

# Théorie des groupes pour physicien(ne)s

Cours pour la 3ème et 4ème année

**Ruth Durrer**

Département de Physique Théorique de l'Université de Genève  
Quai E. Ansermet 24, 1211 Genève 4, Suisse

première version 2010



**UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Définitions élémentaires . . . . .	4
1.2	Exemples . . . . .	7
1.3	L'algèbre des fonctions sur un groupe . . . . .	8
1.4	Groupes de Lie . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Groupes topologiques et la mesure de Haar</b>	<b>14</b>
2.1	Topologie . . . . .	14
2.2	Groupes topologiques . . . . .	22
2.3	L'intégration de Haar . . . . .	25
2.4	Autres propriétés importantes des groupes topologiques . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Représentations</b>	<b>38</b>
3.1	Définitions et faits élémentaires . . . . .	38
3.2	Théorie des représentations de groupes compacts . . . . .	42
3.3	Certains résultats supplémentaires pour groupes finis . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Application sur <math>SO(3)</math> et <math>SU(2)</math></b>	<b>54</b>
4.1	La mesure de Haar sur $SU(2)$ . . . . .	54
4.2	Représentation des rotations sur les fonctions (particules sans spin) . . . . .	56
4.3	Les représentations irréductibles du groupe des rotations . . . . .	59
4.3.1	Les harmoniques sphériques . . . . .	61
4.4	Série de Clebsch-Gordan et le caractère d'une représentation . . . . .	66
4.4.1	Preuve intuitive du théorème de Clebsch-Gordan . . . . .	66
4.4.2	Le caractère de $SU(2)$ . . . . .	68
4.4.3	Décomposition en représentations irréductibles et ad- dition de moments cinétiques . . . . .	70

<b>5</b>	<b>Les représentations irréductibles de <math>\text{Gl}(n, \mathbb{C})</math> et le groupe symétrique <math>\mathcal{S}_n</math></b>	<b>72</b>
5.1	Introduction . . . . .	72
5.2	Les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{S}_\ell$ et les tableaux de Young . . . . .	74
5.3	Centralisateurs de représentations d'algèbres symétriques . . .	83
5.4	Les représentations tensorielles de $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ et quelques sous-groupes . . . . .	93
5.5	Application physique : les termes $(L, S)$ d'un atome . . . . .	98
5.6	La décomposition d'une représentation tensorielle de $\text{SU}(2\ell + 1)$ en représentations irréductibles de $\text{SO}(3)$ . . . . .	102
5.7	Appendices . . . . .	106
5.7.1	Les caractères irréductibles pour $\text{U}(n)$ et $\mathcal{S}_f$ . . . . .	106
5.7.2	Formule pour la dimension . . . . .	110
5.7.3	La représentation associée . . . . .	111
5.7.4	Réduction du produit tensoriel de deux représentations de $\text{SU}(n)$ . . . . .	114
5.7.5	Partitions . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Symétries en mécanique quantique</b>	<b>118</b>
6.1	Le groupe $\text{SU}(2)$ comme recouvrement universel de $\text{SO}(3)$ . .	122
6.2	Démonstration du théorème 6.2 . . . . .	127

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Définitions élémentaires

#### Définition 1.1 Groupe

Soit  $G$  un ensemble et

$$\cdot : G \times G \rightarrow G : (a, b) \rightarrow a \cdot b$$

une application (une telle application, de  $G \times G$  dans  $G$ , est appelée une "opération" sur  $G$ ).

- telle que pour  $a, b, c \in G$  nous avons (**associativité**)

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

- en plus, il existe un élément  $e \in G$  tel que

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \forall a \in G;$$

$e$  est appelé **l'élément neutre** du groupe  $G$ .

- pour tout  $a \in G$  il existe un élément  $b \in G$  tel que

$$a \cdot b = e = b \cdot a.$$

Nous appelons  $b$  "**l'inverse** de  $a$ " et le dénommons  $b = a^{-1}$ .

Souvent nous supprimons le signe  $\cdot$  et nous écrivons simplement  $a \cdot b \equiv ab$

**Exercice 1.1** Montrer que l'inverse est unique.

Montrer que pour tout  $a, b \in G$ ,  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

Soient  $h, g \in G$ . La relation " $h \sim g$  s'il existe un  $a \in G$  tel que  $h = a^{-1}ga$ " est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un élément  $h$ ,  $[h]$ , s'appelle la classe de **conjugaison** de  $h$  :

$$[h] = \{a^{-1}ha \mid a \in G\}$$

**Définition 1.2 Sous-groupe**

Un sous-ensemble  $H \subset G$  avec  $e \in H$  et tel que pour tout  $a, b \in H$  nous avons  $a \cdot b \in H$  et  $a^{-1} \in H$ , est appelé un **sous-groupe**.

