ell_1} \dots \alpha_{j_q}^{\ell_q} T_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p}, \quad (2.27)$$

où $\alpha = \{\alpha_j^k\}$ est la matrice qui définit le passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{\tilde{e}_i\}$, $|\alpha| = \det \alpha$ est le déterminant de α , et $\beta = (\alpha^T)^{-1}$.

Sous des changements de base avec $\det \alpha = 1$, (2.27) coïncide avec la loi de transformation d'un tenseur.

Les densités tensorielles de rang $m = 0$ ($p = q = 0$) sont appelées des *densités scalaires*, celles de rang $m = 1$ des *densités vectorielles* (covariantes ou contravariantes). Parfois on emploie le terme "*capacité tensorielle*" pour des densités tensorielles de poids négatif ($N < 0$).

Un tenseur est simplement une densité tensorielle de poids $N = 0$. Le produit d'une densité tensorielle de rang m_1 et poids N_1 avec une densité tensorielle de rang m_2 et poids N_2 est une densité tensorielle de rang $m_1 + m_2$ et poids $N_1 + N_2$. Si $N_2 = -N_1$, ce produit est un tenseur de rang $m_1 + m_2$.

Exemple : Le produit d'un tenseur de rang m et d'une densité scalaire de poids N est une densité tensorielle de rang m et poids N .

Exercice 15 (Scaires et pseudoscaires) :

- (a) Mettre en évidence la différence entre un scalaire et une densité scalaire en considérant leur loi de transformation lors du passage d'une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ à la base $\{-e_1, \dots, -e_n\}$ (donc $\tilde{e}_i = -e_i$).
 (b) Si T_{jk} sont les composantes d'un tenseur covariant d'ordre 2, désignons par $|T| = \det\{T_{jk}\}$ le déterminant de la matrice $\{T_{jk}\}$. Est-ce que $|T|$ est un tenseur ? ou une densité tensorielle ? Si oui, indiquer son type et son poids.

Exercice 16 (Le symbole ε de Levi-Civita) :

Soit d'abord $n = 3$. On pose

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.28)$$

(a) Ecrire explicitement quelques valeurs de ce symbole (choisir quelques valeurs pour i, j, k et écrire la valeur de ε_{ijk})

(b) A chaque base on associe $3^3 = 27$ nombres ε_{ijk} par la définition ci-dessus (donc la définition de ces 27 nombres est la même dans chaque base : si on désigne par $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ le symbole de Levi-Civita pour une base $\{\tilde{e}_i\}$, on a $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = +1, -1$ ou 0 sous les conditions spécifiées dans (2.28)).

A montrer : Les ε_{ijk} définissent une densité tensorielle covariante d'ordre 3 (complètement antisymétrique) de poids $N = -1$ (donc du type capacité), et les ε^{ijk} une densité tensorielle contravariante d'ordre 3 et poids $N = +1$.

Indications : Si $A = \{A_j^k\}$ est une matrice 3×3 (par exemple $A = \alpha$), posons

$$\tau_{\ell rs} = \varepsilon_{ijk} A_\ell^i A_r^j A_s^k. \quad (2.29)$$

(i) Vérifier que $\tau_{\ell rs}$ est complètement antisymétrique. Par conséquent on doit avoir $\tau_{\ell rs} = \nu \varepsilon_{\ell rs}$ pour un nombre $\nu \in \mathbb{R}$.

(ii) Se convaincre que $\tau_{123} = \det A$. En déduire que $\nu = \det A$, donc

$$\tau_{\ell rs} = (\det A) \varepsilon_{\ell rs}. \quad (2.30)$$

(iii) Prendre $A = \alpha$ et déduire de (2.29) et (2.30) la loi de transformation de ε_{ijk} .

(c) Montrer que le symbole de Levi-Civita se transforme comme un tenseur pour des changements de base $\{e_j\} \rightarrow \{\tilde{e}_j\}$ dans \mathbb{R}^3 donnés par des rotations propres. (Rappel : une rotation de \mathbb{R}^3 est décrite par une matrice orthogonale O , c'est-à-dire satisfaisant $O^T O = I =$ la matrice identité 3×3 . Une rotation est propre si elle préserve l'orientation de la triade de base.)

Exercice 17 (Contractions de ε) :

Soit $n = 3$ et ε défini comme dans l'exercice précédent.

(a) En utilisant les propriétés des permutations, se convaincre que

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{lmn} = \delta_i^l \delta_j^m \delta_k^n + \delta_i^m \delta_j^n \delta_k^l + \delta_i^n \delta_j^l \delta_k^m - \delta_i^m \delta_j^l \delta_k^n - \delta_i^n \delta_j^m \delta_k^l - \delta_i^l \delta_j^m \delta_k^n. \quad (2.31)$$

(b) Calculer $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{imn}$ (somme sur indices répétés !).

(c) Calculer $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijn}$.

(d) Calculer $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk}$.

Exercice 18 (Le symbole ε pour la relativité) :

Le symbole de Levi-Civita peut être considéré en n dimensions pour tout $n \geq 2$. ε portera alors n indices et sera complètement antisymétrique. Nous considérons ici le cas $n = 4$, en adoptant les notations utilisées en relativité (voir le § 3.4) : les indices sont désignés par des lettres grecques et prennent les valeurs 0, 1, 2 et 3. Donc

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ est une permutation paire de } (0, 1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho, \sigma) \text{ est une permutation impaire de } (0, 1, 2, 3), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme dans l'Exercice 14, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est une densité tensorielle covariante de poids $N = -1$ (d'ordre 4), et $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ une densité tensorielle contravariante de poids $N = +1$.

Calculer le scalaire $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

2.3 Tenseurs sur un espace vectoriel muni d'une métrique

2.3.1 Tenseur métrique

Soit G une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur \mathcal{V} . Donc G est une application bilinéaire $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (c'est-à-dire un tenseur covariant d'ordre 2) telle que

$$(a) \quad G(v_1, v_2) = G(v_2, v_1) \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}, \quad (2.32)$$

$$(b) \quad \text{si } v \in \mathcal{V} \text{ est tel que } G(v, w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{V}, \text{ alors } v = 0. \quad (2.33)$$

Si $G(v, v) > 0$ pour tout $v \neq 0$, on dit que G est *définie positive*. Si $G(v, v) < 0$ pour tout $v \neq 0$, on dit que G est *définie négative*. Dans les autres cas (si les valeurs de G peuvent être positives ou négatives), on dit que G est *indéfinie*.

Dans une base $\{e_j\}$ de \mathcal{V} , les composantes $g_{ij} \equiv G(e_i, e_j)$ de G forment une matrice $n \times n$ symétrique non-dégénérée. Cette matrice peut être diagonalisée (voir le cours d'Algèbre I ou le livre de W. Greub "Linear Algebra"); plus précisément il existe une base distinguée dans laquelle la matrice $\{g_{ij}\}$ a la forme

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & -1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \\ -1 \\ \ddots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\} n_+ \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ddots \\ 1 \\ -1 \\ \ddots \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\} n_- \end{array} \right\} (n_+ + n_- = n) \quad (2.34)$$

Le nombre n_+ d'entrées $+1$ s'appelle l'*index* de G , la différence $n_+ - n_-$ est la *signature* de G . G est une forme définie si et seulement si $n_+ = n$ ou $n_- = n$.

En physique on rencontre souvent le cas d'un espace vectoriel \mathcal{V} avec une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée distinguée (ayant une interprétation physique; des exemples seront considérés plus loin). On parle d'un *espace vectoriel muni d'une métrique*, et la forme bilinéaire distinguée G est souvent appelée la *métrique* de \mathcal{V} (parfois on parle de pseudo-métrique dans le cas où G est indéfinie).

Si v_1 est un vecteur fixé de \mathcal{V} , alors $G(v_1, v_2)$ est (en tant que fonction de v_2) une application linéaire $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, donc un élément de \mathcal{V}^* que nous appelons $\varphi(v_1)$. De cette façon on associe à chaque $v_1 \in \mathcal{V}$ un élément $\varphi(v_1)$ de \mathcal{V}^* , avec

$$G(v_1, v_2) = \langle \varphi(v_1), v_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}. \quad (2.35)$$

L'application $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ est *linéaire* (puisque G est bilinéaire) et *injective* (si $\varphi(v_1) = \varphi(v'_1)$, alors $G(v_1 - v'_1, v_2) = 0$ pour tout $v_2 \in \mathcal{V}$, et la propriété (2.33) de la métrique mène à $v_1 - v'_1 = 0$, c'est-à-dire $v_1 = v'_1$).

Ainsi la donnée d'une métrique G permet de définir un isomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ satisfaisant (2.35). Si v^{*1}, v^{*2} sont des vecteurs de \mathcal{V}^* , alors $\varphi^{-1}(v^{*1})$ et $\varphi^{-1}(v^{*2})$ appartiennent à \mathcal{V} , et on peut définir une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée G^* sur \mathcal{V}^* en posant

$$G^*(v^{*1}, v^{*2}) = G(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2})).$$

Remarque : La forme bilinéaire G^* introduite ci-dessus est un tenseur 2 fois contravariant, entièrement déterminé par G ; vice versa, G est entièrement déterminé par la donnée de G^* , car $G(v_1, v_2) = G^*(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$. G et G^* peuvent être envisagés comme deux réalisations différentes d'une seule entité g . Ainsi un *tenseur métrique* g est un tenseur de rang 2 (symétrique et non-dégénéré), G est son expression covariante et G^* son expression contravariante. Par abus la forme G est elle-même appelée tenseur métrique

Exercice 19 (Composantes du tenseur métrique) :

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de \mathcal{V} et $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ la base duale. Il est usuel de désigner les composantes covariantes d'un tenseur métrique par g_{jk} et ses composantes contravariantes par g^{jk} :

$$g_{jk} = G(e_j, e_k), \quad g^{jk} = G^*(e^{*j}, e^{*k}).$$

(a) Si e_i est un vecteur de la base de \mathcal{V} , alors $\varphi(e_i)$ est élément de \mathcal{V}^* , donc de la forme

$$\varphi(e_j) = c_{jk} e^{*k} \quad (\text{somme sur } k !)$$

pour certains nombres c_{jk} . Vérifier que $c_{jk} = g_{jk}$. Donc

$$\varphi(e_j) = g_{jk} e^{*k}. \quad (2.36)$$

(b) Montrer de même que

$$\varphi^{-1}(e^{*j}) = g^{jk} e_k. \quad (2.37)$$

(c) Déduire de (2.36) et (2.37) que

$$g_{jk} g^{kl} = \delta_j^l. \quad (2.38)$$

En termes matricielles : $\mathbf{g} \equiv \{g_{jk}\}$ et $\mathbf{g}^* \equiv \{g^{jk}\}$ sont des matrices symétriques $n \times n$, et leur produit est la matrice identité.

Remarque : Si \mathcal{V} est muni d'une métrique, chaque base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathcal{V} détermine deux bases de \mathcal{V}^* , à savoir la base duale $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ et la base $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$. En général ce sont deux bases différentes de \mathcal{V}^* . En effet, d'après (2.36), elles sont identiques (c'est-à-dire on a $\varphi(e_j) = e^{*j}$ pour $j = 1, \dots, n$) si et seulement si $g_{jk} \equiv G(e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

2.3.2 Covariance, contravariance et métrique

Soit \mathcal{V} un espace vectoriel muni d'une métrique. Nous avons vu que le tenseur métrique peut être exprimé sous forme covariante (indices en bas pour les composantes) ou sous forme contravariante (indices en haut pour les composantes). Plus généralement, la donnée d'une métrique permet (par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$) d'établir des relations biunivoques entre grandeurs covariantes et grandeurs contravariantes (nous insistons sur le fait que de telles relations ne sont possibles que si \mathcal{V} est muni d'une métrique). *Sur un espace vectoriel \mathcal{V} muni d'une métrique, un tenseur général peut être considéré comme étant une seule entité que l'on peut exprimer sous forme covariante ou sous forme contravariante ou sous forme mixte.* Nous allons expliquer cela en considérant des exemples.

Exemple 1 : Vecteurs

Si $v \in \mathcal{V}$ est un vecteur contravariant, alors $v^* \equiv \varphi(v)$ est son expression covariante. En termes des composantes :

$$\text{si } v = v^j e_j, \quad \varphi(v) = \mathbf{v}_k e^{*k}, \quad (2.39)$$

alors (utiliser (2.36)) :

$$\varphi(v) = v^j \varphi(e_j) = v^j g_{jk} e^{*k}. \quad (2.40)$$

Comparaison de (2.39) et (2.40) donne

$$\mathbf{v}_k = g_{jk} v^j = g_{kj} v^j.$$

En combinant ceci avec (2.38), on trouve

$$g^{ik} \mathbf{v}_k = g^{ik} g_{kj} v^j = \delta_j^i v^j = v^i,$$

c'est-à-dire

$$v^i = g^{ik} \mathbf{v}_k.$$

Donc : les composantes covariantes sont obtenues en termes des composantes contravariantes en multipliant par la matrice $\mathbf{g} = \{g_{jk}\}$. Les composantes contravariantes sont obtenues à partir des composantes covariantes en multipliant par la matrice $\mathbf{g}^* = \{g^{jk}\}$. Autrement dit : la matrice $\{g_{jk}\}$ permet de “baisser” un indice, la matrice $\{g^{jk}\}$ de “monter” un indice. Dans la suite, on utilisera la notation v_k pour \mathbf{v}_k .

Exercice 20 :

Supposons que par rapport à une certaine base $\{e_i\}$ de \mathcal{V} , les composantes covariantes d'un certain vecteur v soient les nombres $(1, 0, \dots, 0)$. Trouver les composantes contravariantes v^j de ce vecteur par rapport à la même base.

Exemple 2 : Tenseurs de rang 2

Soit T une application bilinéaire $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (un tenseur du type $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$). Comme nous l'avons fait pour le tenseur métrique, on peut l'exprimer sous forme contravariante (c'est-à-dire on peut lui associer un tenseur T^* du type $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$) en posant

$$T^*(v^{*1}, v^{*2}) = T(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2})).$$

En termes de composantes par rapport à une base $\{e_j\}$:

$$\begin{array}{ll} \text{si} & T = T_{ij} E^{ij} \quad \text{avec} \quad T_{ij} = T(e_i, e_j) \\ \text{et} & T^* = T^{ij} E_{ij} \quad \text{avec} \quad T^{ij} = T^*(e^{*i}, e^{*j}), \end{array}$$

alors (utiliser (2.37)) :

$$T^{ij} = T(\varphi^{-1}(e^{*i}), \varphi^{-1}(e^{*j})) = T(g^{ik} e_k, g^{j\ell} e_\ell) \quad (2.41)$$

$$= g^{ik} g^{j\ell} T(e_k, e_\ell) = g^{ik} g^{j\ell} T_{k\ell}. \quad (2.42)$$

Les composantes contravariantes du tenseur T s'obtiennent à partir de ses composantes covariantes en montant chaque indice avec une matrice $\{g^{rs}\}$. Similairement les composantes covariantes se calculent à partir des composantes contravariantes en baissant chaque indice à l'aide d'une matrice $\{g_{rs}\}$:

Exercice 21 :

(a) Montrer que

$$T_{ij} = g_{ik} g_{j\ell} T^{k\ell}$$

(donc $\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{j\ell} \tilde{T}^{k\ell}$ dans une autre base $\{\tilde{e}_j\}$).

(b) Expression mixte pour T : un tenseur de rang 2 peut également être exprimé sous forme mixte (on peut associer à $T \in \mathcal{T}_2^0$ un tenseur $\underline{T} \in \mathcal{T}_1^1$) :

$$\underline{T}(v^*, w) = T(\varphi^{-1}(v^*), w) \quad (v^* \in \mathcal{V}^*, w \in \mathcal{V}).$$

En écrivant

$$\underline{T} = T_k^i E_i^k, \quad \text{avec} \quad T_k^i = \underline{T}(e^{*i}, e_k),$$

montrer que

$$T_k^i = g^{ij} T_{jk} = g_{k\ell} T^{i\ell}$$

(un seul indice à monter ou à baisser, donc une seule matrice $\{g^{rs}\}$ ou $\{g_{rs}\}$). Egalement :

$$T_{jk} = g_{ji} T_k^i, \quad T^{jk} = g^{k\ell} T_\ell^j.$$

Exemple 3 : Tenseurs de rang 3

Soit T une application trilinéaire $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (un tenseur du type $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$). On peut lui associer un tenseur T^* du type $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, ainsi qu'un tenseur \underline{T} du type $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et un tenseur $\underline{\tilde{T}}$ du type $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ par les formules suivantes :

$$T^*(v^{*1}, v^{*2}, v^{*3}) = T(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2}), \varphi^{-1}(v^{*3})), \quad (2.43)$$

$$\underline{T}(v^*, v_1, v_2) = T(\varphi^{-1}(v^*), v_1, v_2), \quad (2.44)$$

$$\underline{\tilde{T}}(v^{*1}, v^{*2}, v) = T(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2}), v), \quad (2.45)$$

où $v^*, v^{*j} \in \mathcal{V}^*$ et $v, v_j \in \mathcal{V}$.

Exercice 22 :

(a) Considérons les composantes T_{ijk} de T et les composantes T^{ijk} de T^* :

$$T_{ijk} = T(e_i, e_j, e_k), \quad T^{ijk} = T^*(e^{*i}, e^{*j}, e^{*k}).$$

Etablir les relations

$$T^{ijk} = g^{i\ell} g^{jr} g^{ks} T_{\ell rs}$$

et

$$T_{ijk} = g_{i\ell} g_{jr} g_{ks} T^{\ell rs}.$$

(b) Désignons par T_{jk}^i resp. T_k^{ij} les composantes de \underline{T} resp. $\underline{\tilde{T}}$:

$$T_{jk}^i = \underline{T}(e^{*i}, e_j, e_k), \quad T_k^{ij} = \underline{\tilde{T}}(e^{*i}, e^{*j}, e_k).$$

Etablir les relations entre ces nombres et les composantes T_{ijk} de T .

Remarque : Dans le contexte présent, il faut faire attention à bien placer les indices. L'écriture utilisée parfois au chapitre 2, en mettant des indices supérieurs verticalement au-dessus des indices inférieurs (par exemple $T_j^i, T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$) n'est plus admissible ici. On devrait écrire par exemple $T_j^i, T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$; $T_{j_1}^{i_1 i_2 k}$ est obtenu en montant le dernier indice de $T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 k}$: $T_{j_1}^{i_1 i_2 k} = g^{kj_2} T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$ (j_2 est un indice muet dans cette équation).

Dans certaines applications la position d'un indice a une interprétation précise. Par exemple, si I est le tenseur d'inertie en mécanique, c'est-à-dire le tenseur de proportionnalité entre le moment cinétique et la vitesse angulaire, alors I_{jk} (pour j, k fixés) donne la composante du moment cinétique dans la direction j pour une vitesse angulaire $\omega_k = 1$ dans la direction k ; donc le premier indice est en relation avec le moment cinétique et le deuxième avec la vitesse angulaire.

Exercice 23 :

(a) Lors d'une contraction, on peut baisser l'indice de sommation supérieur si l'on monte en même temps l'indice de sommation inférieur. Montrer par exemple que

$$T^{ijk}_{\ j} = T^i{}^k{}_j.$$

(b) Prenons un tenseur T_{ℓ}^{ijk} de rang 4, pour le cas $n = 2$ et dont les composantes sont données par :

$$T_{\ 1}^{111} = 1; T_{\ 1}^{121} = 2; T_{\ 2}^{111} = 3; T_{\ 2}^{121} = 4$$

et les autres = 0.

(i) Calculer $T^{ijk}_{\ j}$.

(ii) Calculer $T_{\ell}^i{}^k{}_j$ avec

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(iii) Démontrer que $T^{ijk}_{\ j} = T^i{}^k{}_j$.

Exercice 24 (Contraction sur des indices du même type) :

L'existence d'une métrique permet maintenant de définir une opération de \mathcal{T}_q^p dans \mathcal{T}_q^{p-2} ou dans \mathcal{T}_q^{p-2} . Pour ceci, il suffit d'abord de descendre, resp. de monter, un des indices. Par exemple, si $T \in \mathcal{T}_2^0$, vérifier que

$$T_i^i = g^{ik} T_{ik}$$

est un scalaire.

2.3.3 L'espace euclidien 3-dimensionnel \mathbb{R}^3

C'est le cas où la matrice (2.34) est la matrice identité et $n = 3$ (donc $n_+ = n = 3, n_- = 0$). Il existe donc une base distinguée $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ (appelée "base canonique") telle que

$$g_{jk} = G(\underline{e}_j, \underline{e}_k) = \delta_{jk} .$$

Cette métrique est définie positive. Si $x = x^k \underline{e}_k$ et $y = y^k \underline{e}_k$ sont deux vecteurs (contravariants), on vérifie que le produit scalaire $x \cdot y$ usuel (utilisé depuis le collège) correspond bien à un tenseur du type $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire à un scalaire. En effet

$$x \cdot y \equiv \sum_{k=1}^3 x^k y^k = \delta_{jk} x^j y^k = g_{jk} x^j y^k \equiv (x, y)$$

où nous avons utilisé la forme particulière de \mathbf{g} dans la base canonique.

Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de \mathbb{R}^3 , on trouve alors que

$$g_{jk} = e_j \cdot e_k .$$

Deux vecteurs x, y sont *orthogonaux* si $x \cdot y = 0$. Une base *orthonormée* $\{e_1, e_2, e_3\}$ est formée de 3 vecteurs e_1, e_2, e_3 de norme 1 et deux à deux orthogonaux : $e_j \cdot e_k = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, 2, 3$).

Exercice 25 :

(a) La base canonique $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . Montrer que la base duale $\{\underline{e}^{*j}\}$ est identique avec les vecteurs de \mathcal{V}^* obtenus en agissant avec φ sur les vecteurs de la base canonique :

$$\varphi(\underline{e}_j) = \underline{e}^{*j} \quad (j = 1, 2, 3) .$$

(b) Ecrire la matrice $\{g_{jk}\}$ du tenseur métrique (i) dans une base orthonormée arbitraire, (ii) dans la base $e_1 = (2, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (1, 0, 3)$.

(c) Dans une base orthonormée (en particulier dans la base canonique), vérifier que les composantes covariantes d'un vecteur x sont identiques avec ses composantes contravariantes.

(d) Déterminer la matrice $\{g^{jk}\}$ donnant les composantes contravariantes du tenseur métrique (i) dans une base orthonormée, (ii) dans la base introduite sous (b,ii).

(e) Interpréter le tenseur $T_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$ (x, y étant des vecteurs).

(f) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ les composantes covariantes d'un tenseur T d'ordre 2 dans une base orthonormée. Déterminer les composantes contravariantes de T par rapport à la même base.

2.3.4 L'espace de Minkowski \mathbb{M}

On prend $n = 4$ et choisit pour la matrice dans (2.34) la matrice suivante ($n_+ = 3, n_- = 1$) :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

(Certains auteurs préfèrent le négatif de cette matrice). Il est usuel de désigner les indices par des lettres grecques et les quatre composantes d'un vecteur par $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Un espace vectoriel 4-dimensionnel muni de cette (pseudo-)métrique est appelé *espace de Minkowski* ou *espace-temps*. On interprète les composantes covariantes x_μ d'un vecteur x comme $x_0 = ct, (x_1, x_2, x_3) =$ les coordonnées spatiales d'un événement ($c =$ vitesse de la lumière, $t =$ temps).

Dans l'espace euclidien, les bases orthonormées forment une classe de bases distinguées. L'analogue ici sont les *bases de Minkowski*, c'est-à-dire les bases $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ dans lesquelles le tenseur métrique prend la forme (2.46) :

$$g_{\mu\nu} = G(e_\mu, e_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2 \text{ ou } 3, \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 0. \end{cases}$$

Dans une base de Minkowski, le produit scalaire de deux vecteurs x, y s'écrit

$$(x, y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3.$$

Exercice 26 :

(a) Soit $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ une base de Minkowski. Exprimer les éléments de la base $\{\varphi(e_\mu)\}$ en terme de la base duale $\{e^{*\nu}\}$ et calculer les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique. Etablir la relation entre les composantes contravariantes x^μ et les composantes covariantes x_μ d'un vecteur x dans une telle base.

(b) Soit $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ et $\{\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ deux bases de Minkowski. Désignons par $\Lambda = \{\Lambda_\mu^\nu\}$ la matrice reliant ces deux bases, donc $\tilde{e}_\mu = \Lambda_\mu^\nu e_\nu$ et par conséquent $\tilde{x}_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$. Si g est la matrice (2.46) :

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que

$$\Lambda g \Lambda^T = g, \quad \text{ou } \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma}. \quad (2.47)$$

Les matrices Λ satisfaisant (2.47) sont les *transformations de Lorentz*.

A chaque $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ on peut associer un vecteur Λx en posant $(\Lambda x)_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$. Il est clair que $(\Lambda x)_\mu \equiv \tilde{x}_\mu$ sont les composantes covariantes du vecteur x dans la base $\{\tilde{e}_\nu\}$; en particulier on a $\tilde{x}_\mu \tilde{y}^\mu = x_\mu y^\mu$.

Attention : Une matrice $\Lambda = \{\Lambda_\mu^\nu\}$ décrit le passage entre deux bases et ne définit pas un tenseur (voir page 14).

(c) Soit Λ une transformation de Lorentz. Montrer que

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (\Lambda_0^0)^2 \geq 1.$$

Ceci donne une classification des transformations de Lorentz :

- | | |
|---|--|
| (1) $\det \Lambda = +1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1$ | (2) $\det \Lambda = +1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1$ |
| (3) $\det \Lambda = -1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1$ | (4) $\det \Lambda = -1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1$ |

Pour chaque classe, donner comme exemple une matrice Λ diagonale (les entrées dans la diagonale étant $+1$ ou -1) et interpréter leur signification dans l'espace-temps.

Déterminer également la classe d'un *boost* (appelé parfois une "accélération")

$$\Lambda(\chi) = \begin{pmatrix} \text{Ch } \chi & -\text{Sh } \chi & 0 & 0 \\ -\text{Sh } \chi & \text{Ch } \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\chi \in \mathbb{R}).$$

Poser $\beta \equiv v/c = \text{Th } \chi$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ et calculer l'action de $\Lambda(\chi)$ sur un quadri-vecteur (x_0, x_1, x_2, x_3) .

(d) Indiquer comment $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (Exercice 15) se transforme sous une transformation de Lorentz. Pour quelles classes de transformations de Lorentz cette loi de transformation coïncide-t-elle avec celle d'un tenseur ?

Classification des vecteurs de l'espace-temps

— vecteurs du genre espace : $x_\mu x^\mu \equiv -(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 > 0$

— vecteurs du genre temps : $x_\mu x^\mu < 0$

— vecteurs du genre lumière : $x_\mu x^\mu = 0$.

Si deux événements, caractérisés par des vecteurs x et y , sont tels que $x-y$ est du genre lumière, on peut les relier par un signal de lumière (si par exemple $x_0 > y_0$, on peut envoyer un signal au point (y_1, y_2, y_3) au temps $t = y_0/c$, et celui-ci sera reçu au point (x_1, x_2, x_3) au temps $\tau = x_0/c$).

2.4 Champs de tenseurs

On considère un ensemble de points Ω n -dimensionnel (ici Ω sera un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n , dans des théories plus générales on prend pour Ω une "variété différentiable" de dimension n). Essentiellement un *champ de tenseurs* du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ consiste en la donnée, en chaque point P de Ω , d'un tenseur $T(P)$ du type $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ sur un espace vectoriel \mathcal{V} de la même dimension n^3 . C'est donc une application de Ω dans \mathcal{T}_q^p . Nous allons préciser cela à l'aide d'exemples.

Un *système de coordonnées* \mathcal{K} pour Ω est formé d'une origine O et de n vecteurs linéairement indépendants e_1, \dots, e_n (les représentations graphiques qui suivent sont pour $n = 2$). Les n vecteurs forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^n$. Un point P dans Ω détermine un vecteur \overrightarrow{OP} : les coordonnées x_P^1, \dots, x_P^n de P dans le système de coordonnées \mathcal{K} sont les nombres déterminés par la relation

$$\overrightarrow{OP} = x_P^1 e_1 + x_P^2 e_2 + \dots + x_P^n e_n = x_P^j e_j.$$

Soit $\tilde{\mathcal{K}} = (\tilde{O}, \{\tilde{e}_i\})$ un deuxième système de coordonnées pour Ω (origine \tilde{O} , base $\{\tilde{e}_i\}$). Alors

$$\overrightarrow{\tilde{O}P} = \tilde{x}_P^1 \tilde{e}_1 + \dots + \tilde{x}_P^n \tilde{e}_n = \tilde{x}_P^j \tilde{e}_j,$$

les nombres $\tilde{x}_P^1, \dots, \tilde{x}_P^n$ sont les coordonnées du point P dans le système de coordonnées $\tilde{\mathcal{K}}$.

3. La condition que Ω et \mathcal{V} doivent avoir la même dimension est nécessaire (sauf pour des champs scalaires) puisqu'on exige une relation entre la loi de transformation tensorielle et les changements de variables entre coordonnées utilisées pour paramétrer les points de Ω .

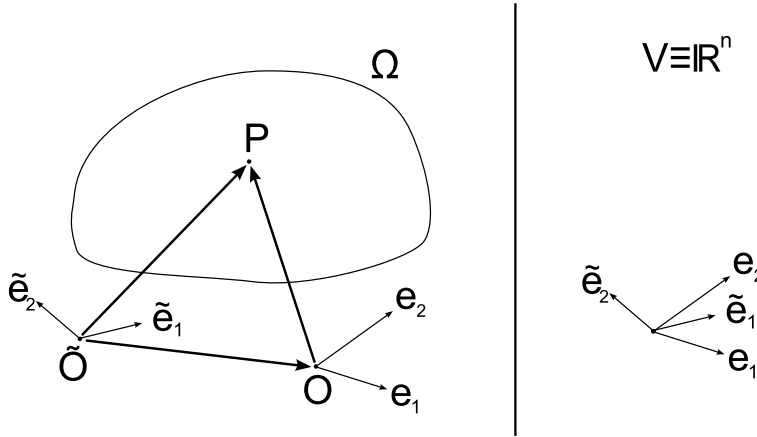


Figure 1

Nous écrivons \tilde{b}^i pour les coordonnées de l'origine O de \mathcal{K} dans le système $\tilde{\mathcal{K}}$:

$$\overrightarrow{\tilde{O}O} = \tilde{b}^i \tilde{e}_i .$$

Nous désignons par α la matrice donnant le changement de base $\{e_j\} \rightarrow \{\tilde{e}_j\}$ de \mathcal{V} : $\tilde{e}_j = \alpha_j^k e_k$.

Calculons la relation entre les nombres x_P^i et les nombres \tilde{x}_P^k :

$$\overrightarrow{\tilde{O}P} = \tilde{x}_P^i \tilde{e}_i = \overrightarrow{\tilde{O}O} + \overrightarrow{OP} = \tilde{b}^i \tilde{e}_i + x_P^k e_k ,$$

ou

$$(\tilde{x}_P^i - \tilde{b}^i) \alpha_i^k e_k = x_P^k e_k .$$

Ainsi

$$(\tilde{x}_P^i - \tilde{b}^i) \alpha_i^k = x_P^k$$

ou, après multiplication par la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$:

$$(\tilde{x}_P^i - \tilde{b}^i) \alpha_i^k \beta_k^j = \beta_k^j x_P^k .$$

Donc (puisque $\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_i^j$) :

$$\tilde{x}_P^j = \beta_k^j x_P^k + \tilde{b}^j . \quad (2.48)$$

A part la constante \tilde{b}^j (elle ne dépend pas du point P), les coordonnées du point P se transforment comme les composantes contravariantes d'un vecteur !

Un *champ scalaire* sur Ω est une application $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si P est un point de Ω , $F(P)$ est la valeur de F en P . Dans un système de coordonnées \mathcal{K} pour Ω , P est décrit par les nombres x_P^1, \dots, x_P^n , et on écrira $F(P) = f(x_P^1, \dots, x_P^n)$: on peut considérer F comme une fonction f définie sur une partie $\Omega_{\mathcal{K}}$ de \mathbb{R}^n , où $\Omega_{\mathcal{K}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^i e_i \in \Omega\}$. De même, dans un autre système de coordonnées $\tilde{\mathcal{K}}$ pour Ω , on peut considérer F comme une fonction \tilde{f} définie sur $\Omega_{\tilde{\mathcal{K}}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{x}^i \tilde{e}_i \in \Omega\}$: $F(P) = \tilde{f}(\tilde{x}_P^1, \dots, \tilde{x}_P^n)$. Il est clair que l'on doit avoir

$$f(x_P^1, \dots, x_P^n) = \tilde{f}(\tilde{x}_P^1, \dots, \tilde{x}_P^n) ,$$

car chaque membre est égal à la valeur $F(P)$ de F en P .

Il est clair que, si x varie sur $\Omega_{\mathcal{K}}$, alors $x^i e_i$ varie sur Ω , c'est-à-dire que chaque $x \in \Omega_{\mathcal{K}}$ décrit un point P de Ω . Il est donc naturel d'écrire simplement x pour les coordonnées (x_P^1, \dots, x_P^n) de P . Nous adoptons cette convention pour la suite ; de même, nous écrirons \tilde{x} ($\tilde{x} \in \Omega_{\tilde{\mathcal{K}}}$) pour $(\tilde{x}_P^1, \dots, \tilde{x}_P^n)$. Avec cette convention, on aura

$$f(x) = \tilde{f}(\tilde{x}) . \quad (2.49)$$

Dans (2.49), et dans toutes les équations similaires rencontrées dans la suite, il est sous-entendu que x et \tilde{x} décrivent le *même* point de Ω , c'est-à-dire que (cf. (2.48)) :

$$\tilde{x}^j = \beta^j_k x^k + \tilde{b}^j . \quad (2.50)$$

Un *champ de vecteurs contravariants* sur Ω est décrit par la donnée, dans chaque point P de Ω , d'un élément $T(P)$ de \mathcal{V} . Désignons par $T^i(P)$, resp. $\tilde{T}^i(P)$, les composantes de $T(P)$ dans la base $\{e_j\}$, resp. $\{\tilde{e}_j\}$:

$$T(P) = T^i(P)e_i = \tilde{T}^j(P)\tilde{e}_j .$$

Pour i fixé, T^i est une fonction $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on peut à nouveau considérer comme une fonction définie sur $\Omega_{\mathcal{K}}$; nous désignons cette fonction également par T^i , donc $T^i(P) = T^i(x) \equiv T^i(x^1_P, \dots, x^n_P)$. De même $\tilde{T}^i(P) = \tilde{T}^i(\tilde{x}) \equiv \tilde{T}^i(\tilde{x}^1_P, \dots, \tilde{x}^n_P)$, où \tilde{T}^i est une fonction définie sur $\Omega_{\tilde{\mathcal{K}}}$. Si x et \tilde{x} décrivent le même point, comme dans (2.50), on aura

$$T(P) = T^k(x)e_k = \tilde{T}^i(\tilde{x})\tilde{e}_i = \tilde{T}^i(\tilde{x})\alpha_i^k e_k ,$$

donc

$$T^k(x) = \tilde{T}^i(\tilde{x})\alpha_i^k$$

ou, après multiplication par la matrice β :

$$\tilde{T}^j(\tilde{x}) = \beta^j_k T^k(x) .$$

Similairement, un *champ de vecteurs covariants* sur Ω est, pour chaque $P \in \Omega$, une application linéaire $T(P) : \mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Comme ci-dessus, on écrit $T_j(x)$, resp. $\tilde{T}_j(\tilde{x})$, pour ses composantes qui satisfont

$$\tilde{T}_j(\tilde{x}) = \alpha_j^k T_k(x) .$$

Considérons par exemple encore un *champ de tenseurs covariants d'ordre 2* : pour chaque $P \in \Omega$ on a une application bilinéaire $T(P) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. On désigne par $T_{jk}(P)$, resp. $\tilde{T}_{jk}(P)$, ses composantes dans la base $\{e_j\}$, resp. $\{\tilde{e}_j\}$:

$$T_{jk}(P) = T(P)(e_j, e_k) , \quad \tilde{T}_{jk}(P) = T(P)(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) .$$

Donc

$$T(P) = T_{jk}(P)e^{*j} \otimes e^{*k} = \tilde{T}_{jk}(P)\tilde{e}^{*j} \otimes \tilde{e}^{*k} \quad (2.51)$$

$$= T_{jk}(x)e^{*j} \otimes e^{*k} = \tilde{T}_{jk}(\tilde{x})\tilde{e}^{*j} \otimes \tilde{e}^{*k} \quad (2.52)$$

(à nouveau, pour j et k fixé, on a identifié $T_{jk}(P)$ avec une fonction $T_{jk}(x)$ définie sur $\Omega_{\mathcal{K}}$ et $\tilde{T}_{jk}(P)$ avec une fonction $\tilde{T}_{jk}(\tilde{x})$ définie sur $\Omega_{\tilde{\mathcal{K}}}$). Dans ce cas on a la loi de transformation

$$\tilde{T}_{jk}(\tilde{x}) = \alpha_j^i \alpha_k^\ell T_{i\ell}(x)$$

si x et \tilde{x} décrivent le même point de Ω .

Dorénavant nous supposons que les composantes des champs de tenseurs soient différentiables (en tant que fonctions de x , resp. \tilde{x}). Nous désignons par

$$\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{resp.} \quad \tilde{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}$$

les opérations de différentiation agissant sur ses composantes.