**Définition 1.3 Ordre**

Si un groupe  $G$  est fini, le nombre de ses éléments est appelé **l'ordre** du groupe,  $n_G$ .

**Exercice 1.2** L'ordre de tout sous-groupe  $H \subset G$  est diviseur de  $n_G$ , c'est-à-dire  $n_G/n_H \in \mathbb{N}$ .

*Indication : montrer que tous les ensembles  $Hg \subset G$  pour  $g \in G$  sont soit identiques, soit disjoints.*

Le quotient  $j := \frac{n_G}{n_H}$  s'appelle **l'index** de  $H$  par rapport à  $G$ .

**Définition 1.4 Groupe abélien (commutatif)**

Un groupe  $G$  avec  $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$  est appelé un **groupe abélien** ou **commutatif**.

**Exercice 1.3** Pour un  $a \in G$ , tout élément de  $G$  est de la forme  $a^n$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $G$  est fini et abélien. Dans ce cas  $G$  est appelé le **groupe cyclique** d'ordre  $n_G$ . (Ici  $n_G$  est l'ordre de  $G$ )

**Définition 1.5 Isomorphisme, homomorphisme**

Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes et  $\phi : G \rightarrow G'$  une application avec  $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ .

- Une telle application est appelée un **homomorphisme**.
- Si  $\phi$  est aussi bijective elle est appelée un **isomorphisme**.
- Si  $G \equiv G'$  les homomorphismes sont parfois appelés **endomorphismes** et les isomorphismes sont appelés **automorphismes**.
- Deux groupes  $G$  et  $G'$  qui admettent un isomorphisme  $\phi : G \rightarrow G'$  sont appelés **isomorphes**.

**Exercice 1.4**  $\text{im}(\phi) \subset G'$  est un sous-groupe de  $G'$  et  $\ker(\phi) \subset G$  est un sous-groupe de  $G$  pour tout homomorphisme  $\phi : G \rightarrow G'$ .

**Définition 1.6 Centre**

Le sous-groupe  $Z \subset G$  défini par

$$Z = \{c \in G \mid ca = ac \quad \forall a \in G\}$$

est le **centre** du groupe  $G$ .

Le centre est un sous-groupe abélien de  $G$ .

**Définition 1.7 Sous-groupe normal**

Un sous-groupe  $N \subset G$  de  $G$  avec  $aba^{-1} \in N \quad \forall b \in N, \quad a \in G$  est appelé un sous-groupe (ou diviseur) **normal** de  $G$ .

**Exercice 1.5** Soient  $N, H \subset G$  deux sous-groupes normaux avec  $N \cap H = \{e\}$ . Alors  $n \cdot h = h \cdot n \quad \forall n \in N, h \in H$ .

**Proposition 1.1** Soit  $N$  un sous-groupe normal de  $G$ . Pour  $g_1, g_2 \in G$  nous appelons  $g_1 \sim g_2$ , s'il existe un élément  $n \in N$  tel que  $g_2 = g_1 n$ .

1. La relation  $g_1 \sim g_2$  est une relation d'équivalence.
2. L'ensemble de toutes les classes d'équivalence satisfait l'opération  $[g] \cdot [h] = [gh]$  et forme un groupe. Ce groupe est appelé "le quotient de  $G$  et  $N$ " et il est dénommé par  $\frac{G}{N}$ .
3. Si  $G$  est un groupe fini alors  $n_{\frac{G}{N}} = \frac{n_G}{n_N}$ .

**Preuve 1** 1. est clair. Pour 2. il faut montrer que cette opération est bien définie, indépendamment du représentant. Mais soit pour  $m, n, \in N$

$$g_1 = gm, \text{ donc } [g_1] = [g], \quad g_1, g \in G$$

$$h_1 = hn, \text{ donc } [h_1] = [h], \quad h_1, h \in G$$

$$\text{alors } g_1 h_1 = g n h m = g h \underbrace{h^{-1} n h}_{\in N} m = g h \cdot q \text{ pour un } q \in N, \text{ donc}$$

$$[g_1 h_1] = [gh].$$

Le reste de 2. est évident.