Exercice 27 (Gradient d'un champ scalaire) :

(a) Soit F un champ scalaire, donné par la fonction f (resp. \tilde{f}) dans le système de coordonnées \mathcal{K} (resp. $\tilde{\mathcal{K}}$). Montrer que les fonctions $\partial_k f$ se transforment comme les composantes d'un champ de vecteurs covariants, c'est-à-dire que

$$(\tilde{\partial}_j \tilde{f})(\tilde{x}) \equiv \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j} = \alpha_j^k (\partial_k f)(x) \equiv \alpha_j^k \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}.$$

\implies Les dérivées $\partial_k f$ définissent, en chaque point P de Ω , un vecteur covariant qui est souvent désigné par $dF(P)$. Donc $dF(P)$ est une application linéaire $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, dans chaque base $\{e_i\}$ de \mathcal{V} :

$$\langle dF(P), v \rangle = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} v^k, \quad \text{si } v = v^k e_k$$

et x désigne les coordonnées du point P dans \mathcal{K} . $\langle dF(P), v \rangle$ représente la "dérivée de F au point P le long de v ". Si par exemple $v = e_i$: $\langle dF(P), e_i \rangle = \partial f(x) / \partial x^i$. Lorsque P varie sur Ω , les applications $dF(P)$ définissent un champ de vecteurs covariants que l'on désigne par dF .

(b) Soit $F = \Psi\Phi$ le produit de deux champs scalaires Ψ, Φ sur Ω . Vérifier la règle du produit pour l'opération $d : T_0^0(\Omega) \rightarrow T_1^0(\Omega)$ introduite ci-dessus :

$$d(\Psi\Phi) = \Psi \otimes d\Phi + \Phi \otimes d\Psi$$

(produit de tenseurs dans le membre de droite).

Exercice 28 (Dérivée d'un champ de vecteurs. Divergence) :

(a) Soit T un champ de vecteurs contravariants :

$$T(P) = T^i(x)e_i = \tilde{T}^i(\tilde{x})\tilde{e}_i.$$

Montrer que les dérivées $S_j^k = \partial_j T^k$ définissent un champ de tenseurs du type $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (désigné par dT).

Conséquence : la *divergence* de T , c'est-à-dire le champ donné par $\partial_j T^j$, est un champ scalaire.

(b) Si G est un tenseur métrique sur $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^n$, on peut définir l'opération $\Delta = \partial_i \partial^i \equiv g^{ik} \partial_i \partial_k$. Si F est un champ scalaire, décrire les propriétés de ΔF (défini par $\partial_i \partial^i f$ dans le système de coordonnées \mathcal{K}).

Attention : Dans les considérations qui précèdent nous nous sommes restreints à des *coordonnées rectilignes* pour Ω : si on fixe les valeurs de $n-1$ coordonnées et varie les valeurs de la coordonnée non-fixée, on obtient l'intersection de Ω avec une ligne droite, donc les *lignes de coordonnées* sont des (morceaux de) droites (voir l'exemple de la droite $x^1 = a$, dans le cas $n = 2$, indiqué dans la Figure 2).

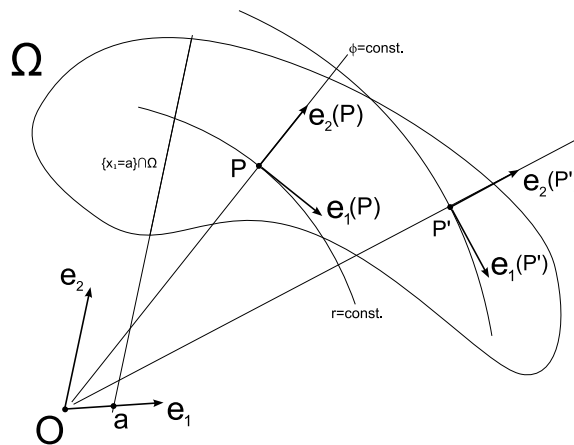


Figure 2

On peut utiliser des coordonnées pour Ω n'ayant pas cette propriété (*coordonnées curvilignes*, certaines – ou toutes – les lignes de coordonnées étant courbes). Comme exemple, considérons dans le cas $n = 2$ des coordonnées polaires (avec origine O). Les courbes $\varphi = \text{const.}$ sont toujours des lignes droites, mais les courbes $r = \text{const.}$ sont des cercles. Un champ défini sur Ω peut également être considéré comme fonction de coordonnées curvilignes (une fonction de r et φ dans l'exemple précité).

En coordonnées rectilignes, chaque ligne de coordonnées passant par un point P de Ω est une droite parallèle à la direction définie par un des vecteurs de la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ choisie. Autrement dit, les directions des vecteurs de base sont déterminées par la direction des lignes de coordonnées en P , et ne dépendent pas du point P . En coordonnées curvilignes, les directions des lignes de coordonnées dépendent du point P (c'est évident dans l'exemple considéré dans la Figure 2) : on peut introduire une *base locale* (une base en chaque P) en prenant des vecteurs $e_1(P), \dots, e_n(P)$ (dépendant de P) dont les directions sont déterminées par les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées au point P (dans la Figure 2 nous avons indiqué des bases locales correspondant à des coordonnées polaires en deux points P et P').

Le Jacobien $\partial\tilde{x}^j/\partial x^k$ pour le changement entre deux systèmes de coordonnées rectilignes est constant sur Ω : $\partial\tilde{x}^j/\partial x^k = \beta_k^j$ d'après (2.50). En coordonnées curvilignes le Jacobien dépendra du point P de Ω , c'est-à-dire les matrices α et β deviennent des fonctions de P . La loi de transformation d'un champ de tenseurs fait alors intervenir, en chaque point P de Ω , les matrices α et β dans ce point ; par exemple pour un champ de tenseurs du type $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\tilde{T}_{jk}^i(\tilde{x}) = \frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial\tilde{x}^k} T_{mr}^\ell(x),$$

où à nouveau x et \tilde{x} désignent les coordonnées du même point P et les Jacobiens $\partial\tilde{x}^j/\partial x^k$ et $\partial x^j/\partial\tilde{x}^k$ pour les changements de coordonnées $x \mapsto \tilde{x}$ (resp. $\tilde{x} \mapsto x$) sont évalués en ce point P .

En coordonnées curvilignes l'opération de différenciation ∂_i n'a plus une loi de transformation tensorielle (parce qu'elle agit également sur les facteurs α et β dans les lois de transformation, et ici les dérivées de ces facteurs ne s'annulent plus). Donc par exemple si T_i sont les composantes d'un champ de vecteurs covariants, alors $\partial_k T_i$ ne se transforme pas comme les composantes d'un tenseur. On peut remédier à cette situation en introduisant une modification de l'opération de différenciation, appelée la *dérivée covariante* ∇_μ . Nous n'entrons pas dans les détails. Rajoutons par contre qu'un problème similaire apparaît dans un espace vectoriel muni d'une métrique non-constante (donc dépendante de P), comme c'est le cas en relativité générale.

Quelques références

Textes simples

- G. Arfken : *Mathematical Methods for Physicists*, Chapitre 3.
- J. Hladik : *Le calcul tensoriel en physique* (Masson 1993).
- A.I. Borisenko et I.E. Tarapov : *Vector and Tensor Analysis with Applications*.
- W. Flügge : *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*.
- A. Delachet, *Calcul vectoriel et tensoriel* (Presses universitaires de France 1960).
- A.N. Srivastava : *Tensor Calculus, Theory and Problems*.
- C. Jeanperrin : *Initiation progressive au calcul tensoriel* (Ellipses 1987).

Textes plus complets ou plus mathématiques

- H.J. Dirschmid : *Tensoren und Felder* (Springer 1996).
- I.S. Sokolnikoff : *Tensor Analysis : Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*.
- L. Brillouin : *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*.
- L. Schwartz : *Les tenseurs* (Hermann 1975).
- R. Deheuvels : *Tenseurs et spineurs* (Presses universitaires de France 1993).

Chapitre 3

La fonction δ de Dirac et les distributions

3.1 Motivation

En électrostatique une charge e positionnée au point $y = 0 \in \mathbb{R}^3$ engendre un potentiel électrostatique

$$\phi_P(x) = \frac{ke}{|x|}.$$

Cela peut être généralisé à une distribution continue de charge, ρ , qui engendre un potentiel

$$\phi_C(x) = k \int d^3y \frac{\rho(y)}{|x-y|}. \quad (3.1)$$

Si l'on pouvait définir une "fonction" δ avec les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \delta(x) &= 0 \quad \text{si } x \neq 0 \\ \int_{\mathbb{R}^3} \delta(y) f(x-y) d^3y &= f(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

on aurait l'expression (3.1) avec ρ remplacé par $e\delta$ pour une charge ponctuelle.

Imaginons donc que δ soit une fonction définie sur \mathbb{R} qui vaut zéro en tout point $x \neq 0$ et infini au point $x = 0$, l'infinité étant si grande que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$. Une telle fonction n'existe pas (c'est pourquoi nous l'appelons la "fonction" δ). Dans la façon usuelle de définir une intégrale (par exemple l'intégrale de Lebesgue), si f est une fonction telle que $f(x) = 0 \forall x \neq 0$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$. Pour donner un sens à un objet δ vérifiant (3.2), il faut généraliser la notion de fonction ; on parle alors de *fonctions généralisées* ou de *distributions*.

Conséquences des propriétés (3.2)

(a) Si $\varepsilon > 0$, alors

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1. \quad (3.3)$$

(b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Comme

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x),$$

on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = f(0).$$

Pour que cela ait un sens, il faut que la valeur de f au point $x = 0$ soit raisonnablement définie, ce qui est certainement le cas si f est continue à l'origine. Donc

$$f \text{ continue à l'origine} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0). \quad (3.4)$$

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Alors pour toute fonction continue f (en posant $y = x - a$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+a)\delta(y)dy = f(0+a) = f(a).$$

Donc

$$f \text{ continue} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a). \quad (3.5)$$

L'équation (3.4) montre que δ associe à chaque fonction continue un nombre. Cette idée est à la base de la théorie des distributions. Pour des raisons qui deviendront claires un peu plus loin, on se limite à une classe restreinte de fonctions continues, appelées des *fonctions test* ; ce sont des fonctions infiniment différentiables et convergeant très rapidement vers zéro à l'infini. L'ensemble des fonctions test forme un espace vectoriel linéaire (sur le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} par exemple) qui est muni d'une topologie (une notion de convergence). Une *distribution* est une application linéaire continue de l'espace des fonctions test dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; ainsi une distribution associe à chaque fonction test un nombre (par exemple la distribution δ associe à chaque fonction test f sa valeur $f(0)$ au point $x = 0$). Il est souvent pratique de calculer formellement avec la "fonction" δ , en utilisant les formules qui seront données dans ce texte ; pourtant, si l'on veut donner des dérivations mathématiquement correctes, il faut se placer dans le cadre de la théorie des distributions.

3.2 L'espace de fonctions test \mathcal{S} (espace de Schwartz)

Cet espace est formé de l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

- (i) f est infiniment différentiable ($\equiv f \in \mathcal{C}^\infty$),
- (ii) f est à décroissance rapide, c'est-à-dire pour tout $m = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m |f(x)| < \infty, \quad (3.6)$$

- (iii) toutes les dérivées de f sont à décroissance rapide, c'est-à-dire $\forall \ell = 0, 1, 2, \dots$ et $\forall m = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^m \left| \frac{d^\ell f(x)}{dx^\ell} \right| < \infty. \quad (3.7)$$

Notion de convergence dans \mathcal{S}

Une suite $\{f_n\}$ appartenant à \mathcal{S} converge vers zéro dans \mathcal{S} si, $\forall \ell = 0, 1, 2, \dots$ et $\forall m = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \frac{d^\ell f_n(x)}{dx^\ell} \right| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

(convergence uniforme de $x^m f_n^{(\ell)}(x)$ vers zéro, pour tout ℓ, m fixés).

Exercice 1 (Exemples de fonctions test (fonctions gaussiennes)) :

Soit $\alpha > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ des nombres réels fixés.

- (a) Montrer que la fonction $f(x) = \exp[-\alpha(x-a)^2]$ appartient à \mathcal{S} .

Indication : Montrer par induction que les dérivées $f^{(\ell)}$ de f sont de la forme $f^{(\ell)}(x) = P_\ell(x) \exp[-\alpha(x-a)^2]$, où P_ℓ est un polynôme d'ordre $\leq \ell$.

- (b) Vérifier que la suite $\{f_n\}$ définie par $f_n(x) = 1/n \cdot \exp[-\alpha(x-a)^2]$ converge vers zéro dans \mathcal{S} .
- (c) Est-ce que la fonction $g(x) = (1+x^2)^{-25}$ appartient à \mathcal{S} ?

3.3 Les distributions sur \mathcal{S}

Les distributions définies sur \mathcal{S} sont appelées des *distributions tempérées*. L'espace des distributions tempérées est noté \mathcal{S}' . (Il est l'espace dual de \mathcal{S} .) Comme nous n'allons pas traiter d'autres espaces de fonctions test, nous les appellerons simplement des distributions. Donc une *distribution* T associée à chaque fonction $f \in \mathcal{S}$ un nombre complexe $T(f)$ de telle façon que :

- (i) $T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 T(f_1) + \alpha_2 T(f_2)$ si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$, (*linéarité*)
(ii) si $\{f_n\} \in \mathcal{S}$ est une suite qui converge vers zéro dans \mathcal{S} , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(f_n) = 0. \text{ (continuité)}$$

Certaines distributions particulières (par exemple la distribution de Dirac) seront désignées par un autre symbole que la lettre T .

Exercice 2 (La distribution δ de Dirac) :

La distribution δ de Dirac est définie par $\delta(f) = f(0)$ pour $f \in \mathcal{S}$. Montrer que ceci définit bien une distribution (en d'autres termes vérifier la linéarité et la continuité de δ).

Exercice 3 (Fonctions interprétées comme distributions) :

Si $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction raisonnable, on peut lui associer une distribution T_θ en posant, pour $f \in \mathcal{S}$:

$$T_\theta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta(x)dx. \quad (3.9)$$

Montrer que ceci définit bien une distribution en supposant que θ soit continue (ou continue par morceaux. Cette hypothèse est faite seulement afin de pouvoir interpréter l'intégrale dans (3.9) dans le sens de Riemann.) et que θ ne croisse pas trop vite à l'infini, plus précisément qu'il existe des constantes $c > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ telles que

$$|\theta(x)| \leq c(1 + |x|)^M \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

3.4 Opérations sur les distributions I

(a) Addition de distributions

Si T_1, T_2 sont des distributions, leur somme $T_1 + T_2$ est la distribution définie par

$$(T_1 + T_2)(f) = T_1(f) + T_2(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

(b) Limite d'une suite de distributions

Si $\{T_n\}$ est une suite de distributions, on dit que T_n converge vers T au sens des distributions si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f) = T(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}. \quad (3.11)$$

D'autres opérations intéressantes seront traitées plus loin.

Exercice 4 (Convergence de fonctions) :

(a) Soit $\{\theta_n\}$ une suite de fonctions continues, bornées telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x) = \theta(x)$ uniformément en x (ce qui entraîne que θ est continue et bornée). Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\theta_n}(f) = T_\theta(f)$ pour tout $f \in \mathcal{S}$, c'est-à-dire que la suite $\{\theta_n\}$ converge vers θ également au sens des distributions.

Remarque : On peut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\theta_n}(f) = T_\theta(f)$ sous des hypothèses plus faibles que la convergence uniforme des fonctions θ_n vers θ . La suite $\{\theta_n\}$ traitée dans l'exemple suivant ne satisfait pas ces hypothèses mais possède néanmoins une limite au sens des distributions ; cette limite est une distribution mais pas une fonction (c'est-à-dire elle n'est pas de la forme T_θ avec θ une fonction).

(b) Soit $\{\theta_n\}$ la suite donnée par

$$\theta_n(x) = \begin{cases} n/2 & \text{si } -1/n \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } |x| > 1/n, \end{cases}$$

tels que $\int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) dx = 1$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$

(i) Montrer que $\theta_n(x)$ possède une limite (finie ou infinie) pour tout x fixé, et déterminer cette limite. En ne considérant pas le point $x = 0$, est-ce que la convergence est uniforme ou non ?

(ii) Désignons par $\theta(x)$ la limite de $\theta_n(x)$. Si T_θ est défini par (3.9), montrer que T_θ est la distribution identiquement nulle, c'est-à-dire $T_\theta(f) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{S}$.

(iii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\theta_n}(f) = f(0)$ pour tout $f \in \mathcal{S}$.

Conclusion : La suite $\{T_{\theta_n}\}$ converge (au sens des distributions) vers la distribution de Dirac et non pas vers la distribution nulle !

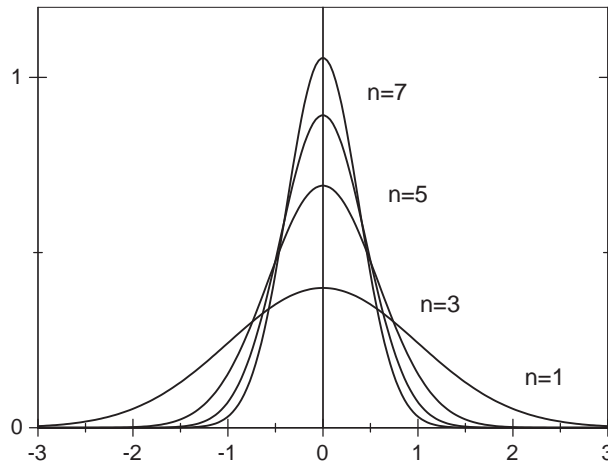
Exercice 5 (Suites de Dirac) :

L'exercice précédent montre que la distribution de Dirac peut être interprétée comme limite (au sens des distributions !) d'une suite de fonctions. Une suite de fonctions qui converge (au sens des distributions) vers δ est appelée une *suite de Dirac* ;

Une autre suite de Dirac souvent utilisée est celle obtenue en prenant

$$\theta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-(nx)^2/2}.$$

C'est une suite de Dirac gaussienne :



Le but du présent exercice est de généraliser l'idée de suites de Dirac.

(a) Soit $\theta_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $\theta_1(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(x) dx = 1$. Soit θ_n défini par $\theta_n(x) = n\theta_1(nx)$.

(i) Vérifier que $\int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) dx = 1$ pour tout n et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \theta_n(x) dx = 1 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

(donc θ_n est concentrée au voisinage du point $x = 0$ lorsque n est grand).

(ii) Montrer que $\{\theta_n\}$ est une suite de Dirac, en d'autres termes que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \theta_n(x) dx = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}. \quad (3.12)$$

Remarque : La relation (3.12) est souvent exprimée formellement comme suit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x) = \delta(x) .$$

(b) Montrer que

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} . \quad (3.13)$$

Indication : Se ramener à une suite de Dirac en posant $\varepsilon = 1/n$.

Exercice 6 (Propriétés de la distribution de Dirac) :

Quelques propriétés utiles de la “fonction” δ peuvent être obtenues en la considérant comme la limite d’une suite de Dirac. On utilisera la distribution δ translatée $\delta(x - a)$, définie comme

$$\delta(x - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(x - a) .$$

(a) Montrer que, si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, alors

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) . \quad (3.14)$$

Plus précisément :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \theta_n(ax) dx = \frac{1}{|a|} f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S} .$$

Cas particulier $a = -1$:

$$\delta(-x) = \delta(x) . \quad (3.15)$$

(b) Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et n’ayant qu’un nombre fini de zéros qui sont tous simples (en d’autres termes il n’y a qu’un nombre fini x_1, \dots, x_N de points où $\psi(x) = 0$, et $\psi'(x_k) \neq 0$ pour $k = 1, \dots, N$). Alors

$$\delta(\psi(x)) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{|\psi'(x_k)|} \delta(x - x_k) . \quad (3.16)$$

Indication : Se ramener à (3.14) en utilisant un développement de Taylor de ψ au voisinage des points x_k .

3.5 Opérations sur les distributions II

Supposons que $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ soit une application linéaire continue de l’espace de Schwartz \mathcal{S} dans lui-même. Donc :

- (i) A chaque $f \in \mathcal{S}$ est associé une fonction $\Psi(f)$ appartenant à \mathcal{S} ,
- (ii) $\Psi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \Psi(f_1) + \alpha_2 \Psi(f_2)$ (linéarité de Ψ)
- (iii) Si $\{f_n\} \in \mathcal{S}$ est une suite qui converge vers zéro dans \mathcal{S} , alors la suite $\{\Psi(f_n)\}$ converge également vers zéro dans \mathcal{S} (continuité de Ψ).

Alors on peut associer à chaque distribution T une autre distribution, désignée par $T \circ \Psi$, en posant

$$(T \circ \Psi)(f) = T(\Psi(f)) \quad \text{pour } f \in \mathcal{S} . \quad (3.17)$$

$T \circ \Psi$ n’est rien d’autre que la composition des applications $\Psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ et $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$. A tout $f \in \mathcal{S}$, Ψ associe la fonction $\Psi(f)$ dans \mathcal{S} , et T associe à $\Psi(f)$ le nombre complexe $T(\Psi(f))$.

Vérifions que $T \circ \Psi$ est bien une distribution :

(i) Linéarité de $T \circ \Psi$

Elle s'obtient en utilisant d'abord (3.17), puis la linéarité de Ψ , ensuite la linéarité de T et enfin à nouveau (3.17) :

$$\begin{aligned} (T \circ \Psi)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= T(\Psi(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)) \\ &= T(\alpha_1 \Psi(f_1) + \alpha_2 \Psi(f_2)) = \alpha_1 T(\Psi(f_1)) + \alpha_2 T(\Psi(f_2)) \\ &= \alpha_1 (T \circ \Psi)(f_1) + \alpha_2 (T \circ \Psi)(f_2) . \end{aligned}$$

(ii) Continuité de $T \circ \Psi$

Si $f_n \rightarrow 0$ dans \mathcal{S} , alors $\Psi(f_n) \rightarrow 0$ dans \mathcal{S} par la continuité de Ψ . Donc $T(\Psi(f_n)) \rightarrow 0$ par la continuité de T . Ainsi si $f_n \rightarrow 0$ dans \mathcal{S} , alors $(T \circ \Psi)(f_n) \equiv T(\Psi(f_n)) \rightarrow 0$, ce qui veut dire que l'application $T \circ \Psi$ est continue.

Exercice 7 (Translation d'une distribution) :

Soit a un nombre réel fixé. Prenons pour Ψ l'application suivante

$$(\Psi(f))(x) = f(x + a) \equiv f_{(a)}(x) .$$

Si $f \in \mathcal{S}$, $f_{(a)}$ est une nouvelle fonction dans \mathcal{S} . Ainsi on peut définir, pour toute distribution T , la distribution translatée par a et désignée par $T_{(a)}$ (plutôt que par $T \circ \Psi$) :

$$T_{(a)}(f) = T(f_{(a)}) . \quad (3.18)$$

Comme exemple, déterminer la translatée $\delta_{(a)}$ de la distribution δ de Dirac et la translatée de la distribution T_θ (où θ est une fonction).

Exercice 8 (Multiplication d'une distribution par une fonction lisse) :

Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction infiniment différentiable telle que $Gf \in \mathcal{S}$ pour tout $f \in \mathcal{S}$ et telle que, pour toute suite $\{f_n\} \in \mathcal{S}$ convergeant vers zéro dans \mathcal{S} , la suite $\{Gf_n\}$ converge également vers zéro dans \mathcal{S} . Si on prend pour Ψ la multiplication par G , c'est-à-dire $\Psi(f) = Gf$, ou plus explicitement

$$(\Psi(f))(x) = G(x)f(x) ,$$

et si on désigne la distribution $T \circ \Psi$ par GT , on aura associé à chaque distribution T une nouvelle distribution GT :

$$(GT)(f) = T(Gf) . \quad (3.19)$$

Montrer qu'on peut prendre pour G une fonction test (une fonction de \mathcal{S}) ou un polynôme en x .

Exercice 9 (Différentiation des distributions) :

Prenons pour Ψ l'opération de différentiation :

$$(\Psi f)(x) = f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) .$$

Ψ est linéaire et continue (si $\{f_n\} \in \mathcal{S}$ est une suite telle que $f_n \rightarrow 0$ dans \mathcal{S} , on voit de la définition de la convergence dans \mathcal{S} que $f'_n \rightarrow 0$ dans \mathcal{S}).

La distribution $-T \circ \Psi$ est appelée *la dérivée de la distribution T* et désignée par T' :

$$T'(f) = -T(f') . \quad (3.20)$$

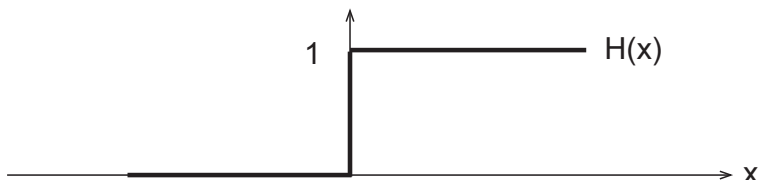
Le signe “ $-$ ” dans (3.20) est choisi de façon à ce que, si θ est une fonction différentiable, la dérivée au sens des distributions soit identique à la dérivée au sens de fonctions, c'est-à-dire tel que

$$(T_\theta)' = T_{\theta'} . \quad (3.21)$$

- (a) Soit G une fonction comme dans l'Exercice 8 et T une distribution. Montrer que $(GT)' = G'T + GT'$, c'est-à-dire qu'on a la règle usuelle pour la dérivée d'un produit.
 (b) Déterminer la dérivée δ' de la distribution de Dirac, c'est-à-dire donner l'expression pour $\delta'(f)$ si $f \in \mathcal{S}$.
 (c) Considérons la fonction de Heaviside H définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La dérivée (usuelle) de H existe pour tout $x \neq 0$ et vaut $H'(x) = 0$ ($x \neq 0$). Au point $x = 0$, H n'est pas



différentiable.

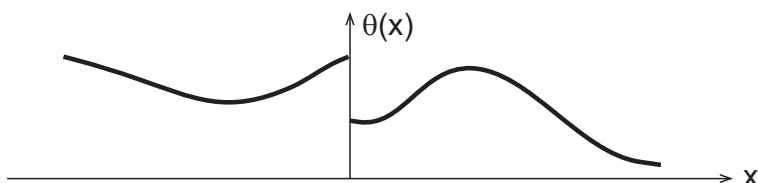
Montrer que la dérivée de H au sens des distributions est la distribution de Dirac :

$$(T_H)' = \delta \quad (3.22)$$

ou formellement

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x). \quad (3.23)$$

- (d) Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continûment différentiable sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$, mais avec une discontinuité en $x = 0$:



Soit $a = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\theta(+\varepsilon) - \theta(-\varepsilon)]$. Désignons par θ' la fonction

$$\theta'(x) = \begin{cases} d\theta(x)/dx & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En supposant $\theta'(x)$ bornée, montrer que, au sens des distributions :

$$(T_\theta)' = a\delta + T_{\theta'} \quad (3.24)$$

(ou formellement : la dérivée de θ est égale à θ' aux points où θ est différentiable et égale à $a\delta$ au point de discontinuité de θ).

3.6 Transformée de Fourier et Convolution

La transformation de Fourier est définie par

$$(\Psi f)(y) \equiv \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx. \quad (3.25)$$

C'est une application linéaire continue de \mathcal{S} dans \mathcal{S} (voir le cours "Analyse II"; c'est relativement évident car la transformée de Fourier de $f^{(\ell)}(x)$ est $(iy)^\ell \hat{f}(y)$ et la transformée de Fourier de $x^m f(x)$ est $i^m \hat{f}^{(m)}(y)$; voir (d)).

Si T est une distribution, alors la distribution $T \circ \Psi$ est désignée par \hat{T} et appelée la *transformée de Fourier de la distribution* T :

$$\hat{T}(f) = T(\hat{f}). \quad (3.26)$$

Pour $T \in \mathcal{S}'$ et $f \in \mathcal{S}$ nous définissons

$$f^-(x) \equiv f(-x), \quad T^-(f) \equiv T(f^-).$$

Il suit que

$$\widehat{f^-} = \hat{f}, \quad \widehat{T^-} = T.$$

Soient $f, g \in \mathcal{S}$, nous définissons la convolution de f avec g par

$$(f * g)(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x)dx.$$

Comme $f * g$ est une fonction, nous devons nous attendre que pour une distribution T , la convolution $T * g$ soit aussi une distribution. Il faut donc le définir par son application sur des fonctions de test. Soit $T \in \mathcal{S}'$ et $f, g \in \mathcal{S}$ nous définissons

$$(T * f)(g) = T(f^- * g) \quad \text{et} \quad (f * T)(g) = T(f^- * g)$$

Remarque : On peut démontrer que $T * f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et qu'il existe un nombre $p \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}$ telle que $|(T * f)(y)| \leq C(1 + |y|^p)$. En particulier, $T * f$ peut être considérée à nouveau comme une distribution de type T_θ .

La convolution d'une distribution avec une fonction peut être définie pour une classe de fonctions beaucoup plus grande que l'espace de Schwartz. Très souvent aussi la convolution d'une distribution avec une autre distribution est bien définie. On peut, par exemple, démontrer que $\delta * \delta = \delta$. Un théorème plus général (dont on peut trouver la démonstration dans les références mentionnées à la fin de ce chapitre) : Si une des deux distributions T et S a un support borné, $T * S$ est bien définie.

Exercice 10 (Transformée de Fourier d'une distribution) :

(a) Déterminer la transformée de Fourier de $\delta_{(a)}$ (voir Exercice 7).

Conclusion : La transformée de Fourier de δ et de $\delta_{(a)}$ est une *distribution* : $\widehat{\delta_{(a)}} = T_\theta$ pour une certaine fonction θ . Quelle est cette fonction ?

(b) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction 1 au sens des distributions, ou la fonction 1 agit comme distribution selon

$$1(g) = \int_{-\infty}^{\infty} 1g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$$

(c) Dériver les équations suivantes pour $f \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}'$:

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(p) &= ip\hat{f}(p), & (\hat{f})' &= -iI\hat{f}, \\ \widehat{T'} &= iIT, & (\hat{T})' &= -iI\hat{T} \end{aligned}$$

où I est la fonction identité.

Exercice 11 (Convolution) :

(a) Démontrer que $f * g = g * f$.

(b) Vérifier que pour une fonction lisse θ , telle que T_θ existe, la définition de la convolution pour les distributions est consistant avec la définition de la convolution pour des fonctions. Utiliser $T_\theta * f = T_{\theta * f}$.

(c) Soient $f, g \in \mathcal{S}$ et $T \in \mathcal{S}'$. Dériver les équations suivantes (où par commodité on a utilisé \cdot pour le produit usuel) :

$$(i) \widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

$$(ii) \widehat{f \cdot g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}.$$

$$(iii) \widehat{T * g} = \sqrt{2\pi} \hat{g} \cdot \hat{T}.$$

$$(iv) \widehat{g \cdot T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{T} * \hat{g}.$$

(d) Montrer que $\delta * f = f$ au sens des distributions.

3.7 Distributions en n dimensions

La théorie des distributions en n dimensions est tout à fait analogue à celle développée jusqu'ici, il suffit de remplacer l'espace \mathcal{S} des fonctions test par son analogue n -dimensionnel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ infiniment différentiables telles que f et toutes ses dérivées partielles sont à décroissance rapide : Pour tout $m_1, m_2, \dots, m_n, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |x_1|^{m_1} |x_2|^{m_2} \cdots |x_n|^{m_n} \left| \frac{\partial^{\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\ell_1} \partial x_2^{\ell_2} \cdots \partial x_n^{\ell_n}} \right| < \infty,$$

où nous utilisons la notation $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Nous nous intéressons tout spécialement à la distribution de Dirac $\delta^{(n)}$ en n dimensions (à ne pas confondre avec la n -ième dérivée de la distribution δ en une dimension !). $\delta^{(n)}$ est définie par

$$\delta^{(n)}(f) = f(\mathbf{0}) = \text{“la valeur de } f \text{ pour } \mathbf{x} = \mathbf{0}\text{”} . \quad (3.27)$$

Souvent on écrit simplement $\delta(\mathbf{x})$ pour $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$.

Exercice 12 :

Montrer qu'en coordonnées cartésiennes on peut envisager $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ comme étant le produit de n distributions δ de Dirac unidimensionnelles (considérer le cas $n = 3$) :

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2) \cdots \delta(x_n) . \quad (3.28)$$

Remarque : Le produit des n distributions δ apparaissant dans (3.28) a un sens, car les arguments sont des variables indépendantes. Si f est une fonction test de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors, par exemple, la distribution δ_{x_n} par rapport à la variable x_n appliquée à f est définie comme suit : on fixe les valeurs x_1, \dots, x_{n-1} et on pose $\tilde{f}(x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, avec $\tilde{f} \in \mathcal{S}$, donc $\delta_{x_n}(f)$ dépendra encore de x_1 à x_{n-1} et sera donnée par $(\delta_{x_n}(f))(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$.

En utilisant (3.28), on peut obtenir les propriétés et des représentations de $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ comme limite d'une suite de fonctions à partir des résultats donnés sur la distribution de Dirac en une dimension.

Références

J.L. BASDEVANT, Mécanique quantique (Complément Mathématique II, p. 381).

R.F. HOSKINS, Delta Functions, Introduction to Generalised Functions.

L. SCHWARTZ, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques (Chap. II et V).

Chapitre 4

Fonctions de Green

Les fonctions de Green interviennent dans la résolution de certaines équations différentielles. Nous considérons ici le cas, particulièrement important pour la physique, d'équations différentielles du 2ème ordre, et nous commençons par des équations différentielles aux dérivées ordinaires du type Sturm-Liouville.

4.1 Fonctions de Green en une dimension

Soit (a, b) un intervalle fini, $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle raisonnable (par exemple bornée et continue). On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{L}f)(x) \equiv -f''(x) + q(x)f(x) = h(x) \quad (4.1)$$

où h est une fonction donnée (que nous supposons continue par morceaux) et

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (4.2)$$

est l'opérateur différentiel (du type Sturm-Liouville). Le terme "opérateur différentiel" veut dire que \mathcal{L} agit sur des fonctions de x (il associe à chaque fonction deux fois différentiable une nouvelle fonction $\mathcal{L}f$), et son action fait intervenir des dérivées. Dans cette terminologie, l'équation différentielle (4.1) peut être écrite comme $\mathcal{L}f = h$.

La solution f de l'équation (4.1) est soumise à des conditions aux limites homogènes (c'est-à-dire des conditions aux limites qui sont satisfaites par toutes les combinaisons linéaires de f_1 et f_2 si elles sont satisfaites par f_1 et par f_2). Nous considérons surtout des conditions aux limites homogènes séparées (c'est-à-dire une condition au point $x = a$ et une condition au point $x = b$) :

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0, \quad (4.3)$$

$$\alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \quad (4.4)$$

où α_j, β_j sont des constantes données. Des cas particulièrement simples sont ceux où $\alpha_j = 0$ (conditions de Neumann) ou $\beta_j = 0$ (conditions de Dirichlet).

La méthode de la fonction de Green consiste à résoudre, pour chaque $y \in (a, b)$ fixé, l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\left[-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right]G(x, y) = \delta(x - y),} \quad (4.5)$$

où la fonction de Green G doit satisfaire (en tant que fonction de x !) les mêmes conditions aux limites en $x = a$ et en $x = b$ que la solution f de (4.1). Si G est trouvé, on peut obtenir la solution f de (4.1) simplement par (voir l'Exercice 1)

$$f(x) = \int_a^b G(x, y)h(y)dy. \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) doit être interprétée au sens des distributions (le membre de droite est une distribution). On peut écrire $\mathcal{L}_x G = \delta(x - y)$. Donc a priori G est une distribution. Mais dans la plupart des situations cette distribution est en fait une fonction, d'où le nom "fonction de Green"; en effet nous avons vu au Chapitre 3 (Exercice 9) que la distribution de Dirac δ apparaît comme (première ou deuxième) dérivée de certaines fonctions.

Exercice 1 (Fonction de Green et solutions de l'équation différentielle) :

Soit G la fonction de Green pour l'opérateur (4.2) et les conditions aux limites (4.3-4.4). Montrer par un calcul formel (passer les dérivées sous l'intégrale) que la fonction f définie par (4.6) est solution de l'équation différentielle (4.1) et satisfait aux conditions aux limites (4.3-4.4).

Remarque : Une démonstration plus correcte sera donnée dans le corrigé. On peut également montrer que, si f est solution de (4.1) et (4.3-4.4), alors f peut être représentée sous la forme (4.6).

4.2 Détermination de la fonction de Green

Pour $y \in (a, b)$ fixé, on détermine la fonction de Green $G(x, y)$, en tant que fonction de x , en imposant les conditions suivantes :

- (i) elle doit satisfaire l'équation différentielle $\mathcal{L}_x G = 0$ sur (a, y) et sur (y, b) ,
 - (ii) elle doit satisfaire les conditions aux limites (4.3-4.4) en $x = a$ et en $x = b$,
 - (iii) elle doit être continue en $x = y$,
 - (iv) sa dérivée doit avoir une discontinuité de -1 au point $x = y$
- (la dernière condition assure que la deuxième dérivée de G au point $x = y$ est égale à $-\delta(x - y)$, selon l'Exercice 9 du Chapitre 3).

Plus explicitement, désignons par g_a une solution de $\mathcal{L}g = 0$ satisfaisant la condition (4.3) (donc g_a est déterminée à un coefficient multiplicatif près) et de même g_b solution de $\mathcal{L}g = 0$ avec la condition (4.4). On suppose que l'on peut choisir g_a et g_b linéairement indépendantes sur (a, b) : $\lambda g_a + \mu g_b = 0 \rightarrow \lambda = \mu = 0$ (c.-à-d. g_a n'est pas proportionnelle à g_b). Alors, pour y fixé, il existe des constantes γ, κ (qui peuvent dépendre de y) telles que

$$G(x, y) = \begin{cases} \gamma g_a(x) & \text{si } x < y, \\ \kappa g_b(x) & \text{si } x > y. \end{cases} \quad (4.7)$$

Les "constantes" γ et κ s'obtiennent facilement à partir des conditions de raccordement (iii) et (iv) au point $x = y$. On trouve que

$$G(x, y) = -\frac{1}{W(y)} \begin{cases} g_a(x)g_b(y) & \text{si } x < y, \\ g_a(y)g_b(x) & \text{si } x > y, \end{cases} \quad (4.8)$$

où $W(y) = g_a(y)g_b'(y) - g_a'(y)g_b(y)$ est le Wronskien de g_a, g_b .

Exercice 2 (Vérification de la formule (4.8)) :

(a) Vérifier que la fonction (4.8) satisfait les conditions de raccordement (iii) et (iv) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [G(y + \varepsilon, y) - G(y - \varepsilon, y)] = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [G'(y + \varepsilon, y) - G'(y - \varepsilon, y)] = -1$$

(b) Montrer que

$$\frac{d}{dy}[W(y)] = 0.$$

Ainsi le dénominateur dans (4.8) est une constante, et on voit que $G(x, y) = G(y, x)$. Donc la fonction de Green est symétrique dans ses deux arguments.

Exercice 3 (Applications de la formule (4.8)) :

Soit $(a, b) = (0, \pi/2)$ et $\nu > 0$ une constante. Déterminer la fonction de Green de l'opérateur $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 - \nu$ pour les conditions aux limites $f(0) = f(\pi/2) = 0$. Considérer en particulier le cas $\nu = 1$, et calculer la solution $f(x)$ explicite pour :

- (i) $h(y) = \delta(y - \pi/4)$, dessiner $f(x)$ et $f'(x)$ et comparer avec l'exercice 9(d) du chapitre précédent.
- (ii) $h(y) = \sin(y)$, et vérifier que $-f''(x) - f(x) = \sin(x)$.

Exercice 4 (Fonctions de Green pour un intervalle infini) :

L'équation (4.1) sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ ou $(0, \infty)$ est souvent rencontrée en mécanique quantique en relation avec l'équation de Schrödinger.

Soit à nouveau $\mathcal{L} = -d^2/dx^2 + \nu$ et $(a, b) = (0, \infty)$. Chercher la fonction de Green dans les cas suivants :

- (i) $\nu > 0$, $f(0) = f(\infty) = 0$
- (ii) $\nu < 0$, $f(0) = 0$, $G(x, y) \sim \cos(\sqrt{|\nu|x})$ lorsque $x \rightarrow \infty$.

Exercice 5 (Méthode de Fourier) :

Il est possible de calculer certaines fonctions de Green par une transformation de Fourier. C'est la *solution fondamentale*, ce qui est la solution au sens des distributions de l'équation formelle

$$(\mathcal{L}G)(x) = \delta(x). \tag{4.9}$$

Les conditions aux limites doivent alors être satisfaites en ajoutant une solution H de l'équation homogène $(\mathcal{L}H)(x) = 0$.

(a) Démontrer formellement que la distribution

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k^2 + \nu} \right) \tag{4.10}$$

est la solution fondamentale pour l'opérateur \mathcal{L} de l'exercice 4. (\mathcal{F} dénote la transformée de Fourier et \mathcal{F}^{-1} son inverse.) Indication : se rappeler que $\widehat{\partial_x f}(k) = ik\hat{f}(k)$.

(b) Calculer explicitement la solution fondamentale (4.10) en utilisant une intégration dans le plan complexe (théorème des résidus) pour $\nu > 0$. Appliquer explicitement \mathcal{L} à cette solution pour vérifier Eq. (4.9). Construire la fonction de Green $G(x, y)$ qui résout $\mathcal{L}(x)G(x, y) = \delta(x - y)$ et avec $G(\pm\infty, y) = 0$.

(c) Trouver les (deux) solutions homogènes indépendantes de \mathcal{L} et vérifier que la fonction de Green pour l'exercice 4.i peut être écrite comme somme de la solution fondamentale et des solutions homogènes.

4.3 Fonction de Green en trois dimensions

Un problème en trois dimensions analogue à celui traité jusqu'ici est de considérer l'équation différentielle

$$-\Delta f(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) - zf(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

où \mathbf{x} varie sur une partie bornée Ω de \mathbb{R}^3 ou sur \mathbb{R}^3 tout entier et z est une constante (réelle ou complexe). Dans le premier cas on imposera des conditions sur le bord $\partial\Omega$ de Ω , dans le deuxième cas pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Comme auparavant, la fonction de Green est définie comme une solution (au sens des distributions) de

$$[-\Delta_{\mathbf{x}} + q(\mathbf{x}) - z]G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.12)$$

et satisfaisant les conditions aux limites (sur $\partial\Omega$ ou pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ respectivement). z est considéré comme un paramètre, la fonction de Green dépendra de ce paramètre. La notation $\Delta_{\mathbf{x}}$ signifie que les dérivées apparaissant dans le Laplacien sont par rapport à la variable \mathbf{x} :

$$\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

En termes de la fonction de Green, la solution de (4.11) est donnée par

$$f(\mathbf{x}) = \int G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y})h(\mathbf{y})d^3y. \quad (4.13)$$

Exercice 6 (La fonction de Green du Laplacien) :

On considère l'équation (4.12) avec $q(\mathbf{x}) \equiv 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire

$$-\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.14)$$

(a) Prendre d'abord $\Omega = \mathbb{R}^3$. Montrer que la solution s'annulant à l'infini (c'est-à-dire pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) est

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}.$$

Indication : D'abord, vérifiez que $\Delta_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ pour $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Ensuite, évaluez le Laplacien de $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dans le sens des distributions en prenant $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq \epsilon > 0$, puis $\epsilon \rightarrow 0$. On rappelle la formule de Green-Ostrogradski (généralisation de l'intégration par parties)

$$\int_U [g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x})]d\mathbf{x} = \int_{\partial U} [g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})dS$$

où f et g sont deux fonctions continûment différentiables $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, et U un ouvert à bord lisse ∂U , muni de la normale extérieure $\mathbf{N}(\mathbf{x})$.

(b) Prendre $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq R\}$, c'est-à-dire la boule de rayon R centrée à l'origine. Résoudre (4.14) avec la condition à la limite $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si $|\mathbf{x}| = R$ (c'est-à-dire $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'annule sur le bord de Ω).

Indication : On a $\Delta_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{w}|} = 0$ si $|\mathbf{x}| < R$ et $|\mathbf{w}| > R$. Chercher $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de la forme

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{a(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{w}|},$$

où $a(\mathbf{y})$ est un nombre qui peut dépendre de \mathbf{y} , et \mathbf{w} est un vecteur qui peut dépendre de \mathbf{y} (prendre $\mathbf{w} = b(\mathbf{y})\mathbf{y}$ [pourquoi ?], où $b(\mathbf{y})$ est un nombre qui peut dépendre de \mathbf{y}) et qui satisfait $|\mathbf{w}| > R$.

Application : Le potentiel électrostatique V en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dû à une distribution de charge de densité $\rho(\mathbf{x})$ est déterminé par l'équation de Poisson

$$-\Delta V(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\varepsilon_0.$$

Le résultat de (a) permet de donner la solution par

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3y.$$

On voit que la fonction de Green joue le rôle d'une fonction d'influence : $\frac{1}{\varepsilon_0}G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ détermine le potentiel au point \mathbf{x} dû à une unité de charge ponctuelle placée au point \mathbf{y} .

Similairement, le résultat de (b) permet de calculer le potentiel V à l'intérieur de la boule $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| \leq R\}$ produit par une distribution de charge dans cette boule, la surface de la boule étant mise à terre ($V(\mathbf{x}) = 0$ si $|\mathbf{x}| = R$).

Comment peut-on interpréter le résultat de l'Exercice 6 (b) en termes électrostatiques ? (La méthode des charges images).

Dans l'exercice suivant nous discutons la fonction de Green de l'opérateur $-\Delta - z$ dans $\Omega = \mathbb{R}^3$. Nous trouverons une solution particulière qui a la propriété de s'annuler à l'infini ; la solution générale s'obtient en lui rajoutant des solutions de l'équation homogène $(-\Delta_{\mathbf{x}} - z)f(\mathbf{x}) = 0$ (où f peut dépendre de z et \mathbf{y}).

Exercice 7 (Fonction de Green de l'équation de Schrödinger stationnaire (ou l'équation de Helmholtz)) :

Soit z un nombre complexe. Considérer l'équation suivante dans \mathbb{R}^3 :

$$(-\Delta_{\mathbf{x}} - z)G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.15)$$

(a) Montrer que

$$G_z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (4.16)$$

est une solution pour chacune des deux valeurs de \sqrt{z} .

Indication : Utiliser la règle de Leibniz ($|\mathbf{w}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$)

$$\Delta \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|}}{|\mathbf{w}|} = e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|} \Delta \frac{1}{|\mathbf{w}|} + \frac{1}{|\mathbf{w}|} \Delta e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|} + 2\nabla \frac{1}{|\mathbf{w}|} \cdot \nabla e^{i\sqrt{z}|\mathbf{w}|}$$

et les relations

$$\nabla |\mathbf{w}| = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \quad \nabla \frac{1}{|\mathbf{w}|} = -\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^3}.$$

(b) Déterminer le comportement de la solution (4.16) à l'infini pour z réel (c'est-à-dire $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ est fixé et $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$). Distinguer entre le cas où $z > 0$ et celui où $z < 0$; poser $k = |\sqrt{z}|$ dans le premier cas et $\kappa = |\sqrt{-z}|$ dans le deuxième cas et tenir compte des deux signes possibles de la racine dans (4.16).

Exercice 8 (Fonction de Green de l'équation du transport de la chaleur) :

Dans cet exercice nous utilisons comme dans l'exercice 5 la méthode Fourier pour calculer la solution fondamentale. Cette fois-ci c'est un problème de transport, c'est-à-dire une équation différentielle qui contient des dérivées spatiales et temporelles.

(a) Résoudre l'équation suivante en appliquant la transformation de Fourier par rapport aux coordonnées spatiales.

$$(\kappa \partial_t - \Delta)G(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t). \quad (\kappa > 0) \quad (4.17)$$

Indication : Montrer que la transformée de Fourier de l'équation (4.17) est résolue par

$$\hat{G}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\kappa(2\pi)^{3/2}} e^{-|\mathbf{p}|^2 t / \kappa} H(t) \quad (4.18)$$

Ici $H(t)$ dénote la fonction de Heaviside. Calculer la transformée de Fourier inverse de \hat{G} .

(b) Déterminer la solution formelle de

$$(\kappa \partial_t - \Delta)T(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) \quad (4.19)$$

pour une fonction u telle que $G * u$ existe, par exemple une fonction avec support borné.

(c) Choisir $u(\mathbf{x}, t) = A\delta(\mathbf{x}, t)$. Quel est la signification physique de cette source si T est considéré comme distribution de température ? Quelle est la solution $T(\mathbf{x}, t)$? (Commenter aussi sur la solution pour $t < 0$.) Pourquoi cette équation est appelée une équation de diffusion ?

(d) Quel est le profil de la température $T(\mathbf{x}, t)$ pour un profil initial $T_0(\mathbf{x}) = A \exp\{-|\mathbf{x}|^2 / (2\sigma^2)\}$ (tel que $u(\mathbf{x}, t) = \kappa T_0(\mathbf{x})\delta(t)$) ?

(e) Quel est le profil de la température $T(\mathbf{x})$ pour une source ponctuelle à l'origine qui est toujours allumée, i.e. $u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})$?

Références

R. Courant et D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Volume 1, Chapitre V, Paragraphes 14 et 15.

G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Chapitre 16.

S. Hassani, *Mathematical Physics*, Chapitre VI.

Chapitre 5

Intégration complexe et applications aux intégrales réelles

5.1 Intégration Complexe

Dans cette partie du cours nous allons revisiter l'intégration complexe, mais sans présenter toutes les démonstrations mathématiques. Vous trouverez celles-ci dans le cours d'analyse. Le but ici est plutôt de se concentrer sur l'application du théorème des résidus au calcul d'intégrales impropres réelles. Pour cette raison nous allons négliger beaucoup de résultats importants et fascinants sur la structure des fonctions complexes.

5.1.1 Fonctions d'une variable complexe

On peut écrire la valeur d'une fonction complexe $f(z)$ au point $z = x + iy$ comme un nombre complexe,

$$u + iv = f(z) \tag{5.1}$$

tel que u et v sont des fonctions réelles des deux variables x et y , $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Exemple 1 : Si $f(z) = z^2$ alors

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \tag{5.2}$$

et donc $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$.

La dérivée d'une fonction complexe est définie comme dans le cas réel :

Définition : Soit f une fonction dont le domaine de définition contient le voisinage du point z_0 . La *dérivée* de f en z_0 , notée $f'(z_0)$, est définie par la formule

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{5.3}$$

à condition que cette limite existe. La fonction f est dite *différentiable* en z_0 quand la limite existe.

Une fonction complexe d'une variable complexe est appelée *holomorphe* si elle possède une dérivée en tout point où elle est définie. Nous allons utiliser le terme *analytique* de manière synonyme. Une fonction est holomorphe au point z si elle est dérivable en z ainsi que dans son voisinage. Une fonction est appelée *entière* si elle est holomorphe dans tout le plan complexe. Les polynômes sont des exemples de fonctions entières.

5.1.2 Les conditions de Cauchy-Riemann

Il y a une différence importante entre la différentiabilité réelle et complexe : dans le cas complexe, la limite peut être prise de plusieurs directions dans le plan complexe, et la valeur limite doit toujours être la même. Ceci impose des contraintes fortes sur les fonctions complexes différentiables.

Nous pouvons réécrire l'équation (5.3) sous la forme

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (5.4)$$

où $h = s + it$ est un nombre complexe. En prenant $h = s$ réel, la dérivée devient une dérivée partielle par rapport à x ,

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+s+iy) - f(x+iy)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.5)$$

De même, si $h = it$ est purement imaginaire, on a

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+i(y+t)) - f(x+iy)}{it} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.6)$$

Si $f'(z)$ existe, cette expression doit avoir une valeur unique, et donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.8)$$

Ces équations s'appellent les *conditions de Cauchy-Riemann*. Elles sont nécessaires et suffisantes pour que f soit dérivable au point z .

Exemple 2 : Nous avons vu dans l'exemple 1 que pour la fonction $f(z) = z^2$ on a $u = x^2 - y^2$ et $v = 2xy$. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.9)$$

La fonction est donc dérivable à tout point z , et est alors une fonction entière.

Exemple 3 : Pour une fonction réelle d'une variable complexe on a $v = 0$. Ainsi cette fonction est soit constante, soit non-dérivable. Par exemple, la fonction $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann car $\partial u/\partial x = 2x \neq \partial v/\partial y = 0$.

5.1.3 Développements en séries

La formule de Taylor de l'analyse réelle peut être étendue aux fonctions d'une variable complexe : chaque fonction qui est analytique dans un cercle $|z - a| < R$ peut être représentée par sa série de Taylor

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n + \dots \quad (5.10)$$

La série converge vers $f(z)$ pour tout z intérieur à ce cercle.

Si une fonction f n'est pas analytique au point a on ne peut pas appliquer le théorème de Taylor en ce point. Dans ce cas, il existe parfois une généralisation en une série faisant intervenir à la fois des puissances positives et négatives de $(z - a)$. De telles séries sont appelées des *séries de Laurent*.

Théorème 1 : (Théorème de Laurent) Soient C_0 et C_1 deux cercles orientés positivement centrés au point a et f une fonction analytique sur C_0 , C_1 et dans la couronne comprise entre ces deux cercles, alors en chaque point z de la couronne f est représenté par le développement

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (5.11)$$

5.1.4 Intégrales d'une fonction complexe

Définition : (Intégrale d'une fonction complexe d'une variable réelle) Soit $w(t) = u(t) + iv(t)$ une fonction complexe de la variable réelle t . Soient les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ définies sur l'intervalle fermé et borné $a \leq t \leq b$, et continues par morceaux. On définit alors l'intégrale de w par

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt. \quad (5.12)$$

Nous allons utiliser cette définition pour introduire une intégrale le long d'un contour dans le plan complexe. La variable t deviendra un paramètre qui décrit ce chemin. Pour ceci il faut d'abord définir la notion de contour :

Définition : (Arc) Un arc C dans le plan complexe est un ensemble de points $z = (x, y)$ tels que

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b \quad (5.13)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonctions continues du paramètre réel t . Si $z(a) = z(b)$ alors l'arc est *fermé*. Si les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ existent alors la dérivée de l'arc est

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t). \quad (5.14)$$

L'arc est *différentiable* si les dérivées existent et sont continues.

Nous pouvons introduire la longueur d'un arc différentiable par

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt \quad (5.15)$$

où

$$|z'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}. \quad (5.16)$$

La longueur L est invariante sous des changements de paramétrisation de l'arc C .

Définition : (Contour) Un contour est un ensemble d'arcs différentiables joints bout à bout.

Si $z(t)$ est une fonction qui décrit un contour, alors $z(t)$ est continue, et sa dérivée $z'(t)$ est continue par morceaux. La longueur d'un contour est la somme des longueurs des arcs différentiables qui le forment. Si $a \leq t \leq b$ et $z(a) = z(b)$ alors le contour est *fermé*.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale de $f(z)$ le long d'un contour C :

Définition : Supposons que C est un contour représenté par l'équation $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$. Si la fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est continue par morceaux sur C on définit l'intégrale de contour de f le long de C comme :

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt. \quad (5.17)$$

Plus explicitement, on a donc

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux' - vy')dt + i \int_a^b (vx' + uy')dt. \quad (5.18)$$

5.1.5 Théorème de Cauchy et théorème des résidus

Théorème 2 : (Théorème de Cauchy) Si une fonction $f(z)$ est analytique dans un domaine simplement connexe D , alors son intégrale prise le long de tout contour fermé C appartenant à D est nulle :

$$\oint_C f(z)dz = 0. \quad (5.19)$$

Ce théorème implique que la valeur d'une intégrale de a à b dans le domaine D est unique et ne dépend pas du choix de chemin C entre a et b .

Exercice 1 :

Soit $\sigma, k \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Vérifier que l'intégrand est une fonction entière et utiliser le théorème de Cauchy pour calculer

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{ikx} dx \quad (5.20)$$

ce qui est la transformée de Fourier d'une Gaussienne de largeur σ .

Indications : Suivre par exemple les pas suivants :

- Considérer l'intégrand comme une fonction complexe en mettant $x \rightarrow z = x + iy$. Vérifier que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfait.
- Il existe un y_* tel que la partie imaginaire de l'exposant disparaît. Résoudre l'intégrale pour $y = y_*$.
- Pour utiliser le théorème de Cauchy, il faut fermer le contour d'intégration. Le faire de $(x, y) = (-L, y_*)$ à $(-L, 0)$ et de $(L, 0)$ à (L, y_*) , et prendre ensuite la limite $L \rightarrow \infty$.

Nous pouvons utiliser le théorème de Cauchy aussi dans la situation suivante : Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit analytique dans un domaine qui consiste en un cercle de rayon $R > 0$ autour d'un point a , mais que la fonction est singulière au point a . Dans ce cas, la fonction $f(z)$ a une représentation en série de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \quad (5.21)$$

Certains de c_n peuvent être nuls.

Exercice 2 :

Démontrer que pour le cercle de rayon R , $C = \{x, |x| = R\}$, que

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = -1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5.22)$$

par intégration directe le long de C .

Appliquant ce résultat à la représentation de la fonction f en terme de série de Laurent, en intégrant sur le cercle unité C' , orienté de manière positive, autour de a , nous trouvons

$$\oint_{C'} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}. \quad (5.23)$$

Le théorème de Cauchy nous dit alors que nous aurions pu choisir n'importe quel contour qui enferme le point a et est dans le domaine analytique parce qu'il est toujours possible de connecter ce contour avec le cercle par deux lignes si près qu'ils ne contribuent pas à l'intégrale. Alors l'intégrale le long du contour combiné disparaît ce qui implique que l'intégrale le long du contour vaut moins l'intégrale le long du cercle. Il est important ici que le point singulier a est isolé tel qu'il y a un domaine analytique autour de lui, d'une taille quelconque.

Le nombre complexe c_{-1} , qui est le coefficient devant $1/(z-a)$ dans le développement (5.21), est appelé le *résidu* de f au point singulier isolé a , et désigné $\text{Res}(f, a)$.

Théorème 3 : (Théorème des résidus) Considérons un contour simple fermé C , orienté positivement, à l'intérieur duquel et sur lequel une fonction f est analytique excepté en un nombre fini de points singuliers z_1, z_2, \dots, z_n intérieurs à C . Alors

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j) \quad (5.24)$$

où $\text{Res}(f, z_j)$ désigne le résidu de f au point z_j .

Pour démontrer ce théorème, on considère un petit cercle C_j autour de chaque point singulier isolée z_j (en prenant soin que les cercles sont suffisamment petits pour ne contenir qu'un seul point singulier). Alors

$$\oint_{C_j} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_j). \quad (5.25)$$

En combinant C avec les cercles C_j on construit la frontière d'un région dans laquelle f est analytique. Par le théorème de Cauchy on a alors que

$$\oint_C f(z)dz - \sum_j \oint_{C_j} f(z)dz = 0, \quad (5.26)$$

d'où le résultat.

5.1.6 Calculs des résidus

Le théorème des résidus nous permet alors de calculer facilement des intégrales de contours dans le plan complexe, si on connaît les résidus. Par définition, le résidu est le coefficient du terme $1/(z - a)$ de la série de Laurent de $f(z)$ dans le domaine autour de a .

Exemple 4 : Soit la fonction $f(z) = (e^z - 1)/z$. Comme $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j/j!$ nous avons que

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots \quad (5.27)$$

Par conséquent le point $z = 0$ est un point singulier éliminable, et f est analytique dans tout le plan complexe (une fonction *entière*). Alors toute intégrale de $f(z)$ le long d'un contour fermé est nulle (même si le contour inclut $z = 0$).

Exercice 3 :

Calculer le résidu de

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \quad (5.28)$$

au point $z = 0$.

Exercice 4 :

Soit la fonction $f(z) = (z^2 - 2z + 3)/(z - 2)$.

(a) Déterminez la série de Laurent de $f(z)$ au point $z = 2$.

(b) Utilisez le théorème des résidus pour déterminer $\int_C f(z)dz$ pour C le cercle de rayon 1 autour $z = 2$.

Normalement la série de Laurent n'est pas facile à construire. Dans ce cas nous pouvons extraire le coefficient c_{-1} au moins en principe comme suit :

Définition : La fonction $f(z)$ a un pôle (un point singulier) d'ordre m en $z = a$ si $(z - a)^{m+1}f(z)$ est nulle en $z = a$ mais $(z - a)^m f(z)$ ne s'annule pas.

Ceci implique pour la série de Laurent au point $z = a$ que $c_j = 0$ pour $j < -m$.

Si $f(z)$ a un pôle simple (un pôle d'ordre 1) en $z = a$ alors

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z). \quad (5.29)$$

Si le pôle est d'ordre 2, une multiplication avec $(z - a)^2$ fait que la série de Laurent commence avec un terme constant qui multiplie c_{-2} et après le terme $(z - a)c_1$, tel que

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d}{dz} (z - a)^2 f(z). \quad (5.30)$$

Ceci se généralise comme suit : Si $f(z)$ possède un pôle d'ordre m au point $z = a$ alors le résidu de f en ce point est

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - a)^m f(z). \quad (5.31)$$

Exercice 5 :

Soit

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{x^4(1-2x)}. \quad (5.32)$$

Y a-t-il un pôle en $x = 0$, et si oui, quel est son ordre, et quel est le résidu ?

Exercice 6 :

Trouver les pôles de

$$\frac{1}{(1+z^2)^n} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (5.33)$$

et calculer les résidus.

5.2 Applications au calcul d'intégrales réelles

Une application typique du théorème des résidus est le calcul d'intégrales sur tout l'axe réel. Pour ceci nous avons encore besoin du *Lemme de Jordan* : En intégrant le long d'un arc de cercle Γ de rayon R , centré sur z_0 on a que

$$\text{Si } \lim_{R \rightarrow 0} R \max_{z \in \Gamma} |f(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (5.34)$$

$$\text{Si } \lim_{R \rightarrow \infty} R \max_{z \in \Gamma} |f(z)| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (5.35)$$

Démonstration : Si M est une constante positive tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Gamma$ on a que

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML. \quad (5.36)$$

ou L est la longueur de l'arc du cercle. Si l'angle d'ouverture de l'arc est $\Omega \leq 2\pi$ alors $L = R\Omega$ et le Lemme de Jordan suit. Nous pouvons aussi voir que les conditions mentionnées ci-dessus sont suffisants mais pas nécessaires.

Remarque : Il y a d'autres formes du Lemme de Jordan, qui reviennent plus au moins au même. Le but est toujours de pouvoir fermer le contour d'intégration et de démontrer que la valeur de l'intégrale ne change pas.

Avec ce lemme nous pouvons compléter une intégrale sur l'axe réel avec un demi-cercle. Si l'intégrale le long du dernier tend vers zéro pour $R \rightarrow \infty$ alors la valeur de l'intégrale réelle est donnée par la somme des résidus à l'intérieur de ce contour, multipliée par $2\pi i$.

Exemple 5 : Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(1+x^2)$. D'abord nous vérifions que nous pouvons appliquer le Lemme de Jordan pour fermer le contour par un demi-cercle. Pour ceci nous notons que l'intégrant tend suffisamment vite vers zéro :

$$R|f(z)| = \frac{R}{|1 + R^2 e^{2i\phi}|} = \frac{R}{\sqrt{1 + 2R^2 \cos(2\phi) + R^4}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (5.37)$$

Il suffit donc d'évaluer le résidu aux pôles $a = \pm i$. Ce sont des pôles simples, alors

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}. \quad (5.38)$$

Alors nous avons, avec le théorème des résidus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi. \quad (5.39)$$

Exercice 7 :

Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (5.40)$$

avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Exercice 8 :

Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}. \quad (5.41)$$

Exercice 9 :

Dans le chapitre sur les fonctions de Green, nous avons reconstruit l'intégrale suivante pour trouver une fonction de Green :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k^2 + \nu} \right). \quad (5.42)$$

Ici \mathcal{F}^{-1} est la transformée de Fourier inverse, et $\nu > 0$. Calculez $G(x)$ en utilisant le calcul des résidus.

Exercice 10 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\Re \alpha > 0$, et soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}(k)$ de

$$f(x) = \frac{1}{(ix - \alpha)^{n+1}}. \quad (5.43)$$

Exercice 11 :

(Fonction Green de l'oscillateur harmonique) L'équation de l'oscillateur harmonique est $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t)$ où $\omega_0 > 0$ est un paramètre réel fixe et $f(t)$ décrit une excitation externe. Une approche pour construire la fonction Green passe par la solution fondamentale $G(t)$ pour $f(t) = \delta(t)$ (voir exercice 5 du chapitre sur les fonctions de Green). Une transformée de Fourier de l'équation $G''(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$ mène à

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (5.44)$$

Si nous essayons de calculer la transformée inverse,

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega, \quad (5.45)$$

nous nous rendons compte qu'il y a deux pôles sur l'axe réel, à $\omega = \pm\omega_0$. Pour contourner (littéralement) ce problème, on peut remplacer $\hat{G}(\omega)$ par

$$\hat{G}^{(\text{ret})}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\omega + \omega_0 - i\epsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 - i\epsilon} \right], \quad (5.46)$$

$$\hat{G}^{(\text{adv})}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\omega + \omega_0 + i\epsilon} - \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\epsilon} \right]. \quad (5.47)$$

Ceci correspond à deux chemins d'intégration qui contournent les pôles de manière différents.

- Déssiner les chemins d'intégration.
- Renfermer les chemins par des demi-cercles à l'infini et calculer les intégrales par le théorème des résidus.
- Interpréter les fonctions de Green comme la réponse d'un oscillateur harmonique à une excitation courte au temps $t = 0$. Quelle est la différence entre la fonction de Green *retardée* $G^{(\text{ret})}(t)$ et la fonction de Green *avancée* $G^{(\text{adv})}(t)$? Laquelle des deux allez vous utiliser pour calculer l'effet d'une excitation $f(t)$ sur un oscillateur harmonique initialement au repos, par $y = G * f$?

Exercice 12 :

(Fonctions de Green pour équations d'onde, de Poisson et de Helmholtz) La solution fondamentale $G(\mathbf{x}, t)$ (cf exercice 5 du chapitre sur les fonctions de Green) de l'équation d'onde est la solution de l'équation suivante¹ :

$$\left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) G(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2\pi} \delta(x, t). \quad (5.48)$$

Nous pouvons simplifier cette équation en faisant d'abord une transformation de Fourier par rapport au temps, $t \rightarrow \omega$, ce qui mène à l'équation

$$\left(-\Delta - \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_\omega(\mathbf{x}) = \delta(x), \quad (5.49)$$

ce qui rend explicite le lien avec l'exercice 7, équation de Helmholtz, du chapitre sur les fonctions de Green. La constante dans la première équation à été choisie pour que le membre de droite de la deuxième ne soit que $\delta(x)$. En faisant aussi une transformation de Fourier sur $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}$, nous trouvons l'équation élémentaire

$$\left(\mathbf{p}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \hat{G}_\omega(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (5.50)$$

1. Il s'agit de la solution obtenue par transformation de Fourier. Elle reproduit la discontinuité de la dérivée mais doit en général être superposée à une combinaison linéaire de solutions homogènes pour satisfaire les conditions aux limites du problème.

- a) Soit $\omega^2 < 0$. Poser $z = \omega^2/c^2$ puis calculer $G_z(\mathbf{x})$ par intégration dans le plan complexe. Comparer avec l'exercice 7 du chapitre sur les fonctions de Green.
- b) Prendre la limite $z \rightarrow 0$ de la solution trouvée en (a), et comparer avec la fonction de Green du Laplacien, exercice 6 du chapitre sur les fonctions de Green.
- c) Soit $\omega^2 > 0$. Si on veut calculer $G_\omega(\mathbf{x})$ on trouve que les pôles de l'intégrand dans la transformation de Fourier se trouvent sur l'axe réelle, comme dans l'exercice précédent. Comme dans cet exercice il faut contourner les pôles en les déplaçant de $\pm i\epsilon$, ce qui mène à des fonctions de Green différents. Calculez-les, et comparez-les avec l'interprétation en termes d'ondes sphériques de l'exercice 7b du chapitre sur les fonctions de Green.
- d) Calculer pour le cas (c) $G(\mathbf{x}, t)$ en faisant une transformation de Fourier inverse sur les fréquences, $\omega \rightarrow t$. Interpréter les résultats en termes de fonctions de Green avancées et retardées. Montrer alors qu'une source $S(\mathbf{x}, t)$ localisée dans le temps et dans l'espace donne lieu à une onde (une solution de l'équation d'onde avec $S(\mathbf{x}, t)$ au second membre)

$$u(\mathbf{x}, t) = \int \frac{[S(\mathbf{x}', t')]_{\text{ret}}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (5.51)$$

où $[\dots]_{\text{ret}}$ signifie que le temps t' est évalué au temps retardé, $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$.

Exercice 13 :

Utiliser l'intégration par contour pour évaluer la somme

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2}, \quad a > 0. \quad (5.52)$$

- a) Montrer que S correspond à la somme des résidus en des pôles sur l'axe réel de

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \pi \cot(\pi z). \quad (5.53)$$

La somme peut donc être représentée comme la somme d'intégrales sur des petits cercles autour de ces pôles.

- b) Considérer un contour qui résulte si on agrandit les petits cercles de la partie (a) jusqu'à ce qu'ils forment un seul contour long et mince proche de l'axe réel. Dessiner ce contour pour N termes de la somme S et puis considérer la limite $N \rightarrow \infty$. Dans cette limite le contour se coupe en deux intégrales le long de $x \pm i\epsilon$. Vérifier par le Lemme de Jordan que vous pouvez fermer le contour par des grands demi-cercles, et en déduire que la somme S est égale à l'opposé de la somme des résidus en des pôles non-réels de $f(z)$.
- c) Utiliser le calcul des résidus pour trouver S .

5.3 Méthode du Col

Souvent il n'est pas possible de résoudre une intégrale de manière exacte. Pour certaines classes d'intégrales il est possible de trouver des solutions approximatives avec bonne précision, par exemple pour des intégrands du type $e^{Mf(x)}$ pour M grand. Dans cette section nous commençons en regardant des intégrales réelles avant de discuter une extension de la méthode dans le plan complexe, en utilisant le théorème de Cauchy.

5.3.1 Méthode de Laplace

La méthode de Laplace est très simple : pour une intégrale du type $\int_a^b dx \exp(Mf(x))$ nous développons $f(x)$ en série de Taylor autour du maximum global (supposé à $x = x_0$ et $x_0 \neq a, b$:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3). \quad (5.54)$$

Si M est suffisamment grand, nous pouvons négliger les termes d'ordre supérieur, et en plus nous pouvons intégrer de $-\infty$ à ∞ puisque l'intégrand décroît très vite loin de x_0 . Alors

$$\int_a^b dx e^{Mf(x)} \approx e^{Mf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}M|f''(x_0)|(x-x_0)^2} = e^{Mf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{M|f''(x_0)|}}. \quad (5.55)$$

Exemple 6 : Dérivons la formule de Stirling, $N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$. Pour ce faire, nous notons que $N! = \Gamma(N + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^N dx$. Le changement de variable, $x = Nz$ tel que $dx = Ndz$ conduit à

$$N! = \int_0^{\infty} e^{-Nz} (Nz)^N N dz = N^{N+1} \int_0^{\infty} e^{-Nz} e^{N \ln z} dz = N^{N+1} \int_0^{\infty} e^{N(\ln z - z)} dz. \quad (5.56)$$

C'est une intégrale de la bonne forme, avec $f(x) = \ln x - x$. La première dérivée est $1/x - 1$ et alors $f(x)$ atteint son maximum en $x_0 = 1$. La seconde dérivée est $f''(x) = -1/x^2$. En utilisant la méthode de Laplace nous avons donc

$$N! \approx N^{N+1} e^{-N} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \quad (5.57)$$

qui n'est autre que la formule de Stirling.

Exercice 14 :

Un télescope équipé d'un compteur de photons observe une étoile lointaine pendant une minute pour mesurer le taux d'arrivée de photons par minute, λ . Supposons que le nombre r de photons détectés suit une distribution de Poisson de paramètre λ ,

$$P(r|\lambda) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}. \quad (5.58)$$

En utilisant une distribution à priori $P(\lambda) = 1/\lambda$, calculer une approximation de la distribution postérieure pour λ , $P(\lambda|r) \propto P(r|\lambda)P(\lambda)$ en faisant une approximation de Laplace

- a) en λ
- b) en $\log \lambda$ (utiliser alors une distribution à priori $P(\log \lambda) = \text{constant}$).

Donner le mode (pic de la distribution), la largeur et la normalisation (l'inverse de la valeur de l'intégrale sur λ) en utilisant cet approximation. Comparer ensuite la normalisation avec la normalisation exacte.

5.3.2 Méthode du Col

Si la fonction f est une fonction complexe, alors la méthode de Laplace ne suffit pas, parce que la phase complexe peut varier rapidement dans la région où la partie réelle de f est maximale. Ceci peut supprimer fortement la valeur de l'intégrale dans cette région.

Mais il est possible de déformer le chemin d'intégration dans le plan complexe aussi longtemps qu'on reste dans un domaine d'analyticité de f . Le but est alors de trouver un chemin sur lequel la phase y est constante. Pour cette raison la méthode du col s'appelle aussi *méthode de la phase stationnaire*. En plus, comme nous allons voir, c'est aussi le chemin avec la décroissance la plus rapide de la partie réelle, et la méthode est souvent appelée *method of steepest descent* en Anglais.

En général, pour une intégrale $I = \int_{\gamma} e^{f(z)} dz$ nous cherchons un chemin continûment déformé γ_{α} (de manière qu'on ne passe par aucune singularité de f pendant cette déformation) tel que

- (a) Le long de γ_α la phase $\Im m f$ est constante.
- (b) Il existe un point $z_\alpha \in \gamma_\alpha$ tel que $(df/dz)(z_\alpha) = 0$.
- (c) La partie réelle de f passe par un maximum local à $z = z_\alpha$.

Un point vérifiant les conditions (b) et (c) est appelé un *col* associé à $f(z)$. C'est parce que les conditions the Cauchy-Riemann, éqs. (5.7) et (5.8), impliquent que

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.59)$$

et de même pour $v(x, y)$. Alors si $df(z)/dz = 0$ mais les deuxièmes dérivées partielles sont non-nulles, ils doivent avoir le signe opposé et ce n'est pas un maximum ou un minimum mais un col. Considérons aussi les lignes de u constant qui sont perpendiculaire au vecteur $\nabla u = (\partial u/\partial x, \partial u/\partial y)$ qui pointe dans la direction de croissance maximale. Nous trouvons que

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.60)$$

La condition pour qu'une fonction complexe soit analytique impose donc des contraintes fortes sur cette fonction.

Pour nous, le fait que les gradients de u et v sont perpendiculaire implique que la direction le long de laquelle la phase est constante (la condition (a)) est aussi la direction de la décroissance la plus rapide de la partie réelle de la fonction.

La condition que la phase reste stationnaire nous fournit l'équation de courbe γ_α . Le long de cette courbe la phase est donc constante et on se ramène à une méthode du col réel. Alors, grâce aux propriétés des fonctions analytiques, le chemin sur lequel les oscillations de e^{f_α} sont nulles est aussi le chemin sur lequel $\Re e f_\alpha$ présente un maximum local le plus accentué possible.

Pour évaluer l'intégrale sur le chemin γ_α nous introduisons comme dans la section 5.1.4 un paramètre réel t qui paramétrise le chemin à travers le col, normalisé tel que

$$f(z) = f(z_\alpha) - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}((z - z_\alpha)^3). \quad (5.61)$$

En comparant cette expression avec la formule de Taylor autour de z_α , cf éq. (5.10),

$$f(z) = f(z_\alpha) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(z_\alpha)}{dz^2} (z - z_\alpha)^2 + \mathcal{O}((z - z_\alpha)^3) \quad (5.62)$$

nous trouvons que

$$t = (z - z_\alpha) \sqrt{-\frac{d^2 f(z_\alpha)}{dz^2}}. \quad (5.63)$$

Comme dans le cas de la méthode de Laplace nous remplaçons la vraie intégrale le long de γ_α par son approximation Gaussienne autour de z_α . Par la formule d'intégration complexe, (5.17), nous avons que

$$I_\alpha \approx e^{f(z_\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} z'(t) dt \approx e^{f(z_\alpha)} \left\{ \frac{2\pi}{-d^2 f(z_\alpha)/dz^2} \right\}^{1/2} \quad (5.64)$$

Pour le deuxième pas nous avons supposé que $z'(t) = (d^2 f(z)/dz^2)^{-1/2}$ peut être considéré comme constant à l'échelle du terme Gaussien, ce qui nous permet d'évaluer l'intégrale Gaussienne résultante. Nous pouvons constater que la formule correspond à celle de la méthode de Laplace, (5.55), sauf qu'elle est à évaluer au col z_α du chemin d'intégration déformée γ_α . En effet, si on a affaire à une fonction réelle, la phase est déjà stationnaire le long de l'axe réel et la méthode du col coïncide avec la méthode de Laplace.

Exemple 7 : Essayons de calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax^2} dx, \quad a > 0. \quad (5.65)$$

Sans le facteur i ce serait une intégrale Gaussienne, mais maintenant c'est une fonction qui oscille rapidement. Pour trouver sa valeur, nous suivons la recette de la phase stationnaire. Considéré dans le plan complexe, l'intégrant est

$$-iaz^2 = 2axy - ia(x^2 - y^2). \quad (5.66)$$

Pour garder la phase stationnaire nous pouvons donc faire une rotation de 45 degrés sur la ligne $x = -y$. Sur cette ligne on a bien que $xy \leq 0$ et égale à zéro à l'origine. On a aussi que $df/dz = -2iaz$ est nulle à l'origine et alors la partie réelle $2axy$ passe bien par un maximum en ce point. Alors $z_\alpha = 0$, $d^2 f(z_\alpha)/dz^2 = -2ai$ et alors

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{2ai}} = \sqrt{\frac{\pi}{ai}}. \quad (5.67)$$

Dans ce cas le résultat est exact parce que les corrections d'ordre supérieures disparaissent. C'est aussi le résultat qu'on aurait obtenu naïvement en remplaçant $a \rightarrow ia$ pour se ramener au cas d'une intégrale Gaussienne simple, mais le passage par le plan complexe est nécessaire pour s'assurer que la solution est correcte. En effet il est encore nécessaire de vérifier que la rotation du chemin d'intégration ne change pas la valeur de l'intégrale. Nous notons que la condition du lemme de Jordan n'est pas satisfaite : pour z sur l'axe réel nous avons que $|f(z)| = 1$ pour n'importe quel distance L de l'origine. Le lemme de Jordan étant suffisant mais pas nécessaire, il est quand même permis de faire la rotation : La contribution à l'intégrale qui vient d'un ligne verticale de $(x, y) = (L, 0)$ à (L, L) qui relie les deux chemins d'intégration est

$$\left| \int_{(L,0)}^{(L,L)} f(z) dz \right| \leq \int_{(L,0)}^{(L,L)} |f(z)| dz = \int_0^L e^{2aLy} dy < \int_0^\infty e^{2aLy} dy = \frac{1}{2aL}. \quad (5.68)$$

Dans la limite $L \rightarrow \infty$ ceci tend vers zéro.

Exercice 15 :

Utiliser la méthode du col pour calculer (une approximation de) l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + ikx} dx. \quad (5.69)$$

- Trouver les points z_α pour lesquels $df(z_\alpha)/dz = 0$.
- Déterminer un chemin pour lequel la phase est constante et qui passe par z_α . Est-ce un minimum où un maximum de la partie réelle de f ?
- Appliquer la formule de la méthode du col.

Comparer avec le résultat de l'exercice 1.

Exercice 16 :

La fonction Airy peut être écrite comme

$$\text{Ai}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\rho t + \frac{t^3}{3}\right)} dt. \quad (5.70)$$

Dériver l'approximation suivante pour $\rho > 0$ avec la méthode du col :

$$\text{Ai}(\rho) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}\rho^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\rho^{1/4}}. \quad (5.71)$$

Exercice 17 :

Évaluer par la méthode du col la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{i\nu\theta} e^{x \cos \theta}, \quad (5.72)$$

(= $J_\nu(ix)$) avec $\nu > 0$ entier, pour x réel tendant vers $+\infty$.

Exercice 18 :

Évaluer par la méthode du col la fonction de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{ix \cos \theta}, \quad (5.73)$$

pour x réel tendant vers $+\infty$.

Quelques références :

- [1] W. APPEL, "Mathématiques pour la physique", H & K Editions.
- [2] M.J. ABLOWITZ & A.S. FOKAS, "Complex Variables", Cambridge Texts in Applied Mathematics.

Chapitre 6

Notions de probabilités et de statistique

6.1 Le concept de probabilité.

6.1.1 Espace d'échantillonnage, événement, probabilité.

Un grand nombre de phénomènes physiques ou naturels ont un aspect aléatoire. Dans certains cas une description déterministe (donc non-aléatoire) pourrait en principe être possible ; néanmoins elle s'avérerait irréalisable en pratique car elle serait d'une complexité extrême et ferait intervenir un trop grand nombre de paramètres. On doit ainsi se limiter à des théories probabilistes pour décrire des phénomènes et des expériences aléatoires. Ceci conduit naturellement à l'introduction d'un *espace d'échantillonnage*.

Définition : L'ensemble Ω constitué par tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé *l'espace d'échantillonnage*. Chaque "résultat possible" ω est un élément de Ω . Cet espace peut être discret (fini ou infini dénombrable) ou continu.

Définition : Un *événement* est un sous-ensemble \mathcal{A} de Ω . Si \mathcal{A} est formé d'un seul élément (c'est-à-dire $\mathcal{A} = \{\omega\}$), on parle alors d'*événement simple* ou *élémentaire*. L'*événement impossible* est l'ensemble vide \emptyset tandis que Ω est l'*événement certain*.

Si le résultat d'une expérience est un élément de \mathcal{A} , on dit que l'événement \mathcal{A} a été *réalisé*.

Définition : Si l'on répète une expérience n fois et qu'un événement se réalise h fois alors h/n est la *probabilité (empirique) de l'événement* en question.

Remarque : Souvent on limite la théorie de la probabilité à des phénomènes qui ont un caractère aléatoire intrinsèque. Ceci est parfois appelé l'approche *fréquentiste* car la probabilité est définie exclusivement par la fréquence d'un événement.

Il est aussi possible d'utiliser de manière consistante la probabilité pour décrire des incertitudes dues à des connaissances insuffisantes. Par exemple, un juge doit décider si un accusé est coupable ou non. En réalité l'accusé est soit coupable, soit non coupable, et il n'y a pas de notion de répéter le crime et de compter combien des fois l'accusé est coupable. Néanmoins, après avoir étudié le cas, le juge va avoir une opinion sur la probabilité que l'accusé ait commis le crime ou non, et il va baser sa décision là-dessus. Ce point de vue s'appelle *Bayésien* et il est utile pour inférer des propriétés a priori non-aléatoires, comme les paramètres d'un modèle.

Remarque : Dans la notation de la théorie des ensembles on a :

- (a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est l'événement "soit \mathcal{A} , soit \mathcal{B} , soit les deux".
- (b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est l'événement "à la fois \mathcal{A} et \mathcal{B} ".

- (c) \mathcal{A}^c est l'événement "non \mathcal{A} ".
- (d) $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ est l'événement " \mathcal{A} mais pas \mathcal{B} ".
- (e) Les événements \mathcal{A} et \mathcal{B} sont dits *exclusifs* si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

6.1.2 Les axiomes des probabilités.

Soit Ω un espace d'échantillonnage. A chaque événement \mathcal{A} , on associe un nombre réel $P(\mathcal{A})$. La fonction P à valeurs réelles définie sur Ω est appelée *mesure de probabilité* si elle satisfait les axiomes suivants :

- A1. Pour tout $\mathcal{A} \subset \Omega$, on a $P(\mathcal{A}) \geq 0$.
- A2. Pour l'événement certain de Ω , on a $P(\Omega) = 1$.
- A3. Pour toute suite d'événements exclusifs $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$ on a :

$$P(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \dots) = P(\mathcal{A}_1) + P(\mathcal{A}_2) + P(\mathcal{A}_3) + \dots \quad (6.1)$$

Modèle élémentaire fini symétrique

Ce modèle correspond à :

- (I) L'existence de n issues possibles "de base" pour l'expérience. Ces événements élémentaires $\omega_1, \dots, \omega_n$ (les cas possibles) forment une partition de Ω .
- (II) $P(\omega_1) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$.

Tout événement \mathcal{A} est l'union d'un certain nombre $\nu(\mathcal{A})$ des ω_i , on pose alors

$$P(\mathcal{A}) = \frac{\nu(\mathcal{A})}{n} \quad \left(= \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}} \right). \quad (6.2)$$

Exercice 1 :

Un dé à jouer rouge et un noir sont jetés simultanément au hasard (manière usitée de dire qu'on postule (II) pour les 36 événements ω_{ij} = "rouge donne i points et noir en donne j "). Que valent $P(\mathcal{A}), P(\mathcal{B}), \dots$ pour

- \mathcal{A} = "rouge donne moins de 5 points",
- \mathcal{B} = "noir donne un nombre pair de points",
- \mathcal{C} = "la somme pour les deux dés est paire et ≤ 8 ",
- \mathcal{D} = $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$,
- \mathcal{F} = $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$.

Exercice 2 :

Démontrer les théorèmes suivants :

- (a) Si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ alors $P(\mathcal{A}_1) \leq P(\mathcal{A}_2)$ et $P(\mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{A}_1) = P(\mathcal{A}_2) - P(\mathcal{A}_1)$.
- (b) Pour tout $\mathcal{A} \subset \Omega$ on a $0 \leq P(\mathcal{A}) \leq 1$.
- (c) $P(\emptyset) = 0$.
- (d) Si \mathcal{A}^c est le complément de \mathcal{A} alors $P(\mathcal{A}^c) = 1 - P(\mathcal{A})$.
- (e) Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux événements quelconques, alors $P(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{B}) - P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$.

6.1.3 Probabilités conditionnelles et indépendantes.

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux événements et $P(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ la probabilité que \mathcal{B} se réalise, \mathcal{A} étant réalisé. Comme nous savons que \mathcal{A} est réalisé, \mathcal{A} devient un nouvel espace d'échantillonnage remplaçant Ω . Cela conduit à la définition suivante :

$$P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})}{P(\mathcal{A})} \quad (6.3)$$

ou

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})P(\mathcal{A}|\mathcal{B}). \quad (6.4)$$

Définition : $P(\mathcal{B}|\mathcal{A})$ est appelée la *probabilité conditionnelle* de \mathcal{B} , étant donné \mathcal{A} .

Si $P(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$, c'est-à-dire, si la probabilité de réalisation de \mathcal{B} n'est pas affectée par ce qu'il se passe pour \mathcal{A} , alors on dit que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des *événements indépendants*. Alors :

$$P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B}). \quad (6.5)$$

Exemple : dans l'exercice 1, les comportements individuels des deux dés sont indépendants (on les jette à distance l'un de l'autre). Ceci entraîne que $P(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = P(\mathcal{A})P(\mathcal{B})$. On a encore que \mathcal{A} et \mathcal{C} sont dépendants : sachant \mathcal{C} , ne restent possibles que les 14 événements ω_{ij} où $i + j$ est pair et ≤ 8 . On a donc dans ce cas :

$$P(\mathcal{A}|\mathcal{C}) = \frac{P(\mathcal{A} \cap \mathcal{C})}{P(\mathcal{C})} \quad \left(= \frac{11}{14} \right).$$

Exercice 3 :

Evaluer la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 4 au cours d'un jet unique d'un dé :

- (a) Sans autre information.
- (b) Sachant que le résultat obtenu est impair.

Exercice 4 :

Un récipient contient 6 boules rouges, 4 blanches et 5 bleues. On tire successivement 3 boules du récipient. Quelles sont les probabilités de tirer dans l'ordre des boules rouge, blanche et bleue si :

- (a) Chaque boule est remise dans le récipient.
- (b) Les boules ne sont pas remises dans le récipient.

Exercice 5 :

La commande de l'organe I à l'organe II d'un équipement se fait normalement par la ligne directe, affligée d'une probabilité de panne p . En cas de panne, elle est automatiquement déviée sur la ligne de secours formée de deux tronçons dont chacun a probabilité de panne q . Les pannes sont, pour les trois tronçons, des événements indépendants. Trouver $P(\mathcal{C})$ où \mathcal{C} est l'événement "la commande se fait".

6.1.4 Dénombrements et analyse combinatoire.

Lorsque le nombre d'événements est grand, le comptage qui doit être fait pour le calcul des probabilités n'est pas toujours facile. *L'analyse combinatoire* offre des méthodes de comptage élaborées.

Arrangements et combinaisons.

Soient n objets distincts. On veut en aligner r d'entre eux sur une droite. Le nombre d'*arrangements* possibles est :

$$A_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} . \quad (6.6)$$

Dans le cas des arrangements, l'ordre des objets est important. Dans diverses situations, l'ordre n'a pas d'importance. On parle alors de *combinaisons*. Le nombre de combinaisons de r objets parmi n est :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} . \quad (6.7)$$

Les *coefficients binomiaux* C_r^n sont les coefficients apparaissant dans le développement du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = x^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \cdots + C_n^n y^n . \quad (6.8)$$

Pour de grandes valeurs de n , la formule de Stirling :

$$n! \sim (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n} . \quad (6.9)$$

nous donne une approximation de la fonction *factorielle* $n!$ de n .

Exercice 6 :

Dans un groupe composé de cinq mathématiciens et sept physiciens on doit former une commission comprenant deux mathématiciens et trois physiciens. Quel est le nombre de possibilités si :

- la commission peut comprendre n'importe lequel des mathématiciens et des physiciens.
- Un physicien particulier doit être membre de la commission.
- Deux mathématiciens particuliers doivent être exclus de la commission.

Exercice 7 :

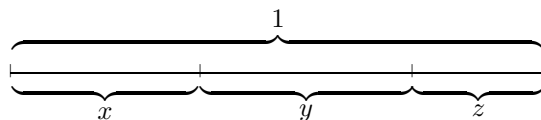
Evaluer la probabilité pour que n personnes ($n \leq 365$) choisies au hasard aient des dates de naissance différentes. Combien le groupe doit-il comprendre de membres pour que la probabilité de dates de naissance différentes soit inférieure à $1/2$.

Exercice 8 (statistique de Bose-Einstein) :

k particules indistinguables occupent un espace divisé en ℓ cellules numérotées de 1 à ℓ , des cellules vides étant permises. Montrer que le nombre n de configurations distinctes est égal à $C_k^{k+\ell-1}$. Déterminer la probabilité $P(m | k, \ell)$ que la première cellule contienne m particules.

Exercice 9 :

Une tige de longueur 1 est cassée en trois parties arbitraires x, y, z :



Trouver la probabilité pour que les tronçons obtenus permettent de composer un triangle.

Exercice 10 (Problème de Buffon) :

Un plan est divisé par des droites parallèles tracées à la distance L l'une de l'autre. Sur le plan on jette au hasard une aiguille (segment) de longueur $\ell < L$. Trouver la probabilité pour que l'aiguille croise l'une des droites. Imaginer une expérience permettant de déterminer π .

Exercice 11 :

Un jeu télévisé se présente de la manière suivante : trois portes sont disposées sur un plateau, derrière l'une d'elles se trouve un prix. Le candidat reçoit la récompense associée à la porte qu'il choisit (le prix ou rien). Le jeu se déroule de la manière suivante :

- (a) le candidat choisit une porte
- (b) avant d'ouvrir la porte proposée par le candidat, le présentateur du jeu ouvre une des deux portes non-désignées derrière laquelle il n'y a pas de prix et demande au candidat s'il maintient son choix initial ou s'il change d'idée.

Question : le candidat doit-il garder son premier choix ou changer d'idée ?

6.2 Variables aléatoires et distributions de probabilité.

Définition : Une *fonction aléatoire* est une application X qui associe à chaque point ω d'un espace d'échantillonnage Ω une valeur réelle. Souvent X possède une signification physique. On parle alors de *variable aléatoire* ou *variable stochastique*.

Définition : Si la variable aléatoire ne peut prendre qu'un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs on parlera de *variable aléatoire discrète* ; si les valeurs de X forment un continu, on parlera de *variable aléatoire continue*.

Soit X une variable aléatoire et Δ un sous-ensemble de \mathbb{R} (par exemple $\Delta = \{x_0\}$ un point, ou $\Delta = [a, b]$ un intervalle fini, ou $\Delta = (-\infty, x]$ un intervalle infini). L'ensemble des points ω de Ω qui sont appliqués par X dans Δ forme un sous-ensemble \mathcal{A}_Δ de Ω , donc un événement

$$\mathcal{A}_\Delta = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \Delta\}.$$

Pour toute mesure de probabilité P sur Ω on utilise la notation suggestive $P(X \in \Delta)$ pour la probabilité $P(\mathcal{A}_\Delta)$ de cet événement. Donc par exemple :

$$\begin{aligned} P(X = x_0) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_0\}), \\ P(X \leq x_0) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_0\}). \end{aligned}$$

6.2.1 Distributions de probabilités.

Soit Ω un espace d'échantillonnage muni d'une mesure de probabilité P . Considérons une variable aléatoire discrète X à valeurs dans \mathcal{J} (sous-ensemble fini ou infini dénombrable de \mathbb{R}). On définit la *fonction de probabilité* f de X par :

$$f(x) = P(X = x), \quad \text{pour } x \in \mathcal{J}. \quad (6.10)$$

Cette fonction satisfait

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{J} \quad (6.11)$$

et

$$\sum_{x \in \mathcal{J}} f(x) = 1. \quad (6.12)$$

Définition : La *fonction cumulative de distribution* ou *fonction de répartition* F pour la variable aléatoire X est définie par

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \text{pour } x \in \mathcal{J}. \quad (6.13)$$

Donc

$$F(x) = \sum_{u \leq x} f(u).$$

La fonction F est la probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x .

Ces notions se généralisent naturellement dans le cas d'une variable aléatoire X continue. Ceci revient à postuler l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \geq 0 \quad (6.14)$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (6.15)$$

appelée *densité de probabilité*. Alors

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (6.16)$$

est la *fonction de répartition* de X et on a

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

De plus, F est une fonction monotone croissante en x , telle que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) &= 1 \end{aligned}$$

L'interprétation de $f(x)$ pour une variable aléatoire continue X nécessite d'un détour par $F(x)$. De l'équation (6.16) nous pouvons conclure que la probabilité que $x_1 < X \leq x_2$ est

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Étudions maintenant la probabilité que X soit dans un intervalle infinitesimal de taille dx autour de x_0 . Admettons qu'il existe une expansion en somme de Taylor pour f autour de x_0 qui converge sur cet intervalle. Alors la probabilité que X soit dans cet intervalle est

$$P(x_0 - dx/2 < X \leq x_0 + dx/2) = \int_{x_0 - dx/2}^{x_0 + dx/2} f(u) du = f(x_0) dx + O(dx^3),$$

la densité de probabilité à ce point, $f(x_0)$, fois le volume de l'intervalle, dx .

Exercice 12 :

La densité de probabilité de la variable aléatoire X est $f(x) = c(x^2 + 1)^{-1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- Trouver la valeur de c .
- Calculer la probabilité pour que $1/3 \leq X^2 \leq 1$.
- Déterminer la fonction de répartition F .

6.2.2 Distributions jointes et conditionnelles.

On considère maintenant le cas de deux variables aléatoires qui peuvent être discrètes ou continues. Soit Ω un espace d'échantillonnage muni d'une mesure de probabilité P

Commençons par le cas discret. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathcal{J}_1 et \mathcal{J}_2 respectivement, alors on définit la *fonction de probabilité jointe* de X et Y par :

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\}) . \quad (6.17)$$

Elle satisfait

$$f(x, y) \geq 0 \quad (6.18)$$

et

$$\sum_{x \in \mathcal{J}_1} \sum_{y \in \mathcal{J}_2} f(x, y) = 1 . \quad (6.19)$$

La probabilité que l'événement " $X = x$ et $Y = y$ " ait lieu est donc $f(x, y)$.

La probabilité que $X = x$ est donnée par

$$f_1(x) = P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{J}_2} f(x, y) . \quad (6.20)$$

De même,

$$f_2(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{J}_1} f(x, y) \quad (6.21)$$

est la probabilité que $Y = y$

Définition : Les fonctions f_1 et f_2 sont appelées les *fonctions de probabilité marginales*.

Définition : La *fonction de répartition jointe* est définie par

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u, v) . \quad (6.22)$$

Exercice 13 :

La fonction de probabilité jointe de deux variables aléatoires discrètes X et Y s'écrit

$$f(x, y) = c(2x + y) ,$$

où $x \in \{0, 1, 2\}$ et $y \in \{0, 1, 2, 3\}$.

- Trouver c .
- Calculer $P(X = 2, Y = 1)$ et $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.
- Déterminer les fonctions de probabilité marginales pour X et Y .

La généralisation au cas des variables continues est immédiate :

Définition : La *fonction de répartition jointe* de X et Y est définie par

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) . \quad (6.23)$$

La *fonction de probabilité jointe* ou *densité de probabilité jointe* est une fonction f de deux variables telle que

$$f(x, y) \geq 0 \quad (6.24)$$

et

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y dv f(u, v) . \quad (6.25)$$

En particulier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv f(u, v) = 1 .$$

Si \mathcal{A} représente un événement quelconque, il lui correspond une région $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ du plan xy ($\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \{(X(\omega), Y(\omega)) | \omega \in \mathcal{A}\}$). La probabilité de cet événement sera :

$$P(\mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{R}_{\mathcal{A}}} f(x, y) dx dy . \quad (6.26)$$

Définition : Les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 et les densités de probabilité marginales f_1 et f_2 sont

$$F_1(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^{\infty} dv f(u, v) , \quad (6.27)$$

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^y dv f(u, v) , \quad (6.28)$$

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv , \quad (6.29)$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du . \quad (6.30)$$

A noter par exemple que F_1 n'est rien d'autre que la fonction de répartition de X et que f_1 est sa densité de probabilité.

Exercice 14 :

La densité de probabilité jointe de deux variables aléatoires continues X et Y vaut

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{si } 0 < x < 4 \text{ et } 1 < y < 5, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

- (a) Trouver $P(X \geq 3, Y \leq 2)$.
 (b) Trouver les fonctions de répartition marginales pour X et Y .

Variables aléatoires indépendantes.

Définition : Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont des *variables aléatoires indépendantes* si

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \quad (6.31)$$

ou si

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) . \quad (6.32)$$

La généralisation au cas des variables aléatoires continues donne :

Définition : Deux variables aléatoires continues X et Y sont des *variables aléatoires indépendantes* si

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \quad (6.33)$$

ou si

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}. \quad (6.34)$$

Exercice 15 :

Montrer que les variables aléatoires X et Y de l'exercice 13 sont dépendantes.

Changements de variables.

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors $U = g(X) \equiv g \circ X$ (donc $U(\omega) = g(X(\omega))$) pour $\omega \in \Omega$ est aussi une variable aléatoire et

$$P(U = u) = \sum_{\{x|g(x)=u\}} P(X = x). \quad (6.35)$$

Exercice 16 :

La fonction de probabilité d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\{1, 2, 3, \dots\}$ vaut $f(x) = 2^{-x}$. Trouver la fonction de probabilité pour la variable $U = X^4 + 1$.

Soit maintenant X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est f et considérons la nouvelle variable aléatoire $U = \phi(X)$, où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bijective. Alors :

Théorème 4 : La densité de probabilité $g(u)$ de U est

$$g(u) = f(x) \left| \frac{dx}{du} \right|, \quad \text{où } x = \phi^{-1}(u). \quad (6.36)$$

Considérons maintenant le cas de variables aléatoires continues X et Y dont la densité de probabilité jointe est f . On considère deux nouvelles variables aléatoires continues $U = \phi_1(X, Y)$ (donc $U(\omega) = \phi_1(X(\omega), Y(\omega))$) et $V = \phi_2(X, Y)$ telles qu'à tout couple (x, y) ne corresponde qu'un seul couple (u, v) . Alors :

Théorème 5 : La densité de probabilité jointe $g(u, v)$ de U et V est

$$g(u, v) = f(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|, \quad (6.37)$$

où $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ est le Jacobien de la transformation réciproque $(u, v) \mapsto (x, y)$.

Théorème 6 : La densité de probabilité g_1 de $U = \phi_1(X, Y)$ est obtenue par différentiation par rapport à u de la fonction G_1 définie par

$$G_1(u) = P(U \leq u) = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy \quad (6.38)$$

où \mathcal{R} est la région pour laquelle $\phi_1(x, y) \leq u$.

Exercice 17 :

Soit f la densité de probabilité jointe de deux variables aléatoires continues X et Y . Montrer que la densité de probabilité de la variable aléatoire $U = X + Y$ s'exprime comme

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, u - v) dv.$$

Exercice 18 :

Soient X et Y deux variables aléatoires de densité de probabilité jointe

$$f(x, y) = \begin{cases} c(2x + y) & \text{si } 2 < x < 6 \text{ et } 0 < y < 5, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

- Calculer les fonctions de répartition marginales de X et Y .
- Trouver la fonction de répartition jointe.
- Calculer les densités de probabilité marginales de X et Y .
- Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ou non ?
- Calculer $P(X + Y > 4)$.

Distributions conditionnelles.

Nous considérons le cas de variables aléatoires continues X et Y dont la densité de probabilité jointe est f .

Définition : La densité de probabilité conditionnelle de Y , étant donné $X = x$ (avec x fixé) est la fonction

$$f(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad (6.39)$$

où f_1 est la densité de probabilité marginale de X . Par convention, on pose $f(y | x) \equiv 0$ pour les x tels que $f_1(x) = 0$.

Exercice 19 :

Nous considérons le cas de variables aléatoires continues X et Y dont la densité de probabilité jointe vaut

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

- Calculer les densités de probabilité marginales de X et Y .
- Calculer les densités de probabilité conditionnelles de X et Y .
- X et Y sont-elles indépendantes ou non ?

Exercice 20 :

Deux personnes conviennent de se rencontrer entre 14 et 15 heures. Aucune des deux n'attendra l'autre plus d'un quart d'heure. Quelle est la probabilité que ces personnes se rencontrent ?

6.2.3 Moyenne et variance.

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble \mathcal{J} . L'espérance mathématique de X est donnée par

$$E(X) = \sum_{x \in \mathcal{J}} xP(X = x) = \sum_{x \in \mathcal{J}} xf(x) . \quad (6.40)$$

Si la variable aléatoire X est continue, alors on a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx . \quad (6.41)$$

Remarque : L'espérance mathématique, également appelée *moyenne*, est désignée par μ_X :

$$\mu_X = E(X) .$$

Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et si X est une variable aléatoire discrète, de fonction de probabilité f , alors

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{J}} g(x)f(x) , \quad (6.42)$$

alors que pour une variable aléatoire X continue :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx . \quad (6.43)$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires continues de densité de probabilité jointe f , l'espérance de $g(X, Y)$ sera

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y) dx dy . \quad (6.44)$$

Exercice 21 :

Montrer que :

(a) Si c est une constante, alors

$$E(cX) = cE(X) \quad \text{et} \quad E(X + c) = E(X) + c .$$

(b) Si X et Y sont des variables aléatoires quelconques, alors

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) .$$

(c) Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$E(XY) = E(X)E(Y) .$$

Définition : La *variance* de la variable aléatoire X est :

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] . \quad (6.45)$$

C'est un nombre non négatif dont la racine positive est appelée l'*écart-type*, notée σ_X . On a donc, pour une variable aléatoire discrète :

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in \mathcal{J}} (x - \mu_X)^2 f(x) \quad (6.46)$$

et pour une variable aléatoire continue :

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx . \quad (6.47)$$

L'écart-type caractérise la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de la valeur moyenne.

Exercice 22 :

Montrer que :

(a) $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$.

(b) Si c est une constante, alors

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X) .$$

(c) Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) .$$

Définition : Soit X une variable aléatoire de moyenne $\mu = \mu_X$ et d'écart-type $\sigma = \sigma_X$. La *variable aléatoire réduite* X_R est définie par

$$X_R = \frac{X - \mu}{\sigma} . \quad (6.48)$$

Par construction, $E(X_R) = 0$ et $\text{Var}(X_R) = 1$.

6.2.4 Moments et fonctions génératrices.

Définition : Pour $r = 0, 1, 2, \dots$, on appelle *moment d'ordre r relatif à la moyenne* de la variable aléatoire X la grandeur

$$\mu_r = E[(X - \mu_X)^r] .$$

En particulier, $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = \sigma_X^2$.

De même, on appelle *moment d'ordre r relatif à l'origine* de la variable aléatoire X la grandeur

$$\tilde{\mu}_r = E[X^r] .$$

Exercice 23 :

Etablir la relation entre $\tilde{\mu}_r$ et μ_r . Plus précisément :

- (a) Exprimer μ_r en termes des $\{\tilde{\mu}_k\}$.
- (b) Exprimer $\tilde{\mu}_r$ en termes des $\{\mu_k\}$.

Le calcul des moments est facilité par l'introduction de la *fonction génératrice des moments* :

$$M_X(t) = E[\exp(tX)] . \quad (6.49)$$

En effet :

$$\tilde{\mu}_r = \left. \frac{d^r M_X(t)}{dt^r} \right|_{t=0} . \quad (6.50)$$

Exercice 24 :

- (a) Etablir le résultat (6.50) ci-dessus.
- (b) Montrer que pour des constantes a et b ,

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at) .$$

- (c) Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$M_{X+Y} = M_X M_Y .$$

Exercice 25 :

La densité de probabilité de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Trouver la fonction génératrice des moments et calculer les quatre premiers moments relatifs à l'origine.

6.2.5 Variance des distributions jointes. Covariance.

Soient X et Y deux variables aléatoires continues de densité de probabilité jointe f . Les espérances et variances de X et Y sont respectivement :

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy , \quad (6.51)$$

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy , \quad (6.52)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f(x, y) dx dy , \quad (6.53)$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_Y)^2 f(x, y) dx dy . \quad (6.54)$$

Définition : On appelle *covariance* la grandeur

$$\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy . \quad (6.55)$$

Exercice 26 :

Montrer les relations suivantes :

- (a) $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$.
- (b) $\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2 \text{Cov}(X, Y)$.
- (c) $|\sigma_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y$.
- (d) Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

6.2.6 Inégalité de Chebychev.

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) de moyenne μ et variance σ^2 . Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} . \quad (6.56)$$

Exercice 27 :

Soit X la variable aléatoire de l'exercice 25. Evaluer $P(|X - \mu| > 1)$ et appliquer l'inégalité de Chebychev pour obtenir une borne supérieure. Comparer les deux résultats.

6.2.7 La loi des grands nombres.

Théorème 7 : Soient X_1, X_2, \dots des variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune de moyenne μ et variance σ^2 finies et soit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i . \quad (6.57)$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0 . \quad (6.58)$$

Donc, la probabilité pour que la moyenne arithmétique S_n/n s'écarte de μ de plus de ε tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

6.3 Quelques distributions de probabilité particulières.

Un certain nombre de distributions se rencontrent souvent en physique. Les principales sont :

6.3.1 La distribution binomiale.

Soient ω_1 et ω_2 les deux résultats possibles qui peuvent se réaliser avec les probabilités respectives p et $q = 1 - p$ au cours d'une expérience. Si le résultat est ω_1 , nous dirons que l'expérience est un *succès* et si le résultat est ω_2 , nous dirons que l'expérience est un *échec*.

Considérons alors la variable aléatoire X représentant le nombre de succès au cours de n expériences successives. L'espace d'échantillonnage est alors constitué des suites de n nombres 0 ou 1 représentant respectivement l'échec ou le succès de chacune des expériences et X prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$ correspondant au nombre de 1 dans la suite. La fonction de probabilité est alors donnée par :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{pour } x = 0, 1, \dots, n, \quad (6.59)$$

On dit que la variable aléatoire X suit une *distribution binomiale*. En effet, les valeurs de f pour $x = 0, 1, 2, \dots, n$ correspondent aux termes successifs du développement du binôme $(p + (1-p))^n$.

Exercice 28 :

Montrer que la distribution binomiale jouit des propriétés suivantes :

(a) Sa moyenne est :

$$\mu = np. \quad (6.60)$$

(b) Sa variance est (avec $q = 1 - p$) :

$$\sigma^2 = npq. \quad (6.61)$$

(c) Sa fonction génératrice est :

$$M(t) = (q + p \exp(t))^n. \quad (6.62)$$

(d) Dessiner la fonction de probabilité f pour

$$(i) n = 10, \quad p = 0.75, \quad (ii) n = 10, \quad p = 0.25, \quad (iii) n = 5, \quad p = 0.25.$$

Exercice 29 :

Une asymétrie gauche-droite a été mesurée dans une expérience dans laquelle N événements ont été accumulés (donc N est fixé, pas aléatoire). Soit G et D les nombres d'événements respectivement à gauche ou à droite (avec $N = G + D$). L'asymétrie a pour définition

$$\epsilon = \frac{G - D}{G + D} = \frac{2G}{N} - 1.$$

En considérant G comme la moyenne d'une variable aléatoire \mathcal{G} , trouvez la variance de la variable aléatoire $\mathcal{E} = \frac{2\mathcal{G}}{N} - 1$.

Exercice 30 :

Une pièce de monnaie est lancée 100 fois. Soit X le nombre de fois où pile a été obtenu. Pour quelles valeurs de X est-il "plausible" de dire que la pièce n'est pas truquée? Pour cela, vous devez d'abord imaginer un critère permettant de dire si une pièce est truquée ou non. Qu'en est-il si on lance la pièce 10000 fois?

6.3.2 La distribution multinomiale.

Soient $\omega_1, \dots, \omega_k$ les k résultats possibles qui peuvent se réaliser avec les probabilités respectives p_1, \dots, p_k (avec $p_1 + \dots + p_k = 1$) au cours d'une expérience. Si X_1, \dots, X_k sont les variables aléatoires qui donnent respectivement le nombre de fois que $\omega_1, \dots, \omega_k$ se réalisent sur un nombre total de n essais, alors la fonction de probabilité jointe pour X_1, \dots, X_k est :

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k} . \quad (6.63)$$

On a, comme pour la distribution binomiale :

$$\begin{aligned} E(X_i) &= np_i , \\ \sigma_{X_i}^2 &= np_i(1 - p_i) , \end{aligned} \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, k . \quad (6.64)$$

Exercice 31 :

Un sondage effectué auprès de 1000 personnes donne le résultat suivant :

Voterait pour le candidat A : 43%.

Voterait pour le candidat B : 39%.

Voterait pour un autre candidat : 18%.

Donner les incertitudes sur ces pourcentages (ce que ne font jamais les journaux qui publient ce genre de sondages).

6.3.3 La distribution de Poisson.

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \dots$ et soit $\lambda > 0$ une constante donnée. Cette variable suit une *distribution de Poisson de paramètre λ* si :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} . \quad (6.65)$$

Exercice 32 :

Montrer que la distribution de Poisson jouit des propriétés suivantes :

(a) Sa moyenne est :

$$\mu = \lambda . \quad (6.66)$$

(b) Sa variance est :

$$\sigma^2 = \lambda . \quad (6.67)$$

(c) Sa fonction génératrice est :

$$M(t) = \exp[\lambda(\exp t - 1)] . \quad (6.68)$$

(d) Dessinez la fonction de probabilité f pour

(i) $\lambda = 0.5$,

(ii) $\lambda = 2$,

(iii) $\lambda = 8$.

Exercice 33 :

Montrer que dans la limite $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ tel que $np = \lambda$ fixé, la distribution binomiale tend vers celle de Poisson.

Exercice 34 :

La probabilité d'une réaction allergique à un traitement donné est de 0.001. Trouver la probabilité pour que parmi 2000 personnes :

- (a) Exactement 3 aient des problèmes.
- (b) Plus de 2 personnes aient des problèmes.

Exercice 35 :

Supposons une source radioactive de particules α dont l'activité (intensité) est constante durant les 50 heures d'une expérience pendant laquelle on observe 19500 particules α .

- (a) Déterminer le nombre moyen de particules α observées par intervalle d'une minute.
- (b) Calculer la probabilité d'observer respectivement 0, 1 et 6 particules par intervalle de temps. En déduire le nombre d'intervalles dans lesquels on s'attend à trouver respectivement 0, 1 et 6 particules.

6.3.4 La distribution normale.

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans \mathbb{R} . Cette variable suit une *distribution normale* ou *distribution de Gauss* de moyenne μ et d'écart-type σ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{pour } -\infty < x < \infty. \quad (6.69)$$

Comme la distribution normale possède deux paramètres : la moyenne μ et la variance σ^2 , il est commode d'utiliser la notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour cette distribution.

La variable aléatoire réduite $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est distribuée selon la *distribution normale réduite* (notée $\mathcal{N}(0, 1)$) :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]. \quad (6.70)$$

La fonction de répartition correspondante est, pour $z \geq 0$:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du.$$

La fonction qui est usuellement tabulée est la fonction erf définie comme :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right] du, \quad \text{pour } z \geq 0. \quad (6.71)$$

(voir la page 77 pour des valeurs numériques de cette fonction).

Quelques valeurs importantes :

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 1) &= 0.6827, \\ P(-2 \leq Z \leq 2) &= 0.9545, \\ P(-3 \leq Z \leq 3) &= 0.9973. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Exercice 36 :

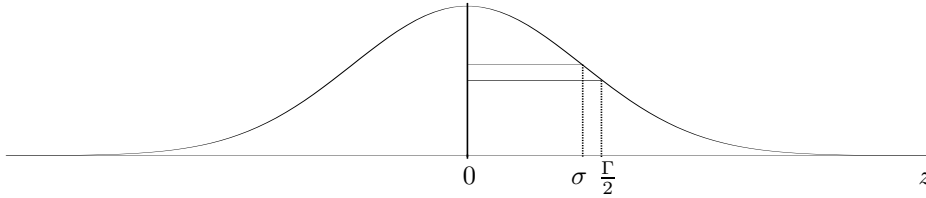
Montrer que la fonction génératrice de la distribution normale est :

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \quad (6.73)$$

Indication : Calculer d'abord la fonction génératrice de la distribution normale réduite et utiliser l'exercice 24 pour le cas général.

Exercice 38 :

Montrer que la demi-largeur à mi-hauteur ($\Gamma/2$) d'une gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est égale à $\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 1.18 \sigma$.

**Exercice 39 :**

Le temps de vie d'un tube électronique est distribué suivant une distribution gaussienne de moyenne $\mu = 1000$ heures. Quelle est la valeur maximale que peut prendre σ si le temps de vie du tube dépasse 900 heures dans 90% des cas ?

Exercice 40 :

Soit des variables aléatoires X_1, \dots, X_N indépendantes et normalement distribuées avec moyenne μ_i et variance σ_i^2 . Montrer que toutes les combinaisons linéaires des X_i sont aussi normalement distribuées.

Exercice 41 :

Trois résistances R_1, R_2 et R_3 (avec $\mu_1 = 5 [\Omega]$, $\mu_2 = 8 [\Omega]$, $\mu_3 = 12 [\Omega]$ et $\sigma_i^2 = 0.5 [\Omega^2]$ pour $i = 1, 2, 3$) sont choisies et connectées en série.

- Quelle est la probabilité que $R_1 + R_2 + R_3 > 26 [\Omega]$?
- Quelle est la probabilité que $23 [\Omega] < R_1 + R_2 + R_3 < 26 [\Omega]$?

Exercice 42 :

On fait livrer des sacs de ciment par un camion. Le poids de chaque sac est distribué suivant une distribution gaussienne de moyenne $\mu = 100 [\text{Kg}]$ et d'écart-type $\sigma = 5 [\text{Kg}]$. Si la charge maximale de ce camion est 4000 [Kg], combien peut-on transporter de sacs si l'on veut que la probabilité que la charge du camion dépasse 4000 [Kg] reste inférieure à 5% ?

Exercice 43 :

Un professeur doit corriger les examens écrits d'une classe de dix élèves. Il sait par expérience que le temps nécessaire pour corriger une copie est distribué suivant une distribution normale de moyenne 12 [min] et d'écart-type 8 [min]. Ce jour-là, il veut regarder le match de foot à la télé à 20h00.

- S'il commence à travailler à 19h00 et s'arrête à 20h00, estimer le nombre de copies corrigées.
- A quelle heure doit-il commencer ses corrections pour être sûr à 90% d'avoir corrigé toutes les copies pour 20h00 ?

6.3.5 La distribution khi-carré χ^2 .

Soient $X_1, X_2, X_3, \dots, X_\nu$ des variables aléatoires indépendantes normalement distribuées de moyenne 0 et variance 1. Soit :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2, \quad (6.74)$$

alors :

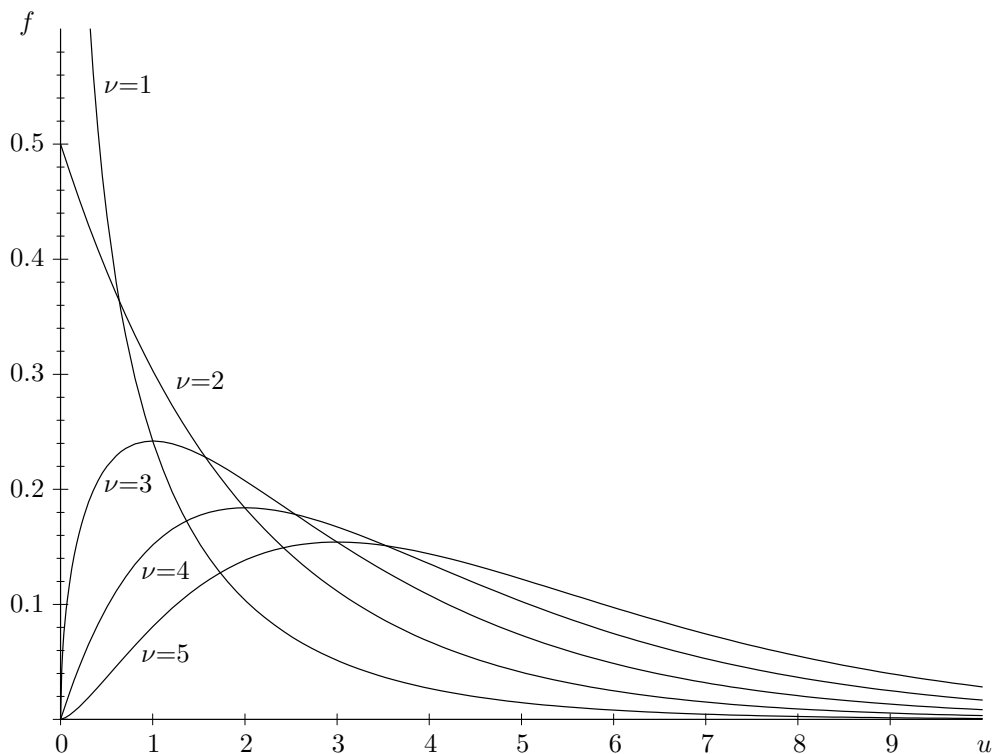
$$P(\chi^2 \leq y) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \int_0^y u^{(\nu/2)-1} e^{-u/2} du, \quad (6.75)$$

où ν est le nombre de degrés de liberté et Γ la fonction gamma qui obéit la relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ avec $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

La densité de probabilité correspondante est :

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} u^{(\nu/2)-1} e^{-u/2} & \text{si } u > 0, \\ 0 & \text{si } u \leq 0. \end{cases} \quad (6.76)$$

On dit que χ^2 suit une *distribution en khi-carré à ν degrés de liberté*. Voici quelques distributions du χ^2 :



On remarque que pour $\nu \geq 2$, le maximum de f est atteint en $x = \nu - 2$.

Exercice 44 :

Soit X une variable aléatoire réduite normalement distribuée. Montrer que X^2 est distribuée en χ^2 avec un degré de liberté. (Indication : calculer $P(X^2 < y)$ pour $y \in \mathbb{R}$).

Exercice 45 :

Montrer que la distribution en khi-carré à ν degrés de liberté jouit des propriétés suivantes :

(a) Sa fonction génératrice est :

$$M(t) = (1 - 2t)^{-\nu/2}, \quad \text{pour } t \leq \frac{1}{2}. \quad (6.77)$$

(b) Sa moyenne est :

$$\mu = \nu. \quad (6.78)$$

(c) Sa variance est :

$$\sigma^2 = 2\nu. \quad (6.79)$$

(d) Son skewness est :

$$\gamma_1 = 2\sqrt{\frac{2}{\nu}}. \quad (6.80)$$

(e) Son kurtosis est :

$$\gamma_2 = \frac{12}{\nu}. \quad (6.81)$$

Exercice 46 :

Une variable aléatoire X est *exponentielle négative* si

$$P(X > b) = \exp(-\alpha b) \quad \text{pour } b \geq 0. \quad (6.82)$$

Le paramètre $\alpha > 0$ s'interprète comme un "taux d'annihilation" (X pourrait être le chemin parcouru, jusqu'à annihilation, par une particule ionisée dans un blindage protecteur).

- (a) Quel est le domaine de définition de X ?
- (b) Quelle est la densité f_X ?
- (c) Trouver μ_X et σ_X^2 .
- (d) Calculer la probabilité conditionnelle

$$P(X > b + c \mid X > b).$$

pour $b, c > 0$.

Exercice 47 :

Idéalement, un générateur de "nombres aléatoires" simule les valeurs prises par des variables aléatoires successives X_1, X_2, \dots qui sont indépendantes et de *loi uniforme sur* $[0, 1]$, c'est-à-dire que pour chacune, la densité est

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On génère ainsi 1000 nombres au hasard. Le plus petit d'entre eux se comporte comme la variable aléatoire

$$M = \min\{X_1, \dots, X_{1000}\}.$$

- (a) Que vaut $P(M > 2/1000)$? Donner une approximation exponentielle.
- (b) Tirer plus généralement de l'expression pour

$$P(M > t) = \int_t^1 f_M(u) du,$$

la densité f_M .

- (c) Calculer μ_M .

6.3.6 Le théorème de la limite centrale.

Théorème 8 (Théorème de la limite centrale) : Soient X_1, X_2, X_3, \dots des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées dont la moyenne μ et la variance σ^2 sont finies. Soit :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad (6.83)$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du, \quad (6.84)$$

c'est-à-dire, la variable aléatoire réduite $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ est asymptotiquement normale.

Remarque : La condition "identiquement distribuées" peut être relaxée.

Exercice 48 :

Soit X une variable aléatoire suivant la distribution binomiale, avec paramètres n et p . X peut être considérée comme une somme de variables aléatoires :

$$X = X_1 + \dots + X_n,$$

où X_i est associée à l'issue du i -ème tirage. Vérifier le théorème de la limite centrale pour X , en montrant que la distribution binomiale tend vers la distribution normale lorsque $n \rightarrow \infty$.

6.4 Eléments de statistique.

Vu le temps imparti, nous ne traiterons que de quelques aspects particuliers de statistique. Il s'agit donc d'une introduction très incomplète.

6.4.1 Théorie de l'échantillonnage.

Le problème de base est essentiellement le suivant. On a un grand groupe d'objets (une population) que l'on veut étudier. On aimerait déduire les propriétés de la "population" en n'étudiant qu'une partie de celle-ci, soit un *échantillon*. Le premier problème est celui de l'*échantillonnage*, le second est le procédé de l'*inférence statistique*.

Un problème difficile est celui du choix d'un échantillon représentatif. Une possibilité consiste à donner à chaque élément de la population une chance égale. On parle alors d'*échantillon aléatoire*.

Ceci est typiquement le cas dans la physique expérimentale où la population consiste de tous les observations possibles pour une expérience. Chaque fois quand on répète l'expérience on tire de manière aléatoire une observation de la population. Le but est de déduire des propriétés de la population à partir d'un échantillon de taille finie.

Une population est considérée comme connue lorsque l'on connaît la distribution de probabilité $f(x)$ de la variable aléatoire retenue.

Exemple : X = taille (ou poids) des membres d'une population.

Statistique d'échantillonnage.

Un échantillon de taille n peut-être décrit par les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n . Toute grandeur obtenue à partir d'un échantillon dans le but d'estimer un paramètre d'une population est dit une *statistique d'échantillonnage*. Une statistique d'échantillonnage peut donc être considérée comme une fonction des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n et est donc aussi une fonction aléatoire. Il y a beaucoup de manières de former un échantillon de taille n . On peut donc considérer tous les échantillons possibles de taille n et calculer la statistique pour chacun d'eux. On obtient ainsi une *distribution d'échantillonnage* pour laquelle nous pouvons calculer les divers moments (moyenne, variance,...).

Distribution d'échantillonnage des moyennes.

Soit $f(x)$ la distribution de probabilité d'une population donnée dont nous tirons un échantillon de taille n . Nous voulons trouver une approximation pour la moyenne de la distribution. L'approche est toujours la même : il faut définir une statistique relié à la quantité d'intérêt. Dans le cas de la moyenne de la population, une possibilité est la moyenne arithmétique des x_i de l'échantillon :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Alors les résultats suivants sont vrais :

1.) La moyenne de la distribution d'échantillonnage des moyennes, est égale à la moyenne μ de la population (alors \bar{X} est une statistique *non-biaisé* de μ).

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (6.85)$$

2.) Si la population est infinie, de variance σ^2 , alors la variance de la distribution des moyennes vaut :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (6.86)$$

3.) Si la population est de taille N , alors la variance de la distribution des moyennes devient :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad (6.87)$$

4.) Si la population est normalement distribuée (moyenne = μ , variance = σ^2), alors la moyenne de l'échantillon est normalement distribuée avec une moyenne μ et une variance $\frac{\sigma^2}{n}$.

Distribution d'échantillonnage des fréquences.

Soit une population infinie normalement distribuée et soit p la probabilité pour un membre de la population de présenter ou non une propriété donnée.

Considérons tous les échantillons de taille n extraits de cette population et considérons la statistique relative à la proportion de succès. Ceci correspond donc à une distribution binomiale. La moyenne de la distribution d'échantillonnage des fréquences est alors :

$$\mu_P = p \quad (6.88)$$

et sa variance :

$$\sigma_P^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (6.89)$$

Distribution d'échantillonnage des sommes et différences.

Soient deux populations.

Soit S_1 une statistique pour chaque échantillon de taille n_1 tiré de la première, de moyenne μ_{S_1} et d'écart-type σ_{S_1} . De même pour S_2 .

Alors, en prenant toutes les combinaisons possibles de ces échantillons nous pouvons obtenir une distribution des différences dite *distribution d'échantillonnage des différences*. La moyenne et l'écart-type sont alors :

$$\mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \quad (6.90)$$

et :

$$\sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \quad (6.91)$$

Si l'on considère la somme, nous obtenons la *distribution d'échantillonnage des sommes* et :

$$\mu_{S_1+S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} \quad (6.92)$$

et :

$$\sigma_{S_1+S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \quad (6.93)$$

Distribution d'échantillonnage des variances.

En prenant tous les échantillons aléatoires possible de taille n d'une population et en calculant la variance de chacun d'eux, nous obtenons la distribution d'échantillonnage des variances. Alors la variable aléatoire :

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{\sigma^2} \quad (6.94)$$

est distribuée en chi-carré avec $(n - 1)$ degrés de liberté. La statistique S^2 définie ci-dessus n'est pas un estimateur non-biaisé pour la variance de la population, σ^2 , si la moyenne est inconnue et est aussi dérivée par les données. La raison est qu'il faut estimer deux quantités, la moyenne et la variance. Un estimateur non-biaisé est alors donné par

$$\tilde{S}^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad (6.95)$$

(Si la différence est importante il vaut probablement mieux ne pas se fier trop aux résultats !)

Exercice 49 :

500 billes ont un poids moyen de 5.02 grammes et un écart-type de 0.30 g. Trouver la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 100 billes ait un poids total :

- 1) compris entre 496 et 500 g.
- 2) supérieur à 510 g.

Exercice 50 :

Un candidat aux élections a recueilli 46% des votes. Quelle est la probabilité pour qu'un groupe de :

- 1) 200 personnes
- 2) 1000 personnes choisies au hasard lui ait donné une majorité ?

Exercice 51 :

Deux fabricants différents produisent des ampoules électriques.

- a) Les "A" ont une durée de vie moyenne de 1400 heures avec un écart-type de 200 heures.
- b) Les "B" ont une durée de vie moyenne de 1200 heures avec un écart-type de 100 heures.

Si l'on teste des échantillons aléatoires de 125 ampoules, quelle est la probabilité pour que les ampoules "A" aient une durée moyenne de vie :

- 1). au moins supérieure de 160 heures aux ampoules de B ?
- 2). au moins supérieure de 250 heures aux ampoules de B ?

Exercice 52 :

Un échantillon de 6 observations est constitué aléatoirement à partir d'une population de densité de probabilité $f(x)$. Quelle est la probabilité pour que les deux dernières observations soient inférieures aux quatre premières ?

6.4.2 Théorie de l'estimation.

L'estimation d'un paramètre de population donnée par une valeur unique est dite estimation ponctuelle. Si l'estimation est comprise entre deux valeurs, on parle d'*estimation par intervalle*.

Estimation par intervalle de confiance.

Soient μ_S et σ_S la moyenne et l'écart-type de la distribution d'échantillonnage d'une statistique. Si la taille de l'échantillon est assez grande (plus que 30) alors la distribution d'échantillonnage de S sera approximativement gaussienne (à cause du théorème de la limite centrale). On peut espérer trouver S dans les intervalles $\mu_S \pm m\sigma_S$ avec probabilité 68, 27%, 95, 45% et 99, 73% respectivement pour $m = 1, 2, 3$. Le pourcentage de confiance est aussi appelé niveau de confiance. Il y correspond une valeur de z_c (argument de la fonction erf) donnée, appelée coefficient de confiance ou valeur critique (voir table).

Intervalles de confiance des moyennes.

Si l'on considère la statistique de la moyenne d'échantillon (de taille $n \geq 30$), \bar{X} , alors les limites de confiance de la moyenne d'une population (pour un niveau de confiance donné) sont :

$$\bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6.96)$$

Exercice 53 :

On mesure le diamètre des billes d'un échantillon de 200 pièces. La moyenne est de 8,24 mm pour un écart-type de 0.42 mm. Evaluer les limites de confiance à 95% et 99% pour le diamètre moyen des billes.

Exercice 54 :

Pour qu'une mine d'or soit rentable il faut que 100g d'or soient produit par tonne de minerai. Avant d'acheter le terrain, vous faites quelques tests. Quatre échantillons ont fourni 126g, 137g, 104g et 93g.

a) En supposant $\sigma = 20$ g, peut-on exclure une moyenne de 100g (et alors toutes les moyennes plus petites) avec un niveau de confiance de 90% ? Combien d'échantillons faut-il considérer pour exclure une moyenne de 100g avec un niveau de confiance de 99% ?

b) Considérez-vous la mine toujours rentable (avec un niveau de confiance de 90%) si la variance est inconnue ?

Intervalles de confiance des fréquences.

Si l'on considère la statistique qui représente le pourcentage de réussite dans un échantillon de taille $n \geq 30$, tiré d'une population binomiale où p est la probabilité de réussite, alors les limites de confiance pour p sont données par :

$$P \pm z_c \sigma_p \quad (6.97)$$

Exercice 55 :

Un échantillon de 100 électeurs choisis aléatoirement dans une population indique que 55% a voté pour Dupont. Evaluer les limites de confiance à 95%, 99%, 99,73% pour la fréquence de toute la population en faveur de ce candidat.

Intervalles de confiance des différences et des sommes.

Si S_1 et S_2 sont deux statistiques d'échantillonnage avec des distributions normales, les limites de confiance pour les différences de paramètres représentés par S_1 et S_2 sont :

$$S_1 - S_2 \pm z_c \sigma_{S_1 - S_2} \quad (6.98)$$

et dans le cas d'une somme :

$$S_1 + S_2 \pm z_c \sigma_{S_1 + S_2} \quad (6.99)$$

Exercice 56 :

La force électromotrice d'accumulateurs est de 45.1 V pour un écart-type de 0.04 V. On monte 4 accumulateurs en série. Calculer les limites de confiance à 95%, 50% pour la force électromotrice totale.

Intervalles de confiance des variances.

Le fait que nS^2/σ^2 ait une distribution en χ^2 à $n - 1$ degrés de liberté permet d'obtenir les limites de confiance pour σ^2 et σ .

6.4.3 Utilisation du khi-carré : Ajustement de courbes.

Nous disposons de N points expérimentaux (x_i, y_i, σ_i) , tels que x_i est une variable *indépendante connue* et y_i est la quantité mesurée avec une erreur (*déviaton standard*) σ_i . Si l'on porte les mesures sur un diagramme (x, y) , il est alors souvent possible de mettre en évidence une courbe continue suivant approximativement les données. C'est la *courbe d'ajustement*. Le but est d'obtenir l'expression des y_i en fonction des x_i . Cette opération d'estimation s'appelle une *régression*. Il se peut que plusieurs courbes représentent le même ensemble de données : droite, parabole, etc. Il faut alors choisir la *meilleure courbe*, où le sens de "meilleur" reste à déterminer.

On suppose que les y_i sont des *variables aléatoires normalement distribuées* avec variance σ_i^2 et moyenne $p(x_i; \underline{c})$, où $p(x_i; \underline{c})$ est une fonction des x_i et de r paramètres $\underline{c} = (c_1, \dots, c_r)$.

Pour ces N points, on définit

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - p(x_i; \underline{c})]^2}{\sigma_i^2} \quad (6.100)$$

et on cherche à déterminer la *meilleure* estimation \underline{c}^* des paramètres \underline{c} .

Puisque les y_i sont normalement distribuées, l'équation (6.100) suit bien une distribution en χ^2 avec ν degrés de liberté : Si on part de N points expérimentaux et de r paramètres,

$$\nu = N - r. \quad (6.101)$$

Dans cette approche, on doit considérer deux opérations absolument distinctes :

Calcul de la meilleure estimation des paramètres \underline{c}^* .

Pour cela on cherche les valeurs de \underline{c} qui minimisent l'équation (6.100), c'est-à-dire, on calcule

$$\left. \frac{\partial \chi^2}{\partial c_k} \right|_{\underline{c}=\underline{c}^*} = 0 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r. \quad (6.102)$$

On a donc autant d'équations que de paramètres.

Test de l'hypothèse avec un niveau de confiance α .

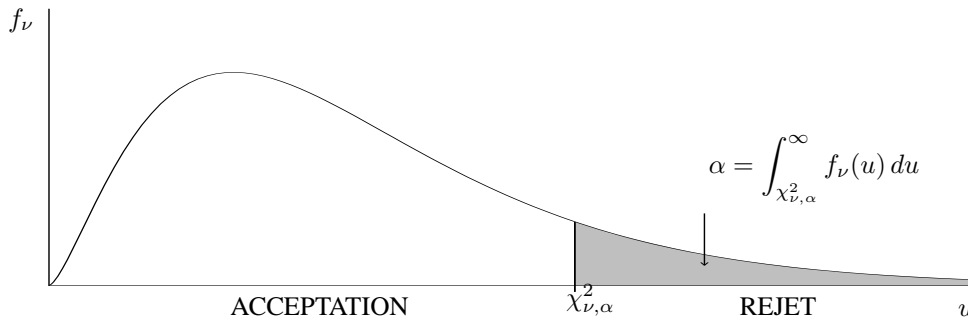
On doit vérifier que l'hypothèse $y_i = p(x_i; \underline{c})$ est bonne. Pour cela on se sert de la valeur que prend l'équation (6.100) au minimum, i.e. quand $\underline{c} = \underline{c}^*$, soit $\chi_{\min}^2(\underline{c}^*)$, que l'on compare avec la valeur $\chi_{\nu, \alpha}^2$ déterminée par le *niveau de confiance* α (en général, $\alpha = 5\%$) :

$$\alpha = \int_{\chi_{\nu, \alpha}^2}^{\infty} f_{\nu}(u) du \quad (6.103)$$

et obtenue à l'aide d'une table numérique (voir page 88).

On a deux possibilités :

- si $\chi_{\min}^2(\underline{c}^*) \leq \chi_{\nu, \alpha}^2$, on accepte l'hypothèse,
- si $\chi_{\min}^2(\underline{c}^*) > \chi_{\nu, \alpha}^2$, on rejette l'hypothèse.



Une quantité à connaître aussi est l'erreur sur \underline{c}^* . Pour cela, faisons un développement du χ^2 autour de sa valeur minimale. On obtient

$$\chi^2(\underline{c}) = \chi_{\min}^2(\underline{c}^*) + \sum_{k=1}^r \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial c_k} \right|_{\underline{c}=\underline{c}^*} (c_k - c_k^*) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_j \partial c_k} \right|_{\underline{c}=\underline{c}^*} (c_j - c_j^*)(c_k - c_k^*) + \dots$$

Or d'après l'équation (6.102), le deuxième terme de ce développement est nul. Il reste donc

$$\chi^2(\underline{c}) = \chi_{\min}^2(\underline{c}^*) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_j \partial c_k} \right|_{\underline{c}=\underline{c}^*} (c_j - c_j^*)(c_k - c_k^*) + \dots \quad (6.104)$$

Ceci est l'équation d'un parabolôïde en $r + 1$ dimensions si l'on néglige les termes d'ordre > 2 ou dans le cas d'un fit linéaire (*i.e.* quand $p(x_i; \underline{c})$ est une fonction linéaire en \underline{c}).

Considérons la matrice $r \times r$ suivante

$$\mathcal{H}(\underline{c}^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_1 \partial c_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_r \partial c_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_r^2} \end{pmatrix}. \quad (6.105)$$

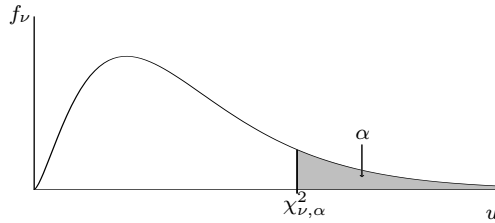
La matrice d'erreur \mathcal{V} qui définit les variances $\sigma^2(c_k^*)$ et les covariances $\text{Cov}(c_j^*, c_k^*)$ est donnée par

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \sigma^2(c_1^*) & \cdots & \text{Cov}(c_1^*, c_r^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(c_r^*, c_1^*) & \cdots & \sigma^2(c_r^*) \end{pmatrix} \equiv \{\mathcal{H}(\underline{c}^*)\}^{-1}. \quad (6.106)$$

Remarquons que la matrice \mathcal{V} est symétrique.

Table des valeurs $\chi_{\nu,\alpha}^2$ pour la loi de khi-carré avec ν degrés de liberté :

$$\alpha = \int_{\chi_{\nu,\alpha}^2}^{\infty} f_{\nu}(u) du$$



| $\alpha \backslash \nu$ | 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.950 | 0.900 | 0.750 | 0.500 | 0.250 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0.00004 | 0.00016 | 0.00098 | 0.00393 | 0.01579 | 0.1015 | 0.4549 | 1.323 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.83 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.1026 | 0.2107 | 0.5754 | 1.385 | 2.773 | 4.605 | 5.991 | 7.378 | 9.210 | 10.60 | 13.82 |
| 3 | 0.0717 | 0.1148 | 0.2158 | 0.3518 | 0.5844 | 1.213 | 2.366 | 4.108 | 6.251 | 7.815 | 9.348 | 11.34 | 12.84 | 16.27 |
| 4 | 0.2070 | 0.2971 | 0.4844 | 0.7107 | 1.064 | 1.923 | 3.357 | 5.385 | 7.779 | 9.488 | 11.14 | 13.28 | 14.86 | 18.47 |
| 5 | 0.4117 | 0.5543 | 0.8312 | 1.145 | 1.610 | 2.675 | 4.351 | 6.626 | 9.236 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 | 20.52 |
| 6 | 0.6757 | 0.8721 | 1.2373 | 1.635 | 2.204 | 3.455 | 5.348 | 7.841 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 | 22.46 |
| 7 | 0.9893 | 1.239 | 1.690 | 2.167 | 2.833 | 4.255 | 6.346 | 9.037 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 | 24.32 |
| 8 | 1.344 | 1.646 | 2.180 | 2.733 | 3.490 | 5.071 | 7.344 | 10.22 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.96 | 26.12 |
| 9 | 1.735 | 2.088 | 2.700 | 3.325 | 4.168 | 5.899 | 8.343 | 11.39 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 | 27.88 |
| 10 | 2.156 | 2.558 | 3.247 | 3.940 | 4.865 | 6.737 | 9.342 | 12.55 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 | 29.59 |
| 11 | 2.603 | 3.053 | 3.816 | 4.575 | 5.578 | 7.584 | 10.34 | 13.70 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 | 31.26 |
| 12 | 3.074 | 3.571 | 4.404 | 5.226 | 6.304 | 8.438 | 11.34 | 14.85 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 | 32.91 |
| 13 | 3.565 | 4.107 | 5.009 | 5.892 | 7.041 | 9.299 | 12.34 | 15.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 | 34.53 |
| 14 | 4.075 | 4.660 | 5.629 | 6.571 | 7.790 | 10.17 | 13.34 | 17.12 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 | 36.12 |
| 15 | 4.601 | 5.229 | 6.262 | 7.261 | 8.547 | 11.04 | 14.34 | 18.25 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 | 37.70 |
| 16 | 5.142 | 5.812 | 6.908 | 7.962 | 9.312 | 11.91 | 15.34 | 19.37 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 | 39.25 |
| 17 | 5.697 | 6.408 | 7.564 | 8.672 | 10.09 | 12.79 | 16.34 | 20.49 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 | 40.79 |
| 18 | 6.265 | 7.015 | 8.231 | 9.390 | 10.86 | 13.68 | 17.34 | 21.60 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 | 42.31 |
| 19 | 6.844 | 7.633 | 8.907 | 10.12 | 11.65 | 14.56 | 18.34 | 22.72 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 | 43.82 |
| 20 | 7.434 | 8.260 | 9.591 | 10.85 | 12.44 | 15.45 | 19.34 | 23.83 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 | 45.32 |
| 21 | 8.034 | 8.897 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 16.34 | 20.34 | 24.93 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 | 46.80 |
| 22 | 8.643 | 9.542 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 17.24 | 21.34 | 26.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 | 48.27 |
| 23 | 9.260 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 18.14 | 22.34 | 27.14 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 | 49.73 |
| 24 | 9.886 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 19.04 | 23.34 | 28.24 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 | 51.18 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 19.94 | 24.34 | 29.34 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 | 52.62 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 20.84 | 25.34 | 30.43 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 | 54.05 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 21.75 | 26.34 | 31.53 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 | 55.48 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 22.66 | 27.34 | 32.62 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 | 56.89 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 23.57 | 28.34 | 33.71 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 | 58.30 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 24.48 | 29.34 | 34.80 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 | 59.70 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 33.65 | 39.34 | 45.62 | 51.80 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 | 73.40 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 42.94 | 49.33 | 56.33 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 | 86.66 |
| 60 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 45.46 | 52.29 | 59.33 | 66.98 | 74.40 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 | 99.61 |
| 70 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 55.33 | 61.70 | 69.33 | 77.58 | 85.53 | 90.53 | 95.02 | 100.4 | 104.2 | 112.3 |
| 80 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 64.28 | 71.14 | 79.33 | 88.13 | 96.58 | 101.9 | 106.6 | 112.3 | 116.3 | 124.8 |
| 90 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 73.29 | 80.62 | 89.33 | 98.65 | 107.6 | 113.1 | 118.1 | 124.1 | 128.3 | 137.2 |
| 100 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 82.36 | 90.13 | 99.33 | 109.1 | 118.5 | 124.3 | 129.6 | 135.8 | 140.2 | 149.4 |

Fit à un paramètre.

Quand on n'a qu'un seul paramètre c , l'équation (6.100) devient

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - p(x_i; c)]^2}{\sigma_i^2} .$$

On obtient c^* , la meilleure estimation du paramètre, à l'aide de (6.102) :

$$0 = \left. \frac{d\chi^2}{dc} \right|_{c=c^*} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - p(x_i; c)}{\sigma_i^2} \left. \frac{dp(x_i; c)}{dc} \right|_{c=c^*} . \quad (6.107)$$

On obtient la variance sur c^* à l'aide de (6.106) :

$$\sigma^2(c^*) = \left\{ \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\chi^2}{dc^2} \right|_{c=c^*} \right\}^{-1} . \quad (6.108)$$

Dans ce cas particulier, l'équation (6.104) s'écrit

$$\chi^2(c) - \chi_{\min}^2(c^*) = \left\{ \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\chi^2}{dc^2} \right|_{c=c^*} \right\} (c - c^*)^2 = [\sigma^2(c^*)]^{-1} (c - c^*)^2 .$$

Si l'on évalue l'équation précédente au point $c = c^* \pm \sigma(c^*)$ on a

$$\chi^2(c^* \pm \sigma(c^*)) - \chi_{\min}^2(c^*) = 1 . \quad (6.109)$$

On peut donc trouver c^* et $\sigma(c^*)$ à partir du graphique de χ^2 en fonction de c . Au point c^* , la fonction est minimale, tandis qu'au point $c^* \pm \sigma(c^*)$ la fonction vaut $\chi_{\min}^2(c^*) + 1$.

Exercice 57 :

On dispose de deux balances, dont l'une (B_2) est plus précise que l'autre (B_1). On dispose aussi de n pièces de monnaie de 1 Fr. des années 1964 et 1970. On pèse ces pièces sur les deux balances. Les résultats sont tabulés et l'on obtient les valeurs suivantes pour les moyennes $y(B_\ell)$ et leurs erreurs $\sigma(B_\ell)$ correspondant aux deux balances :

| année | $y(B_1)$ | $\sigma(B_1)$ | $y(B_2)$ | $\sigma(B_2)$ |
|-------|----------|---------------|----------|---------------|
| 1964 | 3.0733 | 0.0205 | 3.0806 | 0.0080 |
| 1970 | 3.0968 | 0.0183 | 3.1045 | 0.0059 |

Tester l'hypothèse $y_{1964}(B_\ell) = y_{1970}(B_\ell) = \mu$ séparément pour les mesures faites avec les deux balances.

Fit à plusieurs paramètres.

La méthode est la même que précédemment, mais ici on doit en plus tenir compte de la corrélation entre les estimations qui est donnée par les termes non-diagonaux de la matrice d'erreur (6.106).

Ici nous allons traiter en détail le *fit d'une droite*.

Exercice 58 :

Montrer que si toutes les mesures expérimentales sont effectuées avec la même précision, les meilleures estimations des paramètres a et b de la droite d'ajustement

$$y = a + bx , \quad (6.110)$$

sont

$$a^* = \frac{\left(\sum_i y_i\right)\left(\sum_j x_j^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j x_j y_j\right)}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}, \quad (6.111)$$

$$b^* = \frac{N \sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j y_j\right)}{N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}. \quad (6.112)$$

Exercice 59 :

Si la précision des mesures est différente, l'équation (6.100) devient

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (a + bx_i)]^2}{\sigma_i^2}. \quad (6.113)$$

Montrer que la meilleure estimation des paramètres a et b , donnée par (6.102), est

$$a^* = \frac{CD - AE}{BD - A^2}, \quad (6.114)$$

$$b^* = \frac{BE - AC}{BD - A^2}, \quad (6.115)$$

où l'on a défini les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}, & B &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}, & C &= \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \\ D &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, & E &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, & F &= \sum_{i=1}^N \frac{y_i^2}{\sigma_i^2}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

De même, montrer que la matrice d'erreur \mathcal{V} définie par (6.106) est donnée par

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} B & A \\ A & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{BD - A^2} \begin{pmatrix} D & -A \\ -A & B \end{pmatrix}. \quad (6.117)$$

Exercice 60 :

On considère les six points expérimentaux suivants :

| | | | | | | |
|------------|------|------|------|-------|-------|-------|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y_i | 0.92 | 4.15 | 9.78 | 14.46 | 17.26 | 21.90 |
| σ_i | 0.50 | 1.00 | 0.75 | 1.25 | 1.00 | 1.50 |

Trouver l'équation de la droite d'ajustement, déterminer les erreurs sur les estimations et vérifier que l'hypothèse du fit linéaire est raisonnable (niveau de confiance $\alpha = 5\%$).

Exercice 61 :

On veut ajuster les données (x_i, y_i) avec une parabole d'équation :

$$y = a + bx + cx^2 . \quad (6.118)$$

Montrer que si toutes les mesures expérimentales sont effectuées avec la même précision, les meilleures valeurs des paramètres sont données par les conditions :

$$\sum_i y_i = a^* N + b^* \sum_i x_i + c^* \sum_i x_i^2 , \quad (6.119)$$

$$\sum_i x_i y_i = a^* \sum_i x_i + b^* \sum_i x_i^2 + c^* \sum_i x_i^3 , \quad (6.120)$$

$$\sum_i x_i^2 y_i = a^* \sum_i x_i^2 + b^* \sum_i x_i^3 + c^* \sum_i x_i^4 . \quad (6.121)$$

Linéarisation des problèmes non linéaires.

Quelquefois, quand on rencontre les problèmes où la dépendance des mesures y_i n'est pas une fonction linéaire des paramètres, on peut faire une transformation de variables $z_i = g(y_i)$ pour linéariser le problème. Considérons par exemple la fonction

$$y(x; \theta_1, \theta_2) = \theta_1 \exp(-\theta_2 x) ,$$

où θ_1 et θ_2 sont des paramètres. On prend

$$z = \ln y = \ln \theta_1 - \theta_2 x \equiv c_1 + c_2 x .$$

Donc z est linéaire en $\underline{c} = (c_1, c_2) = (\ln \theta_1, -\theta_2)$.

On doit faire la remarque suivante : les erreurs statistiques des variables $z_i = g(y_i)$ n'ont pas la même distribution que celles des y_i . Il faut utiliser la formule de propagation d'erreur pour faire le calcul :

$$\sigma^2(z_i) \approx \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_i} \right)^2 \sigma^2(y_i) , \quad \text{pour } i = 1, \dots, N. \quad (6.122)$$

Exercice 62 :

Une source radioactive a N_0 noyaux au temps $t = 0$. Elle se désintègre suivant la loi suivante :

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) .$$

On effectue les mesures suivantes :

| | | | | | | | | | | |
|-----------------|-----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| essai numéro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| temps t_i | 0 | 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 | 135 |
| #coups/15 [sec] | 106 | 80 | 98 | 75 | 74 | 73 | 49 | 38 | 37 | 22 |

L'erreur sur le nombre de coups N est égal à \sqrt{N} . Déterminer la meilleure estimation du paramètre τ et son erreur, à l'aide d'un fit linéaire.

6.4.4 Inférence Bayésienne

Règles de base

Les règles de base du calcul Bayésien découlent des résultats probabilistes suivants que nous avons vus auparavant. Soient X et Y deux variables aléatoires. Nous écrivons $P(x)$ pour la fonction de probabilité $P(X = x)$. Alors

- (a) **Règle du produit** (voir Eq. (6.4) et Eq. (6.39))

$$P(x, y) = P(x)P(y|x) = P(y)P(x|y) \quad (6.123)$$

- (b) **Marginalisation** : (voir Eq. (6.21))

$$P(y) = \sum_{x \in \mathcal{J}_x} P(x, y) \quad (6.124)$$

Ici nous remplaçons $x \rightarrow \theta$ (les paramètres) et $y \rightarrow D$ (les données). Nous introduisons en plus le modèle \mathcal{M} . La première règle peut alors être re-écrite sous la forme de **l'équation de Bayes**,

$$P(\theta|D, \mathcal{M}) = \frac{P(D|\theta, \mathcal{M})P(\theta|\mathcal{M})}{P(D|\mathcal{M})} \quad (6.125)$$

Chaque expression dans cette équation a un nom spécifique :

- $P(\theta|D, \mathcal{M})$ est la *probabilité postérieure*. C'est la fonction de probabilité pour les paramètres du modèle et donc le résultat recherché.
- $P(D|\theta, \mathcal{M})$ est le *likelihood*, et est souvent écrit en fonction des paramètres comme $\mathcal{L}(\theta)$. C'est la probabilité d'observer les données D pour un modèle \mathcal{M} et avec les paramètres θ donnés. Ceci est déterminé par l'expérience. Pour des données tirées d'une variable aléatoire normale comme décrit dans l'Eq. (6.100) le likelihood est proportionnel à $\exp(-\chi^2/2)$ et normalisé tel que l'intégrale sur les y_i donne 1.
- $P(\theta|\mathcal{M})$ est la *probabilité a priori* des paramètres, donc la probabilité avant de faire l'expérience. Cela s'appelle souvent *prior*. En l'absence de connaissances sur les paramètres, il faut choisir cette expression de manière à ce que leur contenu d'information soit minimal. Les deux exemples typiques sont les paramètres de location avec $P(\theta|\mathcal{M})$ constant et les paramètres d'échelle où $P(\theta|\mathcal{M}) \propto 1/\theta$.
- $P(D|\mathcal{M})$ est important pour comparer des modèles différents et nous allons discuter ce facteur plus tard. Toutefois il est constant pour un modèle et des données fixes et n'influence pas la probabilité postérieure.

Avec l'équation de Bayes nous pouvons donc dériver la probabilité postérieure des paramètres. Si nous ne sommes pas intéressés par certains des paramètres, nous pouvons les marginaliser en les intégrant. L'exemple suivant illustre explicitement tous ces concepts.

Exemple : Inférence Bayésienne de la moyenne et variance pour une distribution normale

Nous avons présenté plus tôt les deux différents estimateurs pour la variance, S et \tilde{S} . Nous allons maintenant les dériver par inférence Bayésienne. Ceci met en évidence une des différences principales entre l'approche fréquentiste et l'approche Bayésienne. Dans la première, il faut construire des estimateurs et évaluer leurs propriétés, ce qui est un processus mal défini. Souvent ces estimateurs découlent de manière naturelle d'un calcul Bayésien.

Alors soient $\{x_i\}_{i=1}^n$ des données tirées d'une distribution normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ avec μ et σ inconnus. Il nous faut des probabilités a priori pour ces paramètres. En l'absence d'autres informations il faut choisir des priors non-informatifs. La moyenne est clairement un paramètre de location, avec une reparamétrisation naturelle $\mu \rightarrow \mu + c$, son prior est alors plat. La variance est toujours positive, et c'est son échelle qui est inconnue. Donc son prior est $1/\sigma$. Ces priors sont impropres, mais la distribution normale les régularise de manière suffisante. Toutefois, il est possible de définir des priors propres au prix de compliquer les calculs.

Nous allons toutefois introduire un facteur constant $1/\Delta_\mu$ qui décrit la largeur du prior sur μ , mais qui peut être arbitrairement petit.

Le likelihood est le produit d'une distribution normale pour chaque x_i pour σ et μ connus et constants,

$$P(\{x_i\}_{i=1}^n | \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (6.126)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ - \frac{n(\mu - \bar{x})^2 + nS^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (6.127)$$

Donc \bar{x} et S (ou \tilde{S}) suffisent pour décrire cette situation. La probabilité postérieure est alors

$$P(\mu, \sigma | \{x_i\}_{i=1}^n) = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ - \frac{n(\mu - \bar{x})^2 + nS^2}{2\sigma^2} \right\} \frac{1}{\Delta_\mu} \frac{1}{\sigma}}{P(\{x_i\}_{i=1}^n)} \quad (6.128)$$

Cette fonction décrit nos connaissances sur μ et σ pour des données et priors données. Il est possible de calculer les paramètres qui maximisent le postérieur, même si ce n'a pas d'importance particulière dans le calcul Bayésien. Dans la base $\{\mu, \ln \sigma\}$ les priors sont plats et le maximum du postérieur est le même que le maximum du likelihood. Le maximum du likelihood est à $\{\bar{x}, \sigma = S\}$.

Exercice 63 :

Calculer la distribution postérieure pour μ si σ est connu. Démontrer qu'elle est proportionnelle à une distribution normale autour de \bar{x} avec un écart-type de σ/\sqrt{n} .

La prochaine question est : Avec les données et les priors non-informatifs, quel est σ ? La différence est que nous cherchons la réponse pour un μ inconnu et indéterminé. Il faut donc marginaliser sur μ . La probabilité postérieure pour σ peut être écrite comme

$$P(\sigma | \{x_i\}_{i=1}^n) = \frac{P(\{x_i\}_{i=1}^n | \sigma) P(\sigma)}{P(\{x_i\}_{i=1}^n)}. \quad (6.129)$$

Pour trouver $P(\{x_i\}_{i=1}^n | \sigma)$ il faut intégrer sur μ , $P(\{x_i\}_{i=1}^n | \sigma) = \int P(\{x_i\}_{i=1}^n | \mu, \sigma) P(\mu) d\mu$. Pour $P(\mu)$ constant c'est une intégrale Gaussienne qu'on peut résoudre, et on trouve

$$\ln P(\{x_i\}_{i=1}^n | \sigma) = -n \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{nS^2}{2\sigma^2} + \ln \frac{\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}}{\Delta_\mu}, \quad (6.130)$$

où Δ_μ est la taille du prior sur μ , $P(\mu)$. Les deux premières expressions sont le logarithme du likelihood, et la troisième est souvent appelée le facteur de "Occam" qui pénalise les modèles trop généraux (avec grand Δ_μ). Pour trouver le maximum de la probabilité postérieure pour σ , nous pouvons différencier cet expression par σ , et le facteur σ/\sqrt{n} additionnel fait que le maximum n'est plus à S mais à

$$\tilde{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2. \quad (6.131)$$

La question finale porte sur l'exercice 55(b) : Quel est μ pour des données connues, si on ne connaît pas σ ?

Exercice 64 :

a) Marginaliser sur σ pour obtenir la distribution "Student's t",

$$P(\mu | D) \propto 1 / \left(n(\mu - \bar{x})^2 + (n-1)\tilde{S}^2 \right)^{n/2}. \quad (6.132)$$

C'est la distribution correcte à utiliser pour trouver la moyenne μ si la variance est inconnue.

- b) Utiliser la variable $t \equiv (\bar{x} - \mu)/(\tilde{S}/\sqrt{n})$ et le fait que la fonction de probabilité $P(\mu|D)$ doit être normalisé comme fonction de μ pour calculer la valeur de t limite pour un niveau de confiance de 90% et $n = 4$ (donc $\int_{-\infty}^{t_{0.9}} P(t)dt = 0.9$), et démontrer que $t_{0.9} \approx 1.64$. Revisiter ensuite la question (b) de l'exercice 55.
- c) Quelle serait l'approche Bayésienne pour 55(b) ? Quelle est la différence à la réponse trouvée par (b) ci-dessus ? La différence est-elle importante dans ce cas ?

Exercice 65 :

Il y a 11 récipients dénombrés par $u \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Chacun contient 10 boules, dont u noirs et $10 - u$ blanches. Fred choisit un récipient de manière aléatoire et tire 10 boules (en les remettant dans le récipient). Bill voit qu'il a tiré 3 boules noires.

- a) Quelle est (pour Bill) la probabilité que Fred ait choisit le récipient u ?
 b) Quelle est la probabilité que la prochaine boule soit noire ?
 c) Quelle serait la réponse à la question (b) selon l'approche fréquentiste ?

Comparaison de modèles

La quantité nécessaire pour comparer des modèles est la probabilité pour le modèle \mathcal{M} avec des données D , c'est-à-dire $P(\mathcal{M}|D)$. Avec la formule de Bayes nous pouvons voir que c'est

$$P(\mathcal{M}|D) = \frac{P(D|\mathcal{M})P(\mathcal{M})}{P(D)}. \quad (6.133)$$

Normalement $P(D)$ et $P(\mathcal{M})$ sont des constantes, telles que $P(D|\mathcal{M}) \propto P(\mathcal{M}|D)$. Pour calculer $P(D|\mathcal{M})$ nous utilisons Eq. (6.125) et le fait que $P(\theta|D, \mathcal{M})$ est normalisé, $\int d\theta P(\theta|D, \mathcal{M}) = 1$. Nous avons donc

$$P(D|\mathcal{M}) = \int d\theta P(D|\theta, \mathcal{M})P(\theta|\mathcal{M}). \quad (6.134)$$

Exercice 66 :

Apparu dans "Guardian" du 4 Janvier 2002 :

When spun on edge 250 times, a Belgian one-euro coin came up heads 140 times and tails 110 times. 'It looks very suspicious to me', said Barry Blight, a statistics lecturer at the London School of Economics. 'If the coin were unbiased the chance of getting a result as extreme as that would be less than 7%'.

Quel est votre avis ? Considérez deux hypothèses ou modèles, \mathcal{M}_1 : la pièce n'est pas truquée, $p = 1/2$ et \mathcal{M}_2 : il y a un biais arbitraire, $p \in [0, 1]$ de manière uniforme. Vous pouvez utiliser que

$$\int_0^1 dp p^n (1-p)^m = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} \quad \text{pour } n, m \in \mathbb{N}. \quad (6.135)$$

Quelques références :

- [1] W. FELLER, "An introduction to the probability theory and its applications", vol. 1-2, J. Wiley (1968).
 [2] S. KARLIN, "A first course in Stochastic Processes", Academic Press (1966).
 [3] M. R. SPIEGEL, "Probabilités et Statistique", McGraw Hill (1981).
 [4] J. MEDHI, "Stochastic Processes", J. Wiley (1994).
 [5] I. N. GIBRA, "Probability and statistical inference for scientists and engineers", Prentice-Hall, Inc (1973).

- [6] FRODESEN, SKJEGGESTAD AND TÖFTE, “Probability and Statistics in particle physics”, Universitetsforlaget (1979).
- [7] E. T. JAYNES, “Probability Theory”, Cambridge University Press (2003).
- [8] DAVID J.C. MCKAY, “Information Theory, Inference, and Learning Algorithms”, Cambridge University Press (2003).

Chapitre 7

Eléments de la théorie des groupes

7.1 Définition d'un groupe

La notion de groupe est un concept important pour la physique, spécialement en relation avec des considérations de symétrie. C'est ainsi parce qu'un grand nombre de groupes apparaît tout naturellement, *p.ex.* le groupe des translations de l'espace, le groupe des rotations, le groupe formé des transformations de Lorentz en relativité, les groupes cristallographiques (formés des transformations de symétrie des structures cristallines). Les groupes susmentionnés sont tous des *groupes de transformations*, c.-à-d. des ensembles dont les éléments sont des transformations de certains objets ou espaces ; ces ensembles ont une loi de composition interne, donnée par l'exécution successive des transformations. En général, un groupe est un ensemble abstrait muni d'une loi de composition ayant certaines propriétés.

Définition :

(a) Un *groupe* est un ensemble G muni d'une loi de composition \circ (c'est à dire associant à chaque couple ordonné (a, b) d'éléments de G un autre élément $a \circ b$) qui satisfait les conditions suivantes :

(0) $a \circ b \in G$ pour tout $a, b \in G$,

(1) elle est *associative* : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ pour tout $a, b, c \in G$,

(2) il existe un *élément neutre* e : $a \circ e = e \circ a = a$ pour tout $a \in G$,

(3) à chaque $a \in G$ est associé un élément $a^{-1} \in G$ satisfaisant $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$; a^{-1} est appelé l'*inverse* de a .

(b) G est un *groupe fini* s'il ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

(c) Un *sous-groupe* G_0 d'un groupe G est une collection non-vide d'éléments de G qui est un groupe pour la loi de composition induite par G .

(Donc $a, b \in G_0 \Rightarrow a \circ b \in G_0$ et $a^{-1} \in G_0$; en particulier $e \in G_0$ et e est également l'élément neutre de G_0).

G_0 est un sous-groupe *propre* de G s'il est différent de G et de $\{e\}$ (le groupe formé par le seul élément e).

Remarque : Il est usuel d'écrire simplement ab pour le composé $a \circ b$. Il ne faut pas confondre cette notation avec une multiplication ; pour certains groupes concrets (par exemple des groupes de matrices) la composition est effectivement une multiplication, dans d'autres cas cela peut être par exemple une addition.

Exercice 1

$GL(n, \mathbb{R})$ est défini comme l'ensemble des matrices réelles $n \times n$ non-singulières, $SL(n, \mathbb{R})$ comme le sous-ensemble des matrices unimodulaires (*i.e.* déterminant égal à 1). Montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe et que $SL(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$. Ces groupes sont-ils finis ou non ?

Définition : Une transformation d'un ensemble \mathcal{M} de n éléments s'appelle une permutation.

Le groupe de toutes les permutations de l'ensemble \mathcal{M} de n éléments s'appelle le groupe symétrique (groupe de permutations) \mathcal{S}_n .

Le nombre d'éléments d'un groupe fini s'appelle l'*ordre* du groupe.

Théorème : Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe du groupe de permutations \mathcal{S}_n .

(Démonstration : On peut comprendre un groupe d'ordre n comme un groupe de permutations sur ses propres éléments.)

Exercice 2

Nous considérons \mathcal{S}_3 , $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$,

$$e = [(1, 2, 3) \rightarrow (1, 2, 3)], \quad a = [(1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)], \quad b = [(1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2)],$$

$$c = [(1, 2, 3) \rightarrow (1, 3, 2)], \quad d = [(1, 2, 3) \rightarrow (3, 2, 1)], \quad f = [(1, 2, 3) \rightarrow (2, 1, 3)].$$

- Remplir la table de multiplication suivante et vérifier que \mathcal{S}_3 est un groupe (dit *le groupe symétrique de 3 éléments*) :

| | e | a | b | c | d | f |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| e | | | | | | |
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| c | | | | | | |
| d | | | | | | |
| f | | | | | | |

- Ce groupe est-il commutatif ? ($\Leftrightarrow ab = ba \forall a, b, \in \mathcal{S}_3$)
- Déterminer au moins un sous-groupe propre de \mathcal{S}_3 . Montrer que les *transpositions* (échanges de deux éléments) ne forment pas un sous-groupe.
- Qu'est-ce qu'est l'ordre de \mathcal{S}_3 ? Qu'est-ce qu'est l'ordre de \mathcal{S}_n ?

7.2 Représentations

Un groupe est un ensemble abstrait ou souvent un ensemble dont les éléments sont des transformations de certains objets physiques (groupes de transformations ; leurs éléments agissent sur des objets physiques ou des appareils de mesure, *p.ex.* rotation d'un champ magnétique, déplacement d'un détecteur). Pour décrire les phénomènes physiques ou les états des systèmes physiques, on utilise un *espace mathématique* (*p.ex.* l'espace de phase en mécanique, un espace de Hilbert ou les rayons d'un espace de Hilbert en mécanique quantique). Il faut donc bien distinguer entre l'espace physique (l'espace dans lequel ont lieu les phénomènes physiques – souvent \mathbb{R}^3 ou l'espace-temps \mathbb{M}) et l'espace mathématique servant à décrire ces phénomènes.

A chaque transformation du système physique doit correspondre une transformation dans l'espace mathématique (la description mathématique du changement d'état sous cette transformation). Donc chaque transformation du système physique sera représentée par une application de l'espace mathématique dans lui-même ; le produit (composé) de deux transformations sera représenté par la composition des deux applications correspondantes de l'espace mathématique, etc. En d'autres termes l'ensemble de ces applications sera lui-même un groupe, on parle d'une *représentation* du groupe de transformations dans l'espace mathématique. Dans la majorité des situations l'espace mathématique est un espace vectoriel et l'on considère des *représentations linéaires*, c.-à-d. des représentations par des applications linéaires dans cet espace vectoriel.

Définition :

(a) Une *représentation* d'un groupe G est un homomorphisme de G dans l'ensemble des applications inversibles d'un espace E .

- (b) Une *représentation linéaire* d'un groupe G est un homomorphisme de G dans l'ensemble des applications linéaires inversibles d'un espace vectoriel E .
- (c) Une représentation est *fidèle* si cet homomorphisme est injectif, c.-à-d. si à toute paire d'éléments différents de G correspondent deux applications différentes de E .
- (d) La *dimension d'une représentation linéaire* est définie comme la dimension de l'espace vectoriel E .

Commentaires : Pour définir une représentation d'un groupe G dans un espace E , on doit donc associer à chaque élément a de G une application $D(a)$ de E dans E , et cette correspondance $a \mapsto D(a)$ doit préserver la structure de groupe, c.-à-d. doit être telle que

$$D(e) = \mathbb{1} \quad D(ab) = D(a)D(b) \quad \text{pour tout } a, b \in G$$

(loi de composition interne de G à gauche, composition des applications de E à droite). On aura alors

$$D(a^{-1})D(a) = D(a^{-1}a) = D(e) = \mathbb{1}$$

et de même

$$D(a)D(a^{-1}) = \mathbb{1},$$

donc chaque application $D(a)$ possède un inverse $[D(a)]^{-1}$, et cet inverse est égal à $D(a^{-1})$:

$$[D(a)]^{-1} = D(a^{-1}).$$

Si D est une représentation linéaire dans un espace vectoriel E de dimension finie, après le choix d'une base dans E , $D(a)$ peut être représenté par une matrice $r \times r$, où $r = \dim E$ est la dimension de E .

La famille d'applications $\{D(a) \mid a \in G\}$ forme également un groupe ; si la représentation est fidèle, ce groupe est isomorphe au groupe G .

Dans la suite nous ne considérons que des représentations *linéaires*.

Exercice 3

Soit les matrices :

$$\begin{aligned} T(e) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & T(c) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ T(a) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & T(d) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ T(b) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & T(f) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Montrer que ces matrices définissent une représentation linéaire 3-dimensionnelle du groupe \mathcal{S}_3 .

Etant donnée une représentation linéaire $D(G)$ d'un groupe G dans l'espace E , on dit qu'un sous-espace F de E est *invariant* sous $D(G)$ si, quels que soient $x \in F$ et $g \in G$,

$$D(g)x \in F.$$

L'espace E lui-même et l'espace constitué du seul vecteur nul sont des sous-espaces invariants triviaux.

Une représentation est dite *réductible* s'il existe au moins un sous-espace invariant non trivial. Elle est dite *irréductible* dans le cas contraire.

- Montrer que la représentation de \mathcal{S}_3 ci-dessus est réductible en trouvant le sous-espace invariant non trivial.

Les matrices $r \times r$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A^{(1)}} & & & \\ & \boxed{A^{(2)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A^{(N)}} \end{pmatrix},$$

où les blocs $A^{(i)}$ sont des matrices $r_i \times r_i$ et les éléments en dehors des blocs sont tous nuls, sont appelées *somme directe* de matrices.

Une représentation linéaire D d'un groupe G dans un espace E est appelée *somme directe de représentations* $D^{(1)}, \dots, D^{(N)}$ si dans une base convenable de l'espace E , chaque $D(g)$ est somme directe de $D^{(1)}(g), \dots, D^{(N)}(g)$:

$$D(g) = \begin{pmatrix} \boxed{D^{(1)}(g)} & & & \\ & \boxed{D^{(2)}(g)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{D^{(N)}(g)} \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } g \in G.$$

On écrit alors

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus \dots \oplus D^{(N)}.$$

- Montrer que la représentation ci-dessus de S_3 peut se mettre sous la forme de somme directe de deux représentations $D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}$. Trouver la base convenable.

7.3 Groupes et algèbres de Lie

Grosso modo un *groupe de Lie* est un groupe dont les éléments peuvent être indexés par un certain nombre de paramètres réels (continus) indépendants et tel que la loi de composition et le passage à l'inverse dépendent continûment (en fait analytiquement) de ces paramètres. Le groupe forme une variété différentiable. Un exemple de groupe de Lie est le groupe à un paramètre proposé dans l'Exercice 4, ainsi que les matrices orthogonales avec déterminant 1, $SO(N)$, des exercices 5 et 6, et les matrices unitaires avec déterminant 1, $SU(N)$. Le nombre de paramètres nécessaires est la *dimension* du groupe de Lie. Chaque groupe de Lie détermine une algèbre de Lie de même dimension, qui correspond formellement à l'espace tangent à l'origine (élément neutre du groupe). La dimension de $SO(3)$ et $SU(2)$ est trois. Comme variété différentiable le groupe $SU(2)$ est la sphère S^3 (voir exercice 7 b), deuxième point) et $SO(2)$ le cercle S^1 .

Définition : Une *algèbre de Lie* sur \mathbb{R} est un espace vectoriel \mathcal{L} de dimension finie sur \mathbb{R} muni d'une loi de composition interne notée $[\cdot, \cdot]$ et satisfaisant

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \quad \text{pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, X, Y, Z \in \mathcal{L}, \quad (1)$$

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad \text{pour tout } X, Y \in \mathcal{L} \quad (2)$$

et

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \text{pour tout } X, Y, Z \in \mathcal{L}. \quad (3)$$

Nous utilisons les lettres X, Y, Z pour désigner des éléments de \mathcal{L} . L'opération $[\cdot, \cdot]$ est appelée le *crochet de Lie*, et l'élément $[X, Y]$ de \mathcal{L} est appelé le *produit de Lie* de X et Y ou le *commutateur* de X et Y (le crochet $[\cdot, \cdot]$ possède les mêmes propriétés que l'opération de commutation d'opérateurs). (2) exprime

l'antisymétrie du crochet de Lie, (1) et (2) donnent sa bilinéarité. La relation (3) est appelée *identité de Jacobi*. Clairement on a

$$[X, X] = 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{L}.$$

Les vecteurs de base T^a de cet espace vectoriel s'appellent les générateurs du groupe de Lie associé. La structure de l'algèbre (et donc aussi du groupe) est décrite par les relations de commutation

$$[T^a, T^b] = f_c^{ab} T^c$$

(sommation implicite sur l'index c !). Les constantes f_c^{ab} s'appellent les *constantes de structure*, comme ils déterminent la structure de l'algèbre (en effet ils sont souvent appelé "l'algèbre" du groupe de Lie associé).

Le lien entre l'algèbre de Lie et son groupe de Lie est donné par l'application exponentielle. Pour des représentations matricielles d'un groupe de Lie (et nous n'allons considérer que celles-là), ceci veut dire qu'on peut écrire un élément A du groupe comme

$$A(\{s_a\}) = \exp(s_a T^a) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s_a T^a)^n$$

où les s_a sont les paramètres du groupe, et les générateurs sont aussi des matrices. Proche de l'élément neutre (c'est-à-dire pour des paramètres $\{s_a\}$ infinitésimales), ceci peut être considéré comme

$$A(\{s_a\}) \simeq \mathbb{1} + s_a T^a.$$

Souvent les physiciens ajoutent un facteur i pour que des générateurs hermitiens donnent lieu à des matrices A unitaires. Pour calculer les générateurs on utilise

$$T^b = \left. \frac{dA(\{s_a\})}{ds_b} \right|_{s=0}.$$

L'ensemble des générateurs de tout groupe de Lie forme une algèbre de Lie avec le commutateur comme crochet de Lie. Il est usuel de noter \mathfrak{g} l'algèbre de Lie associée au groupe G . Comme en général l'algèbre de Lie correspond à l'espace tangent du groupe de Lie (vu comme variété différentiable) à l'élément neutre, l'application exponentielle ne donne accès qu'à un voisinage connexe de l'élément neutre.

Exercice 4

Soit l'ensemble des matrices 2×2 définies par :

$$A(s) = \exp(s\sigma_3) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \sigma_3^n, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $A(s)$ est la matrice 2×2

$$A(s) = \mathbb{1} \cosh(s) + \sigma_3 \sinh(s).$$

(b) Montrer que $A(s)A(t) = A(s+t)$, que l'ensemble de ces matrices forme un groupe (groupe à un paramètre) et que l'application $s \rightarrow A(s)$ est infiniment différentiable.

(c) Calculer la dérivée

$$X = \left. \frac{dA(s)}{ds} \right|_{s=0}.$$

X est appelé le *générateur* du groupe $\{A(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$.

Exercice 5 : le groupe de rotation en deux dimensions

Considérons les rotations d'angle φ autour de l'origine dans \mathbb{R}^2 .

- Donner l'expression des vecteurs images $\{e'_1, e'_2\}$ d'une base orthonormée $\{e_1, e_2\}$ par ces rotations. En déduire une représentation 2-dimensionnelle du groupe continu des rotations dans \mathbb{R}^2 .
- Montrer que cette représentation est isomorphe au groupe des matrices spéciales orthogonales de dimension 2 :

$$SO(2) \equiv \{R \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : R^T R = \mathbb{1}, \det(R) = +1\}.$$

- Donner la dimension de $SO(2)$, c'est-à-dire, le nombre de paramètres indépendants caractérisant ce groupe. Quel est le générateur de l'algèbre ?
- Montrer que la représentation ainsi construite, interprétée comme agissant dans \mathbb{C}^2 , est réductible. Calculer sa décomposition en somme directe de représentations irréductibles.

Exercice 6 : Le groupe de rotation en trois dimensions

Soit le groupe des rotations spatiales (sur \mathbb{R}^3).

- En vous inspirant de l'exercice précédent, donner une représentation matricielle de dimension 3 des rotations d'angles θ , φ et ε , respectivement, autour des trois axes d'une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .
- Vérifier que ces matrices appartiennent à $SO(3)$. Donner la dimension de $SO(3)$.
- Calculer les générateurs J_k de ce groupe, ainsi que leur algèbre (les relations de commutation pour les générateurs).
- Soit $R_k(\delta\psi_k)$, une rotation infinitésimale d'angle $\delta\psi_k$ autour de l'axe "k". Exprimer en fonction des générateurs de $SO(3)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_k^n(\delta\psi_k).$$

On pourra poser $\psi_k = n \cdot \delta\psi_k$.

- Donner l'expression J^2 de la somme des carrés des générateurs. En notant $-j(j+1)$ ses valeurs propres, en déduire ce que l'on désigne par "spin" j de la représentation irréductible.
- Montrer que ces générateurs peuvent être vus comme des applications linéaires de \mathbb{R}^3 dans lui-même. En déduire que sous une rotation des vecteurs de base de \mathbb{R}^3

$$e' = Re,$$

ceux-ci se transforment comme

$$J'_k = R^{-1} J_k R.$$

Exprimer J'_k en fonction des J_i pour une rotation particulière. Justifier l'emploi du terme "vectoriel" pour désigner ces générateurs.

- Comme vous vous souvenez parfaitement du cours sur les tenseurs, vous savez qu'une manière canonique d'introduire une base tensorielle des tenseurs de rang 2 est

$$e_{ij} = e_i \otimes e_j.$$

Comment se transforme cette base sous l'action des rotations $(R)^i_j$ de $SO(3)$?

Montrer que tout tenseur t_{ij} peut s'exprimer comme la somme d'une quantité scalaire proportionnelle à δ_{ij} , d'un tenseur antisymétrique, et d'un tenseur symétrique de trace nulle. Donner le nombre de composantes indépendantes de chacun de ces termes. Vérifier alors que tout tenseur antisymétrique (resp. symétrique) conserve cette propriété sous l'action des rotations (vous venez de caractériser la décomposition irréductible d'une représentation tensorielle de $SO(3)$). Donner le "spin" de chacune de ces représentations irréductibles.

- Lorsque l'on résout les équations d'Einstein linéarisées, on peut montrer qu'une onde gravitationnelle se propageant dans la direction e_1 est décrite par un tenseur de polarisation dont les composantes sont données par

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix}$$

Quel "spin" pourrait-être associé aux ondes gravitationnelles (spin du graviton) ? Comment cette matrice se transforme-t-elle sous une rotation d'angle θ autour de e_1 ?

Exercice 7 : Le groupe SU(2)

Soit $\sigma_0 = \mathbb{1}$ la matrice identité 2×2 et $\sigma_k, k = 1, 2, 3$ les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^3$, on pose $\mathbf{a} \cdot \sigma = \sum_{k=1}^3 a_k \sigma_k$. La relation

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \sigma_0 + i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \sigma_l$$

implique que pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3$

$$(\mathbf{a} \cdot \sigma)(\mathbf{b} \cdot \sigma) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\sigma_0 + i(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \sigma, \quad (5.1)$$

où $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^3 a_k b_k$.

(a) Toute matrice 2×2 complexe A est une combinaison linéaire de $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ et σ_3 :

$$A = a_0 \sigma_0 + i \mathbf{a} \cdot \sigma$$

avec $a_0 \in \mathbb{C}, \mathbf{a} \in \mathbb{C}^3$, le facteur i étant mis par commodité. Montrer que $\det A = a_0^2 + \mathbf{a}^2$ et vérifier que si A est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (a_0 \sigma_0 - i \mathbf{a} \cdot \sigma).$$

(b) Le groupe SU(2) est formé des matrices 2×2 complexes, unitaires ($A^* \equiv \overline{A}^T = A^{-1}$) et unimodulaires ($\det A = 1$).

– Montrer qu'il s'agit bien d'un groupe (muni de la loi de multiplication des matrices).

– Montrer que $A \equiv a_0 \sigma_0 + i \mathbf{a} \cdot \sigma$ appartient à SU(2) si et seulement si $a_0, a_k \in \mathbb{R}$ et $a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1$.

Conséquence : SU(2) est un groupe de Lie de dimension 3.

(c) Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ avec $\mathbf{n}^2 = 1$. Pour $\varphi \in \mathbb{R}$ posons

$$U(\mathbf{n}, \varphi) = \exp \left(-\frac{i}{2} \varphi \mathbf{n} \cdot \sigma \right).$$

– Montrer que : $U(\mathbf{n}, \varphi) = \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sigma_0 - i \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{n} \cdot \sigma$ (utiliser (5.1)).

– Vérifier que $\{U(\mathbf{n}, \varphi) \mid 0 \leq \varphi < 4\pi, \mathbf{n} \text{ fixé}\}$ forme un sous-groupe à 1 paramètre de SU(2).
Calculer $U(\mathbf{n}, 2\pi)$ ainsi que $\lim_{\varphi \rightarrow 4\pi} U(\mathbf{n}, \varphi)$.

– Calculer le générateur $X(\mathbf{n}) = \left. \frac{dU(\mathbf{n}, \varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0}$ de ce sous-groupe.

(d) Montrer que chaque matrice $A \neq \pm \mathbb{1}$ de SU(2) détermine de façon unique un vecteur $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ de norme 1 et un $\varphi \in (0, 2\pi)$ tels que $A = U(\mathbf{n}, \varphi)$: le groupe SU(2) peut être identifié avec les matrices de la forme $U(\mathbf{n}, \varphi)$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (pour $\varphi = 0$ ou $\varphi = 2\pi$, le vecteur \mathbf{n} est quelconque).

(e) Montrer que le commutateur entre deux générateurs $X(\mathbf{n})$ et $X(\mathbf{n}')$ est donné par

$$[X(\mathbf{n}), X(\mathbf{n}')] = (\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}') \cdot \mathbf{X}$$

où $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ et $X_k = X(\mathbf{e}_k)$ est le générateur pour $\mathbf{n} = \mathbf{e}_k$ (le k -ième vecteur de la base orthonormée de \mathbb{R}^3).

– Considérer en particulier le cas $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i, \mathbf{n}' = \mathbf{e}_j$. Déterminer également le commutateur entre les matrices $J_k = iX_k$. Comparer avec les relations de commutation des générateurs de SO(3).

(f) L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ du groupe $SU(2)$ est l'espace vectoriel réel 3-dimensionnel engendré par X_1, X_2 et X_3 , ceux-ci formant une base de $\mathfrak{su}(2)$, le crochet de Lie étant le commutateur entre matrices de $\mathfrak{su}(2)$. Montrer que $\mathfrak{su}(2)$ est une algèbre de Lie.

Indication : Remarquer que pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{su}(2) \ni \mathbf{n} \cdot \mathbf{X} \equiv X(\mathbf{n})$.

(g) Si $A = U(\mathbf{n}, \varphi) \in SU(2)$ (cf Exercice 5(d)), soit $D(A) \in SO(3)$ la matrice 3×3 décrivant la rotation dans \mathbb{R}^3 par un angle $\varphi \in [0, 2\pi]$ et d'axe \mathbf{n} . Ceci définit une représentation du groupe $SU(2)$ dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ (un homomorphisme $SU(2) \rightarrow SO(3)$). Vérifier que cette représentation n'est pas fidèle : si $A \in SU(2)$, la rotation $D(A)$ associée à A est identique à celle déterminée par $-A$. Ainsi $SU(2)$ est une sorte de dédoublement du groupe des rotations propres $SO(3)$.

Exercice 8 : Le groupe de Lorentz

Considérons l'espace de Minkowski \mathbb{M} , en d'autres termes l'espace-temps de la physique relativiste, formé des quadri-vecteurs $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ où $x_\mu \in \mathbb{R}$ pour $(\mu = 0, 1, 2, 3)$. Cet ensemble est muni de la forme bilinéaire

$$x \cdot y = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \equiv x^\mu y_\mu, \quad (6.1)$$

où $x^0 = -x_0, x^1 = x_1, x^2 = x_2$ et $x^3 = x_3$. La convention de sommation d'Einstein est toujours sous-entendue dans ce qui suit. Une transformation de Lorentz Λ est une application linéaire $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ laissant cette forme bilinéaire invariante, c.-à-d. telle que

$$(\Lambda x)^\mu (\Lambda y)_\mu = x^\nu y_\nu \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{M}. \quad (6.2)$$

Nous considérons Λ comme une matrice 4×4 . Introduisons encore le tenseur métrique g :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Alors $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$ et $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$. En désignant les éléments de la matrice Λ par Λ_μ^ν , (6.2) peut être écrit comme

$$g^{\mu\rho} \Lambda_\rho^\sigma x_\sigma \Lambda_\mu^\nu y_\nu = g^{\nu\sigma} x_\sigma y_\nu \quad \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

On doit donc avoir $g^{\mu\rho} \Lambda_\rho^\sigma \Lambda_\mu^\nu = g^{\nu\sigma}$ (pour toutes les valeurs des indices libres ν et σ), ou de façon équivalente :

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (6.4)$$

(a) Montrer que pour une transformation de Lorentz, $\det \Lambda = +1$ ou $\det \Lambda = -1$.

(b) Vérifier que

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g \quad (6.5)$$

et que

$$g \Lambda g \Lambda^T g = g. \quad (6.6)$$

(c) Montrer que : $(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda_0^i)^2$ (utiliser (6.6) écrit avec les indices).

(d) Vérifier que $P : (x_0, x_i) \mapsto (x_0, -x_i)$, $T : (x_0, x_i) \mapsto (-x_0, x_i)$ et PT sont des transformations de Lorentz.

(e) Vérifier que l'ensemble des matrices 4×4 satisfaisant (6.4) est un groupe, la loi de composition étant la multiplication des matrices. Ce groupe est le groupe de Lorentz \mathcal{L} .

(f) Une transformation de Lorentz est dite orthochrone si $\Lambda_0^0 > 0$. Montrer que cette condition est nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur x du genre temps (c.-à-d. tel que $x \cdot x < 0$), pointant vers le futur ($x_0 > 0$) soit transformé en un vecteur du même type.

(g) Montrer que le produit de deux transformations de Lorentz orthochrones est orthochrone.

- (h) Le *groupe de Lorentz propre* est l'ensemble des transformations orthochrones à déterminant $+1$, noté \mathcal{L}_0 . $\mathcal{L}_0 \cup P\mathcal{L}_0$ est appelé le *groupe de Lorentz orthochrone*. Montrer que

$$\mathcal{L}_0 \cup P\mathcal{L}_0 = \{\Lambda \mid \Lambda_0^0 > 0\}$$

et que \mathcal{L}_0 et $\mathcal{L}_0 \cup P\mathcal{L}_0$ sont bien des sous-groupes du groupe de Lorentz.

- (i) Désignons par $O(3)$ le groupe des matrices réelles 3×3 orthogonales. Considérer l'ensemble des transformations de Lorentz de la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & R \end{pmatrix},$$

où $R \in O(3)$. Montrer que cet ensemble est un sous-groupe du groupe de Lorentz.

- (j) Le *groupe de Poincaré* (ou *groupe de Lorentz inhomogène*) \mathcal{P} est formé de toutes les transformations $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ laissant invariant la grandeur $(x - y) \cdot (x - y)$ pour tout couple de quadri-vecteurs x, y . Les éléments de \mathcal{P} sont des couples (Λ, a) , où Λ est une transformation de Lorentz et a est un quadri-vecteur décrivant une translation dans $\mathbb{M} : \forall x \in \mathbb{M}$

$$(\Lambda, a)x = \Lambda x + a, \quad \text{c.-à-d.} \quad [(\Lambda, a)x]_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu. \quad (6.7)$$

- Dériver la loi de composition de \mathcal{P} :

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', a + \Lambda a') \quad (6.8)$$

et vérifier que \mathcal{P} est un groupe.

- Montrer que le groupe de Lorentz est isomorphe à un sous-groupe de \mathcal{P} (que l'on note “abusivement” \mathcal{L}).
- De même se convaincre que le *groupe des translations* \mathcal{T} (constitué des éléments de la forme $(\mathbb{1}, a)$) est un sous-groupe de \mathcal{P} isomorphe au groupe additif \mathbb{R}^4 , noté $(\mathbb{R}^4, +)$.
- Vérifier que \mathcal{P} est le *produit semi-direct* de ces deux sous-groupes, c.-à-d. que
- (i) \mathcal{T} est un sous-groupe invariant. Un sous-groupe G_0 de G est dit *invariant* si

$$g G_0 g^{-1} \subset G_0 \quad \text{pour tout } g \in G,$$

(ii) $\mathcal{T} \cap \mathcal{L}$ ne contient que l'élément neutre de \mathcal{P} ,

(iii) chaque élément de \mathcal{P} possède une décomposition unique en un produit d'un élément de \mathcal{T} et un élément de \mathcal{L} .

Chapitre 8

Espaces de Hilbert et opérateurs linéaires

8.1 Une courte introduction à l'intégrale de Lebesgue

8.1.1 Intervalles et mesures

Intervalles sur \mathbb{R}^n

Un intervalle sur \mathbb{R}^n est un produit de n intervalles sur \mathbb{R} . Autrement dit, si $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$ où a_i et b_i sont des nombres réels ou ∞ , un intervalle I de \mathbb{R}^n est l'ensemble des (x_1, x_2, \dots, x_n) vérifiant les inégalités $a_i < x_i < b_i$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$I \equiv \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \langle a_i, b_i \rangle, i = 1, \dots, n \right\},$$

I peut être ouvert ou fermé sur un, ou plusieurs de ses bords, selon que les inégalités respectives sont strictes ou non et “(” et “)” signifient ici “[” ou “]”. Il est borné, ou non borné, si ses bornes a_i ou b_i sont des réels finis ou infinis. I est l'ensemble vide s'il ne contient aucun élément, $I = \emptyset$; ou dégénéré à un point s'il n'en contient qu'un seul.

Exemples : $[0, 1],]0, a[,]a, a[= \emptyset, [a, a] = \{a\}, [a, +\infty[, \dots$

Fonctions d'intervalle

Définitions : Soit Σ^n l'ensemble des intervalles bornés de \mathbb{R}^n . Une *fonction d'intervalle* μ sur Σ^n est une application de Σ^n dans \mathbb{R} :

$$\mu : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

– μ est dite *monotone* si $\forall I_1 \in \Sigma^n, \forall I_2 \in \Sigma^n$:

$$I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \mu(I_1) \leq \mu(I_2).$$

– μ est dite *additive* si $\forall I_1 \in \Sigma^n, \forall I_2 \in \Sigma^n$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $I_1 \cup I_2 \in \Sigma^n$

$$\mu(I_1 \cup I_2) = \mu(I_1) + \mu(I_2).$$

Mesures

Définition : Une *mesure* sur Σ^n est une fonction d'intervalle monotone et dont l'additivité est étendue à tout ensemble dénombrable d'intervalles $\bigcup_{p=1}^{\infty} I_p \subseteq \Sigma^n$, tels que $I_i \cap I_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Propriétés : Par additivité appliquée à l'ensemble vide, une mesure vérifie $\mu(\emptyset) = 0$. On en déduit par monotonie que $\forall I \in \Sigma^n, \mu(I) \geq 0$.

Définition : Une mesure μ est dite *extérieurement régulière* si $\forall \epsilon > 0$ et $\forall I \in \Sigma^n$, il existe un intervalle I^* tel que $I \subseteq I^*$ et

$$\mu(I) \leq \mu(I^*) \leq \mu(I) + \epsilon,$$

soit, de manière équivalente, $\mu(I) = \inf \left\{ \mu(I^*) \mid I \subseteq I^*, I^* \text{ ouvert} \right\}$.

Une mesure μ est dite *intérieurement régulière* si $\forall \epsilon > 0$ et $\forall I \in \Sigma^n$, il existe un intervalle fermé I^* tel que $I^* \subseteq I$ et

$$\mu(I) - \epsilon \leq \mu(I^*) \leq \mu(I),$$

soit, de manière équivalente, $\mu(I) = \sup \left\{ \mu(I^*) \mid I^* \subseteq I, I^* \text{ ouvert} \right\}$.

Exemples : Pour $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \in \Sigma^n$, on définit la fonction d'intervalle ν telle que

$$\nu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Exercice 1 :

Montrer que ν est une mesure régulière. Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue sur les intervalles.

Exercice 2 :

Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble sans point d'accumulation (P est un point d'accumulation d'un ensemble S si tout voisinage de P inclut un élément de S autre que P). À chaque point $\mathbf{x} \in N$ on associe un poids $m(\mathbf{x}) \geq 0$. Soit la fonction d'intervalle

$$\begin{aligned} \mu : \Sigma^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ I &\longmapsto \sum_{\mathbf{x} \in I \cap N} m(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure régulière. Ceci est une distribution de masse discrète, ou mesure atomique, que l'on note habituellement $\mu = \sum_{\mathbf{x} \in N} m(\mathbf{x})\delta_{\mathbf{x}}$, avec $\delta_{\mathbf{x}}$ la mesure de Dirac :

$$\delta_{\mathbf{x}}(I) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in I, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin I. \end{cases}$$

Exercice 3 :

Soit μ_1 une mesure régulière sur Σ^p et μ_2 sur Σ^q . Pour $I \in \Sigma^{p+q}$ tel que $I = I_1 \times I_2$ où $I_1 \in \Sigma^p$ et $I_2 \in \Sigma^q$, montrer que la fonction d'intervalle

$$\mu(I) \equiv \mu_1(I_1)\mu_2(I_2),$$

est une mesure régulière sur Σ^{p+q} .

Ensembles négligeables et notion de “presque partout”

Définition : Un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est dit μ -négligeable si $\forall \epsilon > 0$, il existe un ensemble d'intervalles $\{I_k\}$ tel que

$$\begin{cases} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset M, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \epsilon. \end{cases}$$

Exercice 4 :

Montrer que tout ensemble dénombrable de \mathbb{R}^n est ν -négligeable, i.e. négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Montrer que toute union dénombrable d'ensembles μ -négligeables est μ -négligeable.

Définition : Une fonction est dite μ -définie sur \mathbb{R}^n si elle est définie sur un ensemble $\mathbb{R}^n \setminus M$ où M est μ -négligeable.

Par additivité dénombrable de la mesure, il est toujours possible de trouver un ensemble M μ -négligeable commun à toute suite de fonctions μ -définies.

Définition : Deux fonctions f et g sont dites μ -égales (ou presque partout égale) s'il existe un ensemble M , μ -négligeable, tel que

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M.$$

On écrit alors $f \stackrel{\mu}{=} g$. Les relations de μ -ordre sont définies de manière équivalente et notées $f <_{\mu} g$ et $f >_{\mu} g$. De manière générale, une condition sera satisfaite “presque partout” si elle est satisfaite sur $\mathbb{R}^n \setminus M$, où M est μ -négligeable.

Exercice 5 :

Soit l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est presque partout nulle, i.e. $f \stackrel{\nu}{=} 0$, avec ν la mesure de Lebesgue.

Définition : Une suite $\{f_k\}$ de fonction sur \mathbb{R}^n est dite μ -convergente vers f , i.e. presque partout convergente vers f , s'il existe un ensemble M , μ -négligeable, tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\mathbf{x}) \stackrel{\mu}{=} f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus M.$$

On admettra également dans cette définition les suites de fonctions $\{f_k\}$ qui ne sont définies que sur $\mathbb{R}^n \setminus M$, pourvu que M soit négligeable.

8.1.2 Intégration

Fonctions en escalier

Définition : Une fonction $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier sur \mathbb{R}^n s'il existe des intervalles bornés $I_1, \dots, I_p \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que la restriction de s à chacun de ces intervalles soit une fonction constante, et nulle ailleurs.

$$\begin{cases} s|_{I_j} = a_j \in \mathbb{R}, & \forall \mathbf{x} \in I_j, \\ s(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \notin \bigcup_{j=1}^p I_j. \end{cases}$$

On notera que l'ensemble de ces fonctions est un espace vectoriel, $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, engendré par les fonctions caractéristiques d'intervalle borné $\chi_I : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ définies par

$$\chi_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in I, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin I. \end{cases}$$

Si f, g appartiennent à $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ alors il en est de même de $\alpha f + g$, $\inf(f, g)$, $\sup(f, g)$, $|f|$.

Exercice 6 :

Montrer que si $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ alors $fg \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$.

Intégrale de Lebesgue

Définition : Si $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ est une fonction en escalier sur \mathbb{R}^n , non nulle sur un ensemble d'intervalles I_1, \dots, I_p avec

$$f|_{I_j} = c_j \in \mathbb{R},$$

l'intégrale de Lebesgue de f par rapport à la mesure μ est définie par

$$\int f d\mu \equiv \sum_{j=1}^p \mu(I_j) c_j.$$

Exercice 7 :

Montrer que les propriétés "classiques" de l'intégrale sont vérifiées :

- $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$.
- $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$.
- L'application de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ dans \mathbb{R} qui à f associe $\int f d\mu$ est linéaire.

Théorème : Si pour une suite *croissante* de fonctions en escalier $\{f_k\}$ de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, les valeurs des intégrales restent *bornées dans leur ensemble*, i.e.

$$\exists A \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \mathbb{N}, \int f_k d\mu \leq A,$$

alors la suite $\{f_k\}$ converge *presque partout* vers une fonction finie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mu} f_k = \int_{\mu} f.$$

Définition : On appelle classe $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions qui sont des limites, *presque partout*, de suites *croissantes* $\{f_k\}$ de fonctions en escalier de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$.

On peut alors étendre l'intégrale de Lebesgue à cette nouvelle classe de fonctions par passage à la limite de l'intégrale de Lebesgue définie sur $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. On notera que $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un espace vectoriel (en général si $f \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$, $-f$ n'appartient pas forcément à $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$).

Définition : Si f est une fonction appartenant à $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$, son intégrale est définie par

$$\int f d\mu \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu.$$

Exercice 8 :

Montrer que cette limite est indépendante du choix de la suite de fonction $\{f_k\}$. On utilisera le lemme suivant :

Lemme : Pour toute suite de fonctions en escalier qui tend *monotoniquement* vers zéro *presque partout*, la suite des valeurs des intégrales tend aussi vers zéro.

Définitions : On appelle $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions *sommables*, obtenu en formant *les différences des fonctions appartenant à $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$*

$$\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f = g - h \mid g \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n), h \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Il en résulte que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel réel. L'intégrale de Lebesgue sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\int f d\mu \equiv \int g d\mu - \int h d\mu,$$

pour $f \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ telle que $f = g - h$, avec $g \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$. On notera que les propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ se prolongent sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$.

Fonctions mesurables

La classe de fonction $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$ permet de définir des fonctions *sommables* à partir de la limite de suites croissantes de fonctions en escalier de $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Cependant, il existe certainement des suites de fonctions en escalier convergentes presque partout mais dont la limite n'est pas sommable.

Définition : Une fonction f est dite *mesurable* si elle est la limite *presque partout* d'une suite de fonctions escalier $\{s_k\}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = f.$$

Définition : Pour un intervalle I et une fonction mesurable f tel que $\chi_I \cdot f$ est sommable on définit l'intégrale de f sur I par

$$\int_I f d\mu = \int \chi_I \cdot f d\mu.$$

Ici χ_I est, de nouveau, la fonction caractéristique sur l'intervalle I .

Théorème de Lebesgue : Lorsque les fonctions $\{f_k\}$, supposées *sommables* sur un intervalle I , convergent *presque partout* vers une fonction f , et que de plus, il existe une fonction *sommable* g telle que

$$|f_k| \leq g, \forall k,$$

alors la fonction f est aussi *sommable* et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\mu = \int f d\mu.$$

8.1.3 Espaces L^p de Lebesgue

Définition : Soit $\tilde{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $|f|^p$ soit μ -sommable. Pour une fonction $f \in \tilde{L}^1(\mathbb{R}^n, \mu)$ aussi la partie réelle et la partie imaginaire de f sont sommables et on définit

$$\int f d\mu \equiv \int \Re(f) d\mu + i \int \Im(f) d\mu,$$

On définit une relation d'équivalence sur $\tilde{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ par

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g, \quad \forall f, g \in \tilde{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu).$$

L'ensemble des classes d'équivalence $[f]$ des fonctions de $\tilde{L}^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ est noté $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$.

Théorème de Fubini : Soit $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et μ_1 et μ_2 des mesures (dénombrablement finies¹) sur Σ^p et Σ^q respectivement. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mu_1 \times \mu_2$ sommable, alors :

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p \setminus M$ où M est μ_1 -négligeable, la fonction

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \mathbf{y} &\mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

est μ_2 -sommable.

- La fonction

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^p \setminus M &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \mathbf{x} &\mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) d\mu_2, \end{aligned}$$

est μ_1 -sommable.

- De plus on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^p} F d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Ceci justifie la notation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_2 \right) d\mu_1,$$

et les intégrales sur \mathbb{R}^n peuvent être réduites à des intégrales sur \mathbb{R} .

Exercice 9 :

Soit f et g des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n, \nu)$. Montrer que l'intégrale

$$\int |\bar{f}g| d\nu < \infty$$

existe. Montrer que $L^2(\mathbb{R}^n, \nu)$ est un espace vectoriel complexe où

$$(f, g) \equiv \int \bar{f}g d\nu,$$

définit un produit scalaire.

1. Il existe une partition dénombrable de \mathbb{R}^p formée d'ensemble de mesure finie.

Théorème de Riesz-Fischer : Si $\{f_k\}$ une suite de Cauchy de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$,

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \|f_i - f_j\| = 0, \quad \text{avec} \quad \|f_k\| \equiv \sqrt{\int |f_k|^2 d\mu},$$

alors il existe une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, μ -définie, telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mu} f_k = f.$$

En conséquence, $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 10 : Soit $f_n(x) = nx^n$ définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ presque partout. Montrer que

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Ceci est un exemple d'une suite de fonctions avec intégrales bornées mais

$$0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Montrer que la suite f_n n'est pas majorée par une fonction g sommable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction g sommable tel que $|f_k| \leq g$ presque partout.

Indication : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ trouver un $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) > n - 1$ pour $x > x_n$.

Les démonstrations des théorèmes ci-dessus et beaucoup plus peut être trouvé dans les ouvrages suivants :

- F. Riesz et B. Nagy, "*Leçons d'analyse fonctionnelle*", Gauthier-villars, Paris 1960.
- A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, "*Measure, Lebesgues integrals and Hilbert Spaces*", Academic Press, NY 1961.
- H. Kestelman, "*Modern Theories of Integration*", Dover Publications, NY 1960.
- W. Rudin, "*Analyse réelle et complexe*", Masson, Paris 1978.

8.2 Définition et exemples d'espaces de Hilbert

Un espace de Hilbert \mathcal{H} est un espace vectoriel linéaire complexe, muni d'un produit scalaire hermitien, et qui est complet. Plus précisément, un espace de Hilbert est défini par les trois axiomes suivants :

(I) \mathcal{H} est un espace vectoriel linéaire sur le corps \mathbb{C} :

à chaque couple $\{\varphi, \psi\}$ d'éléments de \mathcal{H} est associé un autre élément de \mathcal{H} , appelé $\varphi + \psi$, et à chaque couple $\{\alpha, \varphi\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{H}$ est associé un élément $\alpha\varphi$ de \mathcal{H} , et ces associations ont les propriétés suivantes (où $\varphi, \psi_k \in \mathcal{H}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) :

(a) commutativité : $\varphi + \psi = \psi + \varphi$

(b) associativité : $\varphi + (\psi_1 + \psi_2) = (\varphi + \psi_1) + \psi_2$, $\alpha(\beta\varphi) = (\alpha\beta)\varphi$

(c) distributivité : $\alpha(\varphi + \psi) = \alpha\varphi + \alpha\psi$, $(\alpha + \beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$

(d) existence element neutre $1 \in \mathbb{C} : 1 \cdot \varphi = \varphi$.

De plus il existe un élément unique $\mathbf{0} \in \mathcal{H}$ (appelé le vecteur zéro) tel que

$$\mathbf{0} + \varphi = \varphi \quad , \quad \mathbf{0} \cdot \varphi = \mathbf{0} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} \quad .$$

2. $\mathbf{0}$ désigne le nombre complexe $\alpha = 0$. Les éléments de \mathcal{H} sont appelés des vecteurs.

(II) Il existe dans \mathcal{H} un produit scalaire strictement positif :

à chaque couple $\{\varphi, \psi\}$ de vecteurs de \mathcal{H} est associé un nombre complexe $\langle \varphi | \psi \rangle$ et cette association possède les propriétés suivantes :

- (a) hermiticité : $\langle \varphi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \varphi \rangle} \equiv (\langle \psi | \varphi \rangle)^* \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}$
 (b) linéarité : $\langle \varphi | \psi_1 + \alpha \psi_2 \rangle = \langle \varphi | \psi_1 \rangle + \alpha \langle \varphi | \psi_2 \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \varphi, \psi_j \in \mathcal{H}$ ³.
 (c) norme induite : $\|\varphi\| \equiv [\langle \varphi | \varphi \rangle]^{1/2} > 0$ sauf si $\varphi = \mathbf{0}$.

(III) \mathcal{H} est complet :

toute suite de Cauchy (en norme) dans \mathcal{H} possède une limite dans \mathcal{H} . En d'autres termes, si $\{\varphi_n\}$ est une suite d'éléments de \mathcal{H} telle que

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0 \quad , \quad 4$$

alors il existe un élément (unique) φ de \mathcal{H} tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$.

Les espaces de Hilbert utilisés en mécanique quantique sont tous séparables, c.-à-d. ils ont une base finie ou dénombrablement infinie. Un *espace de Hilbert séparable* est donc un espace \mathcal{H} vérifiant, en plus des axiomes (I)-(III), l'axiome suivant :

(IV) base orthonormée dénombrable :

il existe une base orthonormée dénombrable de \mathcal{H} , c.-à-d. une suite finie ou infinie $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$ de vecteurs de \mathcal{H} telle que

$$\langle \chi_j | \chi_i \rangle = \delta_{jk}$$

et telle que tout vecteur ψ de \mathcal{H} peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$.

La *dimension* de \mathcal{H} est alors définie comme le nombre de vecteurs d'une telle base (elle peut être finie ou infinie).

Inégalités importantes dans un espace de Hilbert

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \varphi | \psi \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|\psi\| \quad (8.1)$$

Inégalité du triangle :

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\| \quad (8.2)$$

$$\|\varphi + \psi\|^2 \leq 2\|\varphi\|^2 + 2\|\psi\|^2 \quad (8.3)$$

Démonstration : si $\varphi = \psi$, (8.1) est évident ($\langle \varphi | \varphi \rangle = \|\varphi\|^2$).

Si $\varphi \neq \psi$, supposons p.ex. que $\psi \neq \mathbf{0}$. Alors, pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$0 \leq \|\varphi + \alpha\psi\|^2 = \langle \varphi + \alpha\psi | \varphi + \alpha\psi \rangle = \|\varphi\|^2 + \alpha \langle \varphi | \psi \rangle + \alpha^* \langle \psi | \varphi \rangle + |\alpha|^2 \|\psi\|^2.$$

En choisissant $\alpha = -\overline{\langle \varphi | \psi \rangle} / \|\psi\|^2$, on obtient

$$0 \leq \|\varphi^2\| - \frac{1}{\|\psi\|^2} |\langle \varphi | \psi \rangle|^2,$$

ce qui implique (8.1) en multipliant par $\|\psi\|^2$.

3. Contrairement aux mathématiciens, les physiciens supposent le produit scalaire linéaire dans le deuxième argument et anti-linéaire dans le premier : $\langle \psi_1 + \alpha\psi_2 | \varphi \rangle = \langle \varphi | \psi_1 + \alpha\psi_2 \rangle = \langle \varphi | \psi_1 \rangle + \alpha^* \langle \varphi | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \varphi \rangle + \alpha^* \langle \psi_2 | \varphi \rangle$.

4. c.-à-d. pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre $N = N(\epsilon)$ tel que $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \epsilon$ si $n, m > N$.

Pour (8.2), on peut prendre $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|^2 &= \|\varphi\|^2 + \langle \varphi | \psi \rangle + \langle \psi | \varphi \rangle + \|\psi\|^2 \\ &\leq \|\varphi\|^2 + |\langle \varphi | \psi \rangle| + \langle \psi | \varphi \rangle + \|\psi\|^2 \\ &\leq \|\varphi\|^2 + 2 \|\varphi\| \cdot \|\psi\| + \|\psi\|^2 \\ &= (\|\varphi\| + \|\psi\|)^2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Pour (8.3), remarquons que

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \|\varphi\|^2 - \langle \varphi | \psi \rangle - \langle \psi | \varphi \rangle + \|\psi\|^2$$

d'où

$$\langle \varphi | \psi \rangle + \langle \psi | \varphi \rangle \leq \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 .$$

En insérant cette inégalité dans l'équation (8.4), on obtient (8.3).

Exercice 10 (L'espace de Hilbert \mathbb{C}^n) :

Désignons par \mathbb{C}^n un espace vectoriel linéaire de dimension n sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} , où $n = 1, 2, \dots$ est un nombre naturel (fini). Désignons par φ, ψ, \dots des vecteurs de \mathbb{C}^n . Vérifier que \mathbb{C}^n est un espace de Hilbert séparable.

Indications :

- (i) Utiliser la notation $\varphi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \psi = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, pour les vecteurs de \mathbb{C}^n , avec $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$.
- (ii) Exprimer le produit scalaire entre φ et ψ en termes des composantes α_k et β_k .
- (iii) Donner n vecteurs $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$ de \mathbb{C}^n qui forment une base orthonormée de \mathbb{C}^n .
- (iv) La norme d'un vecteur φ de \mathbb{C}^n est définie par $\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle}$. Exprimer la norme de φ en termes de composantes α_k de φ .
- (v) Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ une suite d'éléments de \mathbb{C} qui est Cauchy, c.-à-d. telle que

$$\lim_{m, k \rightarrow \infty} \|\varphi_m - \varphi_k\| = 0 .$$

Montrer que cette suite possède une limite dans \mathbb{C} , c.-à-d. qu'il existe un vecteur φ de \mathbb{C}^n tel que la suite $\{\varphi_k\}$ converge vers φ en norme, c.-à-d. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_k\| = 0$.

Exercice 11 (L'espace de Hilbert l^2) :

Formellement l'espace l^2 est obtenu en posant $n = \infty$ dans l'Exercice 10. Ce sera donc un espace vectoriel linéaire sur le corps \mathbb{C} de dimension infinie. Ses éléments sont des suites infinies de nombres complexes

$$\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) . \quad (8.5)$$

Mais pour pouvoir définir la norme (finie) d'une telle suite φ , il faut imposer la condition supplémentaire suivante :

$$\|\varphi\| \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2} < \infty . \quad (8.6)$$

Donc l^2 est formé de toutes les suites (8.5) vérifiant la condition (8.6).

- (a) Est-ce que les suites suivantes définissent des éléments de l^2 ou non :

$$\varphi_1 = (1, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{4}, \dots) \quad \varphi_2 = (1, i/2, 1/3, i/4, 1/5, \dots) \quad ?$$

- (b) Montrer que l'ensemble l^2 des suites φ vérifiant la condition (8.6) forme un espace de Hilbert séparable, plus précisément que
- (i) l^2 est un espace vectoriel linéaire sur \mathbb{C} ,
 - (ii) l^2 peut être muni d'un produit scalaire strictement positif,
 - (iii) l^2 est un espace complet,
 - (iv) il existe un ensemble dénombrable $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$ d'éléments de l^2 qui forme une base orthonormée de l^2 , c.-à-d. tel que $\langle \chi_j | \chi_k \rangle = \delta_{jk}$ et tel que chaque élément φ de l^2 est combinaison linéaire de χ_1, χ_2, \dots .
- (c) D'après (b,iv) tout élément φ de l^2 est combinaison linéaire de χ_1, χ_2, \dots . En général c'est une combinaison linéaire d'un nombre infini parmi les vecteurs χ_1, χ_2, \dots , qui doit alors être interprétée comme limite d'une suite de combinaisons linéaires finies (la limite étant par rapport à la norme de l^2). Pour rendre cela explicite, soit $\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ un vecteur de l^2 , montrer qu'il existe une suite $\{\varphi_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) de vecteurs de l^2 telle que chaque φ_n est combinaison linéaire d'un nombre fini seulement des vecteurs χ_1, χ_2, \dots et telle que $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ (8.6).

Exercice 12 (L'espace de Hilbert $L^2((a, b))$) :

On peut envisager cet espace comme suit : on se place dans l'exemple considéré dans l'Exercice 11 et on interprète un élément φ de l'espace l^2 comme une fonction à valeurs complexes définie sur les nombres naturels $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. On remplace l'argument discret [c.-à-d. $k \in \mathbb{N}$] par une variable continue x (x varie sur un intervalle (a, b)). Donc on considère des fonctions à valeurs complexes définies sur un intervalle (a, b) satisfaisant l'analogie de la condition (8.6), à savoir

$$\|\varphi\| \equiv \sqrt{\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx} < \infty^5 \quad (8.7)$$

En utilisant cette définition il faut se rappeler que L^2 est isomorphe à l^2 et peut alors être écrit aussi en utilisant un argument discret (c'est un espace de Hilbert séparable). Pour la définition formelle voir la section 8.1.3.

- (a) Montrer que l'ensemble de ces fonctions φ est un espace vectoriel linéaire sur le corps \mathbb{C} .
- (b) Montrer qu'on peut définir un produit scalaire $\langle | \rangle$ dans l'ensemble des fonctions vérifiant (8.7) tel que $\|\varphi\|^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle$. Est-ce que l'axiome (II) est satisfait ?

Définition : on désigne par $L^2((a, b))$ l'espace des classes d'équivalence des fonctions φ vérifiant (8.7), deux fonctions étant équivalentes si elles sont égales presque partout (par exemple pour tout x sauf un ensemble fini de points). $L^2(a, b)$ est un espace de Hilbert séparable.

- (c) Soit $(a, b) = (0, 1)$. Est-ce que la fonction $\varphi(x) = e^{ikx}$ (où k est un nombre réel fixé) appartient à $L^2((a, b))$? Pour quelles valeurs de la constante réelle α la fonction $\psi(x) = x^{-\alpha}$ définit un élément de $L^2((a, b))$?
- (d) Soit $(a, b) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Est-ce que la fonction $\varphi(x) = e^{ikx}$ (où k est un nombre réel fixé) appartient à $L^2(\mathbb{R})$? Pour quelles valeurs de la constante réelle α la fonction $\psi(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}$ définit un élément de $L^2(\mathbb{R})$?
- (e) Soit $(a, b) = (-\pi, +\pi)$. Donner une base orthonormée de $L^2((a, b))$ [Indication : séries de Fourier]. Montrer que $L^2((a, b))$ est isomorphe à l^2 .
- (f) Déterminer la dimension de $L^2((a, b))$.
- (g) Donner une fonction continue $\varphi(x)$ appartenant à $L^2((0, \infty))$ mais qui ne converge pas vers zéro lorsque $x \rightarrow \infty$.
- (h) Soit $(a, b) = (-1, +1)$ et φ la fonction définie par $\varphi(x) = 0$ si $-1 < x < 0$ et $\varphi(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$. Montrer qu'il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions continues sur $(-1, +1)$ telle que $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$.

5. En Analyse la norme $\|\varphi\|$ est parfois désignée par $\|\varphi\|_2$.

Remarques :

- (i) Les fonctions $\varphi(x) = e^{ikx}$ sont très importantes en mécanique quantique où elle sont appelées des *ondes planes*.
- (ii) Les vecteurs de l'espace de Hilbert $L^2((a, b))$ sont des fonctions (plus précisément des classes d'équivalence de fonctions). $L^2((a, b))$ est un espace dont les éléments sont des fonctions, c.-à-d. un espace de fonctions. Ce type d'espaces est courant en analyse et souvent utilisé en physique.
- (iii) Il existe des classes d'équivalence ne contenant aucune fonction continue ou continue par morceaux. Dans des applications pratiques on a affaire à des fonctions continues, et normalement on fait comme si les éléments de $L^2((a, b))$ étaient des fonctions individuelles et non pas des classes d'équivalence.
- (iv) L'intégrale dans (8.7) est une intégrale de Riemann usuelle si φ est continue par morceaux. Pour d'autres fonctions φ il faut utiliser la définition plus générale de l'intégrale (intégrale de Lebesgue) de la section précédente.

8.3 Différents types de sous-ensembles d'un espace de Hilbert \mathcal{H}

Sous-ensembles denses

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et \mathcal{D} un sous-ensemble de \mathcal{H} . On dit que \mathcal{D} est *dense dans \mathcal{H}* si, étant donné $\psi \in \mathcal{H}$ et $\epsilon > 0$, il existe un élément $\varphi \in \mathcal{D}$ tel que

$$\|\psi - \varphi\| < \epsilon.$$

Variétés linéaires et sous-espaces

Soit \mathcal{M} un sous-ensemble linéaire d'un espace de Hilbert \mathcal{H} [c.-à-d. $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \varphi + \alpha\psi$ appartient également à \mathcal{M} ; en d'autres termes, toutes les combinaisons linéaires finies⁶ d'éléments de \mathcal{M} appartiennent encore à \mathcal{M}]. Un tel ensemble \mathcal{M} sera appelé une *variété linéaire* dans \mathcal{H} .

Une variété linéaire \mathcal{M} dans \mathcal{H} est clairement un espace vectoriel linéaire complexe muni d'un produit scalaire (ce dernier étant donné par le produit scalaire défini dans \mathcal{H} , c.-à-d. si $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$, alors leur produit scalaire $\langle \varphi | \psi \rangle_{\mathcal{M}}$ dans \mathcal{M} est simplement $\langle \varphi | \psi \rangle$, leur produit scalaire dans \mathcal{H}). En général \mathcal{M} ne sera pas complet par rapport à la norme $\|\cdot\|$ c.-à-d. la limite d'une suite de Cauchy $\{\varphi_n\}$ avec $\varphi_n \in \mathcal{M}$ n'appartiendra pas à \mathcal{M} mais seulement à \mathcal{H} . Si \mathcal{M} est complet (c.-à-d. si \mathcal{M} vérifie lui-même tous les axiomes I à IV), on dira que \mathcal{M} est un *sous-espace* de \mathcal{H} .

Attention : La terminologie concernant les sous-ensembles linéaires n'est pas uniforme : certains auteurs utilisent le terme "sous-espace" ou "sous-espace vectoriel" pour une variété linéaire.

Complément orthogonal

Deux vecteurs φ, ψ de \mathcal{H} sont dits *orthogonaux* ($\varphi \perp \psi$) si $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$. Une suite $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ de vecteurs de \mathcal{H} est dite *orthonormée* si $\langle \varphi_j | \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$.

Soit \mathcal{N} un sous-ensemble de \mathcal{H} . On définit son *complément orthogonal* \mathcal{N}^\perp dans \mathcal{H} comme étant l'ensemble des vecteurs de \mathcal{H} qui sont orthogonaux à chaque vecteur de \mathcal{N} :

$$\mathcal{N}^\perp = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi | \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{N}\}. \quad (8.8)$$

6. C.-à-d. les vecteurs ψ de la forme $\psi = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k$, avec $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $\varphi_k \in \mathcal{M}$ et $N < \infty$.

Théorème de décomposition :

Soit \mathcal{M} un sous-espace de \mathcal{H} , \mathcal{M}^\perp son complément orthogonal. Alors tout vecteur ψ de \mathcal{H} peut être décomposé de façon unique en

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \text{avec } \psi_1 \in \mathcal{M} \text{ et } \psi_2 \in \mathcal{M}^\perp. \quad (8.9)$$

[La démonstration est donnée dans l'annexe, 8.8].

Remarque : Dans la situation du théorème de décomposition, on dit que \mathcal{H} est la *somme directe* de \mathcal{M} et \mathcal{M}^\perp , et on écrit $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. Dans la suite il est sous-entendu que toute décomposition en somme directe est une décomposition *orthogonale*.

Exercice 13 (Sous-ensembles de l^2) :

- (a) Soit \mathcal{M}_1 l'ensemble des éléments de l^2 qui n'ont qu'un nombre fini de composantes non-nulles [c.-à-d. $\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ appartient à \mathcal{M}_1 si $\alpha_k = 0$ à l'exception d'un nombre fini de valeurs de k].
- Montrer que \mathcal{M}_1 est dense dans l^2 .
 - \mathcal{M}_1 est-il une variété linéaire dans l^2 ?
 - \mathcal{M}_1 est-il un sous-espace de l^2 ?
- (b) Soit \mathcal{M}_2 l'ensemble des éléments φ de l^2 tels que $\alpha_1 = 0$.
- \mathcal{M}_2 est-il dense dans l^2 ?
 - \mathcal{M}_2 est-il une variété linéaire dans l^2 ?
 - \mathcal{M}_2 est-il un sous-espace de l^2 ?
 - Montrer que \mathcal{M}_2 est isomorphe à l^2 .
- (c) Soit \mathcal{M}_3 l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{M}_2$ qui n'ont qu'un nombre fini de composantes non-nulles.
- \mathcal{M}_3 est-il dense dans l^2 ?
 - \mathcal{M}_3 est-il dense dans \mathcal{M}_2 ?
 - Déterminer le complément orthogonal \mathcal{M}_3^\perp de \mathcal{M}_3 .
- (d) Soit \mathcal{M}_4 l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{M}_1$ tels que $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \dots = 0$ [c.-à-d. l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* des vecteurs $\chi_2, \chi_4, \chi_6, \chi_8, \dots$].
- Déterminer le complément orthogonal \mathcal{M}_4^\perp de \mathcal{M}_4 .
 - Déterminer le plus petit sous-espace $\overline{\mathcal{M}_4}$ de l^2 qui contient \mathcal{M}_4 .
 - Vérifier qu'on a la décomposition suivante de l^2 en la somme directe de deux sous-espaces dont chacun est isomorphe à l^2 tout entier : $l^2 = \overline{\mathcal{M}_4} \oplus \mathcal{M}_4^\perp$.

Remarque : $\overline{\mathcal{M}_4}$ est appelé l'*adhérence* de \mathcal{M}_4 ou la *fermeture* de \mathcal{M}_4 .

Exercice 14 (Complément orthogonal) :

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et \mathcal{N} un sous-ensemble quelconque de \mathcal{H} . Montrer que le complément orthogonal \mathcal{N}^\perp de \mathcal{N} est un sous-espace de \mathcal{H} .

Exercice 15 (Sous-espaces de $L^2((a, b))$) :

- (a) Indiquer un sous-espace de dimension 1 et un sous-espace de dimension 2 de $L^2((-\pi, +\pi))$.
- (b) Soit $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Montrer que $L^2((a_2, b_2))$ peut être identifié de façon naturelle avec un sous-espace de $L^2((a_1, b_1))$ [établir un isomorphisme entre $L^2((a_2, b_2))$ et un sous-espace de $L^2((a_1, b_1))$].
- (c) Soit $a < b < c$. Montrer que $L^2((a, c))$ est la somme directe de $L^2((a, b))$ et de $L^2((b, c))$: $L^2((a, c)) = L^2((a, b)) \oplus L^2((b, c))$.

- (d) Désignons par \mathcal{M}_+ l'ensemble des fonctions paires dans $L^2((-a, a))$ [$a > 0$] et par \mathcal{M}_- l'ensemble des fonctions impaires : $\varphi \in \mathcal{M}_+$ si $\varphi(x) = \varphi(-x)$ et $\varphi \in \mathcal{M}_-$ si $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ pour tout $x \in (-a, a)$.
- (i) Montrer que $\varphi_+ \perp \varphi_-$ si $\varphi_+ \in \mathcal{M}_+$ et $\varphi_- \in \mathcal{M}_-$.
- (ii) Montrer que chaque $\psi \in L^2((-a, a))$ peut être écrit comme $\psi = \psi_+ + \psi_-$ avec $\psi_+ \in \mathcal{M}_+$ et $\psi_- \in \mathcal{M}_-$.
- (iii) Dédurre des résultats précédents que \mathcal{M}_+ et \mathcal{M}_- sont des sous-espaces de $L^2((-a, a))$ et que $\mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_- = L^2((-a, a))$.

8.4 Applications linéaires

Une application linéaire d'un espace vectoriel linéaire \mathcal{V} (sur le corps \mathbb{C}) dans lui-même est une correspondance $\varphi \mapsto \mathcal{A}\varphi$ qui associe à chaque élément φ de \mathcal{V} un autre élément $\mathcal{A}\varphi$ de \mathcal{V} et qui vérifie la condition de linéarité

$$\alpha\varphi + \psi \mapsto \mathcal{A}(\alpha\varphi + \psi) = \alpha \cdot \mathcal{A}\varphi + \mathcal{A}\psi \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Si \mathcal{V} est un espace de Hilbert \mathcal{H} , on parle d'un *opérateur linéaire* plutôt que d'une application linéaire.

Si $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, un opérateur linéaire peut être donné (dans une base fixée de \mathcal{H}) sous forme d'une matrice $n \times n$:

$$\mathcal{A} = \{a_{jk}\} \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, il est peu commode d'utiliser le langage matriciel. Etant donné une matrice $\infty \times \infty$, celle-ci ne correspond en général pas à une application linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{H} . Ceci sera expliqué en relation avec l'Exercice 19 qui se trouve un peu plus loin.

Un *opérateur linéaire borné* \mathcal{A} est une application de \mathcal{H} dans \mathcal{H} telle que

$$\mathcal{A}(\varphi + \alpha\psi) = \mathcal{A}\varphi + \alpha \cdot \mathcal{A}\psi \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

et

$$\|\mathcal{A}\| \equiv \sup_{\mathbf{0} \neq \varphi \in \mathcal{H}} \frac{\|\mathcal{A}\varphi\|}{\|\varphi\|} < \infty. \quad (8.10)$$

(8.10) définit la *norme* $\|\mathcal{A}\|$ de l'opérateur \mathcal{A} [à ne pas confondre avec la norme $\|\psi\|$ d'un vecteur ψ ! L'éq. (8.10) définit la norme de \mathcal{A} en termes de la norme dans \mathcal{H} de certains vecteurs]. (8.10) implique que

$$\|\mathcal{A}\varphi\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}. \quad (8.11)$$

Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, la donnée d'un opérateur linéaire est équivalente à la donnée d'une matrice $n \times n$ et la finitude de \mathcal{A} (la condition (8.10)) est automatiquement vraie. Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, le supremum dans (8.10) n'est pas nécessairement fini, voir l'Exercice 19.

L'*adjoint* \mathcal{A}^* d'un opérateur linéaire borné est une application linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{H} telle que

$$\langle \varphi | \mathcal{A}\psi \rangle = \langle \mathcal{A}^*\varphi | \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \quad (8.12)$$

(Si $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, l'adjoint de \mathcal{A} est donné par la matrice adjointe $\mathcal{A}^\dagger \equiv \overline{\mathcal{A}^T}$). L'existence et l'unicité de \mathcal{A}^* seront démontrées plus loin.

Un opérateur linéaire borné est appelé *autoadjoint* si $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, en d'autres termes si

$$\langle \varphi | \mathcal{A}\psi \rangle = \langle \mathcal{A}\varphi | \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \quad (8.13)$$

Exercice 16 (Opérateurs linéaires bornés) :

(a) L'opérateur identité $\mathbb{1}$ est défini par

$$\mathbb{1}\varphi = \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{H} .$$

Vérifier que $\mathbb{1}$ est un opérateur linéaire borné autoadjoint et calculer sa norme.

(b) Faire de même pour l'opérateur zéro $\mathbf{0}$ défini par $\mathbf{0}\varphi = \mathbf{0}$.

(c) Soit $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$ la base orthonormée de l^2 introduite dans l'Exercice 11 (b,iv). Un opérateur linéaire borné est entièrement défini si on connaît son action sur chacun des vecteurs χ_k . Par exemple, soit \mathcal{C} un opérateur linéaire tel que

$$\mathcal{C}\chi_k = \frac{(-i)^k}{k} \chi_k \quad k = 1, 2, \dots ;$$

si $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_k = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ est un vecteur de l^2 , on doit avoir

$$\mathcal{C}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathcal{C}\chi_k = \left(-i\alpha_1, -\frac{1}{2}\alpha_2, \frac{i}{3}\alpha_3, \frac{1}{4}\alpha_4, \dots \right) .$$

Montrer que cet opérateur \mathcal{C} est borné, et déterminer sa norme et son adjoint \mathcal{C}^* . Donner une représentation matricielle de \mathcal{C} et de \mathcal{C}^* .

(d) Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés et $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) Montrer que $\mathcal{A} + \alpha\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}\mathcal{B}$ sont également des opérateurs linéaires bornés.

ii) Montrer que $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.

(iii) Montrer que $\mathcal{A}^{**} \equiv (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

(iv) Supposons \mathcal{A} et \mathcal{B} autoadjoints. Sous quelles conditions $\mathcal{A} + \alpha\mathcal{B}$ ou $\mathcal{A}\mathcal{B}$ sont-ils également autoadjoints ?

8.5 Le dual d'un espace de Hilbert

Le dual \mathcal{H}^* d'un espace de Hilbert \mathcal{H} est par définition l'ensemble des fonctionnelles linéaires bornées sur \mathcal{H} , c.-à-d. l'ensemble des applications $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$ telles que

$$f(\varphi + \alpha\psi) = f(\varphi) + \alpha f(\psi) \quad \text{linéarité}$$

et

$$\|f(\psi)\| \leq c \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{H}, \quad f \text{ bornée}$$

où c est une constante (indépendante de ψ).

L'espace \mathcal{H}^* est un espace vectoriel linéaire (la somme de deux fonctionnelles linéaires bornées p.ex. est encore une fonctionnelle linéaire bornée), et \mathcal{H}^* est également normé, avec norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \sup_{\mathbf{0} \neq \psi \in \mathcal{H}} \frac{|f(\psi)|}{\|\psi\|} . \quad (8.14)$$

Chaque vecteur φ de \mathcal{H} détermine un élément f_φ de \mathcal{H}^* , en posant

$$f_\varphi(\psi) = \langle \varphi | \psi \rangle \quad (\text{où } \psi \text{ varie sur } \mathcal{H}) . \quad (8.15)$$

En effet, le produit scalaire (pour φ fixé) est linéaire en ψ , et

$$\begin{aligned} \|f_\varphi\|_{\mathcal{H}^*} &= \sup_{\mathbf{0} \neq \psi \in \mathcal{H}} \frac{|\langle \varphi | \psi \rangle|}{\|\psi\|} \\ &\leq \sup_{\mathbf{0} \neq \psi \in \mathcal{H}} \frac{\|\varphi\| \|\psi\|}{\|\psi\|} \quad (\text{utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (8.1)}) \\ &= \|\varphi\| . \end{aligned}$$

En fait on a

$$\|f_\varphi\|_{\mathcal{H}^*} = \|\varphi\| \quad (8.16)$$

puisque le supremum est atteint pour $\psi = \varphi$:

$$\frac{\langle \varphi | \varphi \rangle}{\|\varphi\|} = \frac{\|\varphi\|^2}{\|\varphi\|} = \|\varphi\| .$$

Nous avons ainsi montré que chaque vecteur de \mathcal{H} peut être identifié avec un élément de l'espace dual \mathcal{H}^* . Il s'avère que le contraire est également vrai (on peut donc identifier \mathcal{H}^* et \mathcal{H}) :

Proposition (Lemme de Riesz) :

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, f une fonctionnelle linéaire bornée sur \mathcal{H} . Alors il existe un (unique) vecteur φ de \mathcal{H} tel que

$$f(\psi) = \langle \varphi | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H} . \quad (8.17)$$

En particulier :

$$\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}} \equiv \|\varphi\| . \quad (8.18)$$

(La démonstration de cette proposition est donnée en annexe §8.8.)

Corollaire : Existence de l'adjoint \mathcal{A}^* d'un opérateur linéaire borné \mathcal{A}

Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire borné. Soit φ un vecteur fixé de \mathcal{H} . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (8.1) et (8.11), on obtient :

$$|\langle \varphi | \mathcal{A}\psi \rangle| \leq \|\varphi\| \|\mathcal{A}\psi\| \leq \|\varphi\| \|\mathcal{A}\| \|\psi\| \equiv c_\varphi \|\psi\| .$$

Comme c_φ est fini, le produit scalaire $\langle \varphi | \mathcal{A}\psi \rangle$ (considéré comme fonction de ψ) définit une fonctionnelle linéaire bornée sur \mathcal{H} . Donc d'après le Lemme de Riesz il existe un unique vecteur φ^* (qui dépend de φ) tel que

$$\langle \varphi | \mathcal{A}\psi \rangle = \langle \varphi^* | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H} . \quad (8.19)$$

On définit $\mathcal{A}^*\varphi = \varphi^*$. Comme chaque φ de \mathcal{H} détermine de façon unique un vecteur φ^* dans \mathcal{H} , on obtient ainsi (en faisant varier φ sur \mathcal{H}) une application \mathcal{A}^* de \mathcal{H} dans \mathcal{H} .

Vérifions que c'est bien un opérateur linéaire : $\mathcal{A}^*(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)$ est l'unique vecteur $(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)^*$ tel que $\langle \varphi_1 + \alpha\varphi_2 | \mathcal{A}\psi \rangle = \langle (\varphi_1 + \alpha\varphi_2)^* | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$. Or

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 + \alpha\varphi_2 | \mathcal{A}\psi \rangle &= \langle \varphi_1 | \mathcal{A}\psi \rangle + \bar{\alpha} \langle \varphi_2 | \mathcal{A}\psi \rangle \\ &= \langle \varphi_1^* | \psi \rangle + \bar{\alpha} \langle \varphi_2^* | \psi \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^*\varphi_1 | \psi \rangle + \bar{\alpha} \langle \mathcal{A}^*\varphi_2 | \psi \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^*\varphi_1 + \alpha\mathcal{A}^*\varphi_2 | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H} . \end{aligned}$$

Donc on doit avoir $(\varphi_1 + \alpha\varphi_2)^* = \mathcal{A}^*\varphi_1 + \alpha\mathcal{A}^*\varphi_2$, c.-à-d. $\mathcal{A}^*(\varphi_1 + \alpha\varphi_2) = \mathcal{A}^*\varphi_1 + \alpha\mathcal{A}^*\varphi_2$, ce qui exprime la linéarité de \mathcal{A}^* .

Exercice 17 (Norme de l'opérateur adjoint) :

Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire borné.

(i) Montrer que son adjoint \mathcal{A}^* est borné et que $\|\mathcal{A}^*\| \leq \|\mathcal{A}\|$.

(ii) Montrer ensuite que $\|\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{A}^*\|$ donc [avec (i)] qu'on a en fait $\|\mathcal{A}^*\| = \|\mathcal{A}\|$.

Bras et kets ("Notations de Dirac", utilisées par les physiciens)

Les vecteurs de l'espace de Hilbert sont appelés des *kets* et désignés par un crochet " $| \rangle$ " dans lequel on met une lettre qui spécifie le vecteur (plus généralement l'état en mécanique quantique). Donc un vecteur ψ de \mathcal{H} est noté $|\psi\rangle$.

Les vecteurs de l'espace dual \mathcal{H}^* sont appelés des *bras* et désignés par un crochet " $\langle |$ ". D'après la Proposition qui précède, chaque φ de \mathcal{H} détermine un bra $\langle\varphi|$ et chaque bra est de la forme $\langle\varphi|$ pour un certain vecteur φ de \mathcal{H} . [L'utilisation de ces notations sera poussée plus loin au cours de mécanique quantique.]

En mettant un bra $\langle\varphi|$ et un ket $|\psi\rangle$ ensemble on obtient l'objet $\langle\varphi|\psi\rangle$ le produit scalaire entre les vecteurs φ et ψ (la valeur de la fonctionnelle f_φ (voir (8.15)) "au point" ψ de \mathcal{H}), . En mettant les mots bra et ket ensemble, on obtient le mot *braket* (bracket est le mot anglais pour "crochet").

Règle : Lorsqu'un bra se trouve à gauche d'un ket, ils se contractent pour donner un nombre :

$$(\langle\varphi|)(|\psi\rangle) = \langle\varphi|\psi\rangle .$$

Si \mathcal{A} est un opérateur linéaire borné dans \mathcal{H} et $\psi \in \mathcal{H}$, alors $\mathcal{A}\psi$ est un vecteur de \mathcal{H} , donc il correspond un ket $|\mathcal{A}\psi\rangle$ à ce vecteur. On écrit

$$|\mathcal{A}\psi\rangle = \mathcal{A}|\psi\rangle , \quad (8.20)$$

c.-à-d. les opérateurs sont considérés comme agissant sur les kets.

Le vecteur $\mathcal{A}\psi$ détermine également un bra. On écrit

$$\langle\mathcal{A}\psi| = |\psi\rangle\mathcal{A}^* , \quad (8.21)$$

c.-à-d. les opérateurs agissent sur les bras à gauche, et lorsqu'on sort un opérateur d'un bra, cet opérateur doit être remplacé par son adjoint. Ceci est logique, puisqu'on a en termes du produit scalaire :

$$\langle\varphi|\mathcal{A}\psi\rangle = \langle\mathcal{A}^*\varphi|\psi\rangle . \quad (8.22)$$

On utilise la notation suivante pour le produit scalaire dans (8.22) :

$$\langle\varphi|\mathcal{A}\psi\rangle \equiv \langle\varphi|\mathcal{A}|\psi\rangle . \quad (8.23)$$

Exercice 18 (Bra à droite d'un ket) :

Regardons l'expression

$$\mathcal{A}_{\varphi_1\varphi_2} \equiv |\varphi_1\rangle\langle\varphi_2| \quad (8.24)$$

où φ_1, φ_2 sont deux vecteurs de \mathcal{H} .

(i) Montrer que cette expression définit un opérateur linéaire dans \mathcal{H} (agir avec $\mathcal{A}_{\varphi_1\varphi_2}$ sur un ket $|\psi\rangle$).

(ii) Calculer la norme de cet opérateur ($\| |\varphi_1\rangle \| \cdot \| |\varphi_2\rangle \|$).

(iii) Vérifier que, si $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ et $\|\varphi\| = 1$ alors $\mathcal{A}_{\varphi\varphi}$ est le *projecteur orthogonal sur le sous-espace uni-dimensionnel engendré par φ* , c.-à-d. que $\mathcal{A}_{\varphi\varphi}$ appliqué à un multiple du vecteur φ le laisse invariant, tandis que tout vecteur ψ orthogonal à φ est appliqué sur $\mathbf{0}$ par $\mathcal{A}_{\varphi\varphi}$.

(iv) Soit χ_1, χ_2, \dots un ensemble de vecteurs orthonormés $\langle\chi_j|\chi_k\rangle = \delta_{jk}$. Quelle est la signification géométrique de l'opérateur

$$\sum_k |\chi_k\rangle\langle\chi_k| \quad ?$$

Discuter le cas particulier où les vecteurs χ_k forment une base orthonormée de \mathcal{H} .

8.6 Opérateurs non-bornés

La théorie des opérateurs dans un espace vectoriel de dimension infinie fait apparaître de nouveaux problèmes :

(i) un opérateur dans un espace de dimension infinie peut être *non-borné* (cela arrive en mécanique quantique pour des observables décrivant des grandeurs physiques qui peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes – par exemple la position d’une particule dans l’espace infini, le moment cinétique d’une particule) ;
(ii) un opérateur dans un espace de dimension infinie n’est pas nécessairement défini sur tous les vecteurs (souvent on a une expression formelle pour un opérateur, mais elle n’a pas de sens sur certains vecteurs – un exemple est une matrice $\infty \times \infty$, comme on verra dans l’Exercice 19, ou l’opérateur formel d/dx qui n’a un sens que sur des fonctions d’onde différentiables).

Exercice 19 (Domaine d’une application linéaire) :

a) Considérons la matrice suivante

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

En se référant à la base orthonormée $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$ de l^2 de l’Exercice 11 (b,iv), calculer l’action de \mathcal{A} sur chacun des vecteurs $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$. Pour quels k le vecteur image $\mathcal{A}\chi_k$ appartient-il encore à l^2 ?

Conclusion : Dans un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension infinie, un opérateur linéaire n’est pas nécessairement défini sur tous les vecteurs de \mathcal{H} . On appelle *domaine* de l’opérateur le sous-ensemble de \mathcal{H} sur lequel l’opérateur est défini.

(b) Dans la base $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots\}$ utilisée déjà dans (a), déterminer le domaine maximal possible de l’opérateur linéaire \mathcal{B} défini par

$$\mathcal{B}\chi_k = k\chi_k \quad k = 1, 2, \dots$$

[donc, si $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \chi_k = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ est un vecteur de l^2 , on doit avoir

$$\mathcal{B}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k \chi_k = (1\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, 4\alpha_4, \dots)].$$

Montrer que ce domaine [désigné par $D(\mathcal{B})$] est une variété linéaire dans l^2 , et que $D(\mathcal{B})$ est dense dans l^2 . Quelle serait la matrice qui représente cet opérateur ?

(c) Faire de même pour l’opérateur \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{C}\chi_k = \frac{(-i)^k}{k} \chi_k \quad k = 1, 2, \dots$$

Exercice 20 (Opérateurs de multiplication dans $L^2((a, b))$) :

Soit (a, b) un intervalle dans \mathbb{R} . Si θ est une fonction de (a, b) dans \mathbb{C} , on peut lui associer un opérateur \mathcal{A} dans $L^2((a, b))$ en posant⁷

$$(\mathcal{A}\varphi)(x) = \theta(x)\varphi(x) \quad \text{pour } \varphi \in L^2((a, b)).$$

En d’autres termes la fonction image $\mathcal{A}\varphi$ de φ sous \mathcal{A} est obtenue à partir de la fonction φ en multipliant φ par la fonction θ . Un opérateur de ce type est appelé un *opérateur de multiplication*.

7. Sans se soucier d’éventuels problèmes de domaine dans les points (a), (b) et (c).

- (a) Montrer que \mathcal{A} est un opérateur linéaire.
 (b) Montrer que \mathcal{A}^* est également un opérateur de multiplication, c.-à-d. qu'il existe une fonction $\rho : (a, b) \mapsto \mathbb{C}$ telle que

$$(\mathcal{A}^* \varphi)(x) = \rho(x) \varphi(x).$$

Quelle est la relation entre $\rho(x)$ et $\theta(x)$?

- (c) Soit \mathcal{B} un deuxième opérateur de multiplication : $(\mathcal{B}\varphi)(x) = \beta(x)\varphi(x)$ où $\beta : (a, b) \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction fixée. Montrer que le produit $\mathcal{A}\mathcal{B}$ est également un opérateur de multiplication et calculer le commutateur $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$.
 (d) Quelle condition faut-il imposer à la fonction θ pour que l'opérateur \mathcal{A} soit
 (i) borné
 (ii) autoadjoint
 (iii) unitaire [c.-à-d. tel que $\mathcal{A}^* \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^* = \mathbb{1}$]
 (iv) un projecteur [c.-à-d. tel que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} = \mathcal{A}^2$] ? Dans le cas (i), quelle serait la norme de \mathcal{A} (en termes de la fonction θ que l'on supposera continue) ?
 (e) Si \mathcal{A} est non-borné, quel est son domaine ?
 (f) Considérer le cas particulier où $(a, b) = (0, 1)$ et $\theta(x) = (\epsilon + x)^{-1}$, où $\epsilon > 0$ est une constante. Montrer que l'opérateur \mathcal{A} est borné et autoadjoint. Déterminer ses valeurs propres (voir la définition ci-dessous) et sa norme.
 (g) Qu'est-ce qui change si on met $\epsilon = 0$ dans l'exemple précédent ?

8.7 Spectre d'un opérateur

Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . Un nombre complexe z est appelé *valeur propre* de \mathcal{A} s'il existe un vecteur $\psi \neq 0$ dans \mathcal{H} tel que $\mathcal{A}\psi = z\psi$ [ψ est alors appelé un *vecteur propre* de \mathcal{A}].

Si $\dim \mathcal{H} < \infty$ et \mathcal{A} est autoadjoint, il existe une base orthonormée de \mathcal{H} formée de vecteurs propres de \mathcal{A} , et les valeurs propres de \mathcal{A} sont toutes réelles (diagonalisation d'une matrice hermitienne $n \times n$). Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, il se peut que \mathcal{A} ne possède aucune valeur propre. Pour couvrir ces cas, on introduit la notion de "spectre". Un nombre complexe z appartient au *spectre* de \mathcal{A} s'il existe une suite $\{\varphi_n\}$ de vecteurs de \mathcal{H} [plus précisément dans le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{A})$] telle que

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \forall n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathcal{A} - z)\varphi_n\| = 0. \quad (8.25)$$

Donc le *spectre* $\sigma(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} est l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels on peut trouver une telle suite $\{\varphi_n\}$.

La notion de spectre est une généralisation de la notion de valeur propre. En effet, si z est valeur propre de \mathcal{A} , alors z appartient au spectre de \mathcal{A} : il suffit de poser $\varphi_n = \varphi$ pour tout n , où φ est un vecteur propre de \mathcal{A} pour la valeur propre z ($\|\varphi\| = 1$, $(\mathcal{A} - z)\varphi = \mathbf{0}$). Mais la définition (8.25) est plus générale ; il se peut qu'il existe une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant (8.25) sans que z soit valeur propre de \mathcal{A} . (8.25) veut dire que z est "presque" valeur propre : pour tout $\epsilon > 0$ il existe un vecteur ψ tel que $\|\psi\| = 1$ et $\mathcal{A}\psi \approx z\psi$ dans le sens que $\|(\mathcal{A} - z)\psi\| < \epsilon$.

Il est facile à montrer que le spectre d'un opérateur autoadjoint est réel [voir l'annexe §8.8]. Il se peut que le spectre ne consiste qu'en des valeurs propres (appelé un *spectre purement discret* en physique). Dans le cas où l'opérateur n'a aucune valeur propre, on parle d'un *spectre purement continu* (voir l'exercice suivant pour des exemples⁸). En général un opérateur possède un *spectre mixte*, c.-à-d. un certain nombre de valeurs propres (mais l'ensemble de tous les vecteurs propres n'engendre pas l'espace de Hilbert mais seulement un sous-espace de \mathcal{H}) ainsi que du spectre continu.

Exercice 21 (Spectre d'un opérateur autoadjoint) :

Soit $\mathcal{H} = L^2((a, b))$ et soit \mathcal{A} l'opérateur de multiplication par la variable x : $(\mathcal{A}\psi)(x) = x\psi(x)$.

8. Le spectre continu est un sous-ensemble de \mathbb{R} ayant la puissance du continu, p.ex. un intervalle.

- (a) Quelles sont les valeurs propres de \mathcal{A} ? [Indication : Exercice 20 (f)].
 (b) Soit z un nombre complexe n'appartenant pas à l'intervalle $[a, b]$. Montrer que, si δ désigne la distance de z à l'intervalle $[a, b]$, on a pour tout vecteur φ :

$$\|(\mathcal{A} - z)\varphi\|^2 \equiv \int_a^b |(x - z)|^2 dx \geq \delta^2 \|\varphi\|^2.$$

Conclure que le spectre de \mathcal{A} est contenu dans $[a, b]$.

- (c) Soit $z \in [a, b]$. Montrer que z appartient au spectre de \mathcal{A} en construisant une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant (8.25). Conclusion : le spectre de \mathcal{A} est identique à l'intervalle $[a, b]$.
 (d) Soit $(\mathcal{A}\varphi)(x) = \theta(x)\varphi(x)$ comme dans l'Exercice 20, où θ est une fonction continue et réelle (donc \mathcal{A} est autoadjoint). Quel est le spectre de \mathcal{A} ? Sous quelles conditions l'opérateur \mathcal{A} possède-t-il des valeurs propres ?

Exercice 22 (Spectre de l'opérateur d'impulsion) :

Formellement l'opérateur d'impulsion pour une particule en une dimension (avec $\hbar = 1$) est donné par l'expression $\mathcal{P} = -id/dx$. Son domaine ne peut contenir que des fonctions différentiables (avec dérivée de carré intégrable).

- (a) Considérons une particule confinée dans un interval fini \mathcal{I} , p.ex. $\mathcal{I} = (-a, +a)$.
 (i) Montrer que l'opérateur $-id/dx$ n'est pas autoadjoint [trouver des fonctions différentiables pour lesquelles (8.13) n'est pas satisfait].
 (ii) Pour associer un opérateur autoadjoint à $-id/dx$, il faut prendre comme domaine de \mathcal{P} un sous-ensemble des fonctions différentiables en imposant des conditions à la limite aux extrémités de \mathcal{I} . Exemple : on n'admet que des fonctions d'onde φ satisfaisant $\varphi(+a) = \varphi(-a)$. Montrer que, si φ et ψ satisfont cette condition, alors (8.13) est satisfait.
 (iii) Déterminer les valeurs propres de \mathcal{P} (avec comme domaine celui indiqué dans (ii)).
 (b) Considérons une particule dans \mathbb{R} . Dans ce cas on n'a pas besoin d'imposer des conditions à la limite (à l'infini), car si φ et φ' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, on peut montrer assez facilement que $\varphi(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.
 (i) Quelles sont les valeurs propres de \mathcal{P} dans ce cas ?
 (ii) Comparer avec le résultat de (a) lorsque $a \rightarrow \infty$.

Exercice 23 (Sous-espace associé à une valeur propre d'un opérateur) :

Soit \mathcal{A} un opérateur linéaire borné dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et λ une valeur propre de \mathcal{A} . Désignons par $\mathcal{M}_{\{\lambda\}}$ l'ensemble des vecteurs propres de \mathcal{A} à valeur propre λ , c.-à-d.

$$\mathcal{M}_{\lambda} = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}\varphi = \lambda\varphi\}.$$

Montrer que $\mathcal{M}_{\{\lambda\}}$ est un sous-espace de \mathcal{H} .

Exercice 24 (Projecteurs) :

Soit \mathcal{M} un sous-espace d'un espace de Hilbert \mathcal{H} , \mathcal{M}^\perp son complément orthogonal. Alors tout vecteur ψ de \mathcal{H} possède une décomposition unique en $\psi = \psi_1 + \psi_2$, avec $\psi_1 \in \mathcal{M}$, $\psi_2 \in \mathcal{M}^\perp$ (d'après le Théorème de décomposition). La correspondance $\psi \mapsto \psi_1$ définit une application dans \mathcal{H} , la "projection orthogonale" sur le sous-espace \mathcal{M} . Cette application sera appelée le projecteur $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ sur le sous-espace \mathcal{M} . [Il serait plus précis d'appeler $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ le projecteur orthogonal sur \mathcal{M}].

- (a) Vérifier que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ a les propriétés suivantes :
 (i) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est linéaire,
 (ii) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est borné,
 (iii) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est autoadjoint,
 (iv) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ est idempotent, c.-à-d. $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}^2 = \mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.

- (b) Déterminer la norme $\|\mathcal{P}_M\|$ d'un projecteur.
 (c) En se plaçant dans l'espace de Hilbert l^2 , donner un exemple d'un projecteur \mathcal{P}_M sur un sous-espace \mathcal{M} de dimension 1. De même pour $\dim \mathcal{M} = 0$, $\dim \mathcal{M} = 3$, $\dim \mathcal{M} = \infty$.
 (d) Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et \mathcal{P} est une application linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{H} ayant les propriétés suivantes :

\mathcal{P} est idempotent, c.-à-d. $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$

\mathcal{P} est autoadjoint, c.-à-d. on a $\langle \mathcal{P}\varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \mathcal{P}\psi \rangle$, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$

Montrer que \mathcal{P} est un projecteur (orthogonal), c.-à-d. qu'il existe un sous-espace \mathcal{M} de \mathcal{H} tel que \mathcal{P} est identique au projecteur \mathcal{P}_M sur ce sous-espace.

Indications : Prendre $\mathcal{M} = \{\varphi \in \mathcal{H} | \mathcal{P}\varphi = \varphi\}$. Utiliser le résultat de l'Exercice 23 pour voir que \mathcal{M} est un sous-espace. Pour $\psi \in \mathcal{H}$, poser $\psi_1 = \mathcal{P}\psi$ et $\psi_2 = \psi - \mathcal{P}\psi$ et vérifier que $\psi_1 \in \mathcal{M}$ et $\psi_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

Exercice 25 (Isométries et opérateurs unitaires) :

Définition : Un opérateur linéaire borné \mathcal{U} dans un espace de Hilbert \mathcal{H} est appelé une *isométrie* (ou un *opérateur isométrique*) si $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathbb{1}$.

- (a) Montrer qu'une isométrie préserve le produit scalaire, c.-à-d. que

$$\langle \mathcal{U}\varphi | \mathcal{U}\psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}. \quad (8.26)$$

- (b) Soit \mathcal{U} une isométrie.

(i) Montrer que $\mathcal{F} \equiv \mathcal{U}\mathcal{U}^*$ est un projecteur.

(ii) Montrer que \mathcal{F} est égal au projecteur \mathcal{P}_M sur le sous-espace $\mathcal{M} = \{\mathcal{U}\varphi | \varphi \in \mathcal{H}\}$ [l'image de \mathcal{H} par \mathcal{U}]. (Indication : Tenir compte du résultat de l'Exercice 24 (d).)

(iii) Montrer que $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{H}$.

Définition : Une isométrie est appelée un *opérateur unitaire* si le sous-espace \mathcal{M} dans (b) est égal à \mathcal{H} , en d'autres termes si $\mathcal{F} = \mathbb{1}$. Donc un opérateur linéaire borné est unitaire si

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathbb{1}. \quad (8.27)$$

- (c) Montrer que, si $\dim \mathcal{H} < \infty$, tout opérateur isométrique est unitaire (donc la première équation dans (8.27) implique la deuxième dans ce cas).

Indication : Utiliser (b.iii).

Remarque : Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, il existe des sous-espaces stricts de \mathcal{H} de dimension infinie, donc il existe des isométries qui ne sont pas unitaires. En physique les opérateurs unitaires sont particulièrement importants et il faut exiger les deux conditions dans (8.27) pour s'assurer que \mathcal{U} soit unitaire.

8.8 ANNEXE

8.8.1 Démonstration du Théorème de décomposition

Nous utiliserons l'identité suivante : si θ et η sont des vecteurs dans \mathcal{H} , alors

$$\begin{aligned} \|\theta + \eta\|^2 + \|\theta - \eta\|^2 &= \{ \|\theta\|^2 + \langle \eta | \theta \rangle + \|\theta\|^2 \} + \{ \|\theta\|^2 - \langle \theta | \eta \rangle - \langle \eta | \theta \rangle + \|\eta\|^2 \} \\ &= 2\|\theta\|^2 + 2\|\eta\|^2. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Nous désignons par d la distance de ψ à \mathcal{M} , c.-à-d.

$$d = \inf_{\varphi \in \mathcal{M}} \|\psi - \varphi\|.$$

- (a) Montrons d'abord qu'il existe un unique vecteur $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ tel que $d = \|\psi - \varphi_0\|$.

(i) Existence : choisissons une suite $\{\varphi_k | k = 1, 2, \dots\}$ dans \mathcal{M} telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi - \varphi_k\| = d.$$

Prenons $\theta = (\psi - \varphi_j)/2$ et $\eta = (\psi - \varphi_k)/2$ dans (8.28). Nous obtenons que

$$\left\| \frac{1}{2} (\varphi_j - \varphi_k) \right\|^2 = \frac{1}{2} \|\psi - \varphi_j\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi - \varphi_k\|^2 - \left\| \psi - \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_k) \right\|^2.$$

Comme $\varphi_j + \varphi_k \in \mathcal{M}$: $\left\| \psi - \frac{1}{2} (\varphi_j + \varphi_k) \right\|^2 \geq d^2$. Donc

$$\frac{1}{4} \|\varphi_j - \varphi_k\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\psi - \varphi_j\|^2 + \frac{1}{2} \|\psi - \varphi_k\|^2 - d^2 \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } j, k \rightarrow \infty.$$

Donc $\{\varphi_k\}$ est une suite de Cauchy (dans \mathcal{H}). Désignons sa limite par φ_0 . On a $\varphi_0 \in \mathcal{M}$, puisque \mathcal{M} est un sous-espace fermé. Donc $\|\psi - \varphi_0\| \geq d$. D'autre part

$$\|\psi - \varphi_0\| \leq \|\psi - \varphi_k\| + \|\varphi_k - \varphi_0\| \rightarrow d + 0 = d.$$

Ceci montre que $\|\psi - \varphi_0\| = d$.

(ii) Unicité : Supposons qu'il existe deux vecteurs $\varphi_0^{(1)}$ et $\varphi_0^{(2)}$ dans \mathcal{M} tels que

$$\left\| \psi - \varphi_0^{(1)} \right\| = \left\| \psi - \varphi_0^{(2)} \right\| = d.$$

En prenant $\theta = (\psi - \varphi_0^{(1)})/2$ et $\eta = (\psi - \varphi_0^{(2)})/2$ dans (8.28), on obtient comme dans (i) que

$$\frac{1}{4} \left\| \varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left\| \psi - \varphi_0^{(1)} \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \psi - \varphi_0^{(2)} \right\|^2 - d^2 = 0.$$

Donc $\left\| \varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} \right\| = 0$, c.-à-d. $\varphi_0^{(1)} = \varphi_0^{(2)}$.

(b) Pour démontrer (8.9), prenons $\psi_1 = \varphi_0$. Donc $\psi_2 = \psi - \varphi_0$, et il faut montrer que $\psi_2 \in \mathcal{M}^\perp$, en d'autres termes $\langle \rho | \psi_2 \rangle = 0$ pour chaque $\rho \in \mathcal{M}$. Soit donc $\rho \neq \mathbf{0}$ un vecteur fixé de \mathcal{M} , et posons $a = \langle \rho | \psi_2 \rangle$. Soit

$$\varphi = \psi_1 + \frac{a}{\|\rho\|^2} \rho.$$

Clairement $\varphi \in \mathcal{M}$, donc $\|\psi - \varphi\| \geq d$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|\psi - \varphi\|^2 &= \left\langle \psi_2 - \frac{a}{\|\rho\|^2} \rho | \psi_2 - \frac{a}{\|\rho\|^2} \rho \right\rangle \\ &= \|\psi_2\|^2 - \frac{\bar{a}}{\|\rho\|^2} \langle \rho | \psi_2 \rangle - \frac{a}{\|\rho\|^2} \langle \psi_2 | \rho \rangle + \frac{|a|^2}{\|\rho\|^4} \|\rho\|^2 \\ &= \|\psi_2\|^2 - \frac{|a|^2}{\|\rho\|^2} - \frac{|a|^2}{\|\rho\|^2} + \frac{|a|^2}{\|\rho\|^2} \\ &= \|\psi_2\|^2 - \frac{|a|^2}{\|\rho\|^2} = d^2 - \frac{|a|^2}{\|\rho\|^2} \leq d^2. \end{aligned}$$

Comme $\|\psi - \varphi\|^2 \geq d^2$ (voir plus haut), nous pouvons conclure que $a = 0$.

Montrons encore l'unicité de la décomposition (8.9). Supposons que $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{M}$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{M}^\perp$ et

$$\eta_1 + \theta_1 = \eta_2 + \theta_2.$$

Nous devons montrer que $\eta_1 = \eta_2$ et $\theta_1 = \theta_2$. Or

$$\begin{aligned} 0 &= \|\mathbf{0}\|^2 = \|\eta_1 + \theta_1 - (\eta_2 + \theta_2)\|^2 \\ &= \|(\eta_1 - \eta_2) + (\theta_1 - \theta_2)\|^2 \\ &= \|\eta_1 - \eta_2\|^2 + \|\theta_1 - \theta_2\|^2, \end{aligned}$$

car $\langle \eta_1 - \eta_2 | \theta_1 - \theta_2 \rangle = 0$. Donc $\|\eta_1 - \eta_2\| = \|\theta_1 - \theta_2\| = 0$, et par conséquent on a $\eta_1 = \eta_2$ et $\theta_1 = \theta_2$.

8.8.2 Démonstration du Lemme de Riesz

(a) Soit \mathcal{M} l'ensemble des vecteurs $\psi \in \mathcal{H}$ tels que $f(\psi) = 0$. Montrons que \mathcal{M} est un sous-espace fermé :

$$(i) \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{M}, \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow f(\psi_1 + \alpha\psi_2) = f(\psi_1) + \alpha f(\psi_2) = 0 + 0 = 0,$$

(ii) si $\{\psi_n\} \in \mathcal{M}$ et $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|\psi_m - \psi_n\| = 0$, alors la suite $\{\psi_n\}$ possède une limite ψ dans \mathcal{H} (c.-à-d. $\psi \in \mathcal{H}$), et il faut montrer que ψ appartient à \mathcal{M} (complétude de \mathcal{M}), c.-à-d. que $f(\psi) = 0$. Or

$$|f(\psi)| = |f(\psi - \psi_n + \psi_n)| = |f(\psi - \psi_n) + f(\psi_n)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}^*} \|\psi - \psi_n\|.$$

Comme $\|\psi - \psi_n\| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, on doit avoir $f(\psi) = 0$.

$$(b) \text{ Si } f \equiv 0, \text{ on prend } \varphi = \mathbf{0}; \text{ on a alors bien } 0 = f(\psi) = \langle \mathbf{0} | \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Si $f \neq 0$, il existe un vecteur χ de \mathcal{H} tel que $f(\chi) \neq 0$. On écrit $\chi = \chi_1 + \chi_2$ avec $\chi_1 \in \mathcal{M}$ et $\chi_2 \in \mathcal{M}^\perp$ (en utilisant le Théorème de décomposition (cfr. §8.3)). Alors

$$f(\chi_2) = f(\chi - \chi_1) = f(\chi) - f(\chi_1) = f(\chi) \neq 0.$$

en particulier $\chi_2 \neq \mathbf{0}$ (puisque $f(\mathbf{0}) = 0$).

Si ψ est un vecteur quelconque de \mathcal{H} , considérons le vecteur $\psi - \frac{f(\psi)}{f(\chi_2)} \chi_2$. On a alors

$$f\left(\psi - \frac{f(\psi)}{f(\chi_2)} \chi_2\right) = f(\psi) - \frac{f(\psi)}{f(\chi_2)} f(\chi_2) = 0,$$

donc le vecteur $\psi - \frac{f(\psi)}{f(\chi_2)} \chi_2$ appartient à \mathcal{M} . Comme $\chi_2 \perp \mathcal{M}$, on aura

$$\langle \chi_2 | \psi - \frac{f(\psi)}{f(\chi_2)} \chi_2 \rangle = 0,$$

c.-à-d.

$$f(\psi_2) \langle \chi_2 | \psi \rangle = f(\psi) \|\chi_2\|^2,$$

donc

$$f(\psi) = \frac{f(\chi_2)}{\|\chi_2\|^2} \langle \chi_2 | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

En posant $\varphi = \frac{f(\chi_2)}{\|\chi_2\|^2} \chi_2$ (ce qui est bien un vecteur de \mathcal{H} , puisque $\|\chi_2\| \neq 0$), on obtient (8.15).

(c) Montrons encore que φ est unique. Si φ_1, φ_2 sont deux vecteurs tels que

$$f(\psi) = \langle \varphi_1 | \psi \rangle = \langle \varphi_2 | \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{H},$$

alors

$$\langle \varphi_1 - \varphi_2 | \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

En particulier, pour $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$: $\|\varphi_1 - \varphi_2\|^2$.

D'après l'axiome III, on doit avoir $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{0}$, c.-à-d. $\varphi_1 = \varphi_2 + \mathbf{0} = \varphi_2$.

8.8.3 Démonstration du fait que le spectre d'un opérateur autoadjoint est réel

On a (utiliser (8.1))

$$|\langle \varphi_n | (\mathcal{A} - z)\varphi_n \rangle| \leq \|\varphi_n\| \|(\mathcal{A} - z)\varphi_n\| = \|(\mathcal{A} - z)\varphi_n\| \rightarrow 0,$$

et de même

$$\langle (\mathcal{A} - z)\varphi_n | \varphi_n \rangle \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \langle \phi_n | (\mathcal{A} - z) \varphi_n \rangle - \langle (\mathcal{A} - z) \varphi_n | \varphi_n \rangle \} = 0 . \quad (8.29)$$

Or, comme $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$:

$$\langle \phi_n | (\mathcal{A} - z) \varphi_n \rangle = \langle (\mathcal{A}^* - \bar{z}) \varphi_n | \varphi_n \rangle = \langle (\mathcal{A} - \bar{z}) \varphi_n | \varphi_n \rangle .$$

En insérant cette identité dans (8.29) et en désignant par μ la partie imaginaire du nombre complexe z , on voit que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (z - \bar{z}) \varphi_n | \varphi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle 2i\mu \varphi_n | \varphi_n \rangle = -2i\mu \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|^2 = -2i\mu ,$$

d'où $\mu = 0$.