Pour 3. il faut se rappeler que deux classes d'équivalence  $[g], [h], g, h \in G$  sont soit identiques, soit disjointes. Nous avons alors

$$G = [g_1] \cup \dots \cup [g_n] \cup [g_0 \equiv e]$$

où  $[g_1], \dots, [g_n], [e]$  représentent tous les éléments de  $\frac{G}{N}$  interprétés comme sous-ensembles de  $G$ .

Il faut encore montrer que tous les  $[g_i]$  contiennent  $n_N$  éléments. Ceci est évident pour  $[e] \equiv N$ . Mais pour  $g_i \neq e$ , l'application  $n \rightarrow g_i n$  est une bijection de  $N$  dans  $[g_i]$  alors les deux ensembles ont le même nombre d'éléments.

□

### Définition 1.8 Groupes simples

Un groupe est appelé **simple** s'il ne contient pas de sous-groupes normaux non-triviaux, i.e.  $N \neq G$  et  $N \neq \{e\}$ .

## 1.2 Exemples

Des exemples de groupes infinis bien connus sont

$$(\mathbb{Z}, +) ; (\mathbb{R}, +) ; (\mathbb{C}, +) ; (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \bullet) ; (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \bullet) ; (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \bullet)$$

$$Gl(n, \mathbb{R}) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det M \neq 0\} \quad Gl(n, \mathbb{C}) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det M \neq 0\}$$

$$Sl(n, \mathbb{R}) := \{S \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det S = 1\} \quad Sl(n, \mathbb{C}) := \{S \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det S = 1\}$$

$$O(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M \cdot M^T = \mathbf{1}\} \quad U(n) := \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M \cdot \underbrace{M^*}_{M^T} = \mathbf{1}\}$$

$$SO(n) := O(n) \cap Sl(n, \mathbb{R}) \quad SU(n) := U(n) \cap Sl(n, \mathbb{C})$$

Le groupe de Lorentz est défini comme suit : soit  $g \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matrice  $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , alors

$$L = \{\Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid \Lambda^T g \Lambda = g\} .$$

**Exercice 1.6** Les groupes de matrices susmentionnés forment des "variétés différentiables" dans le sens où on peut les décrire localement avec un nombre  $d < \infty$  de paramètres réels. Déterminer  $d$  pour chaque exemple.

Les isomorphismes (applications linéaires, bijectives) d'un espace vectoriel  $V \rightarrow V$  forment un groupe. Le groupe des transformations linéaires de  $V$ . Si  $V$  est un espace linéaire complexe (réel) de dimension  $n$ , ce groupe est isomorphe à  $Gl(n, \mathbb{C})$  (respectivement  $Gl(n, \mathbb{R})$ ) à travers un choix de base.

#### Exemples de groupes finis

- $\{\mathbb{I}, P\}$ ,  $P = \text{parité}$
- $(\mathbb{N}_n, +_n) = \text{le groupe des éléments } \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$   
avec  $p +_n q := (p + q, \text{mod } n)$ .

- Le groupe de Klein  $\{1, i, j, k\}$  avec

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1, \quad ij = ji = k, \quad jk = kj = i, \quad ik = ki = j.$$

- Le groupe  $\mathcal{S}_N$  des permutations de  $N$  éléments.

**Exercice 1.7 .**

- Montrer que l'ordre de  $\mathcal{S}_N$  est  $N!$ .
- Tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe d'un certain  $\mathcal{S}_N$ .
- Montrer que  $(\mathbb{N}_q, q)$  le groupe des éléments  $\{1, 2, \dots, q-1\}$  pour un nombre premier  $q$  avec  $m_q n := (m \cdot n, \text{mod } q)$  forme un groupe. Pourquoi faut-il que  $q$  soit un nombre premier ?
- Tout groupe fini est défini par son tableau de multiplication. Donner le tableau de multiplication pour  $(\mathbb{N}_5, 5)$ .
- Montrer que tout groupe de deux éléments est isomorphe.
- Construisez un groupe de trois éléments. Connaissez-vous une réalisation simple de ce groupe ? Peut-on construire d'autres groupes de trois éléments ?

### 1.3 L'algèbre des fonctions sur un groupe

**Définition 1.9 Algèbre de fonctions**

Soit  $G$  un groupe. Son algèbre<sup>1</sup> de fonctions est donnée par  $\mathcal{F}(G) = \{f \mid f : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto f(g)\}$ . Si  $f(g) = f(h^{-1}gh) \quad \forall h, g \in G$   $f$  est appelé une "fonction sur les classes" (de conjugaison).

Sur les groupes finis il est facile de définir une "intégration" : Pour  $f \in \mathcal{F}(G)$  nous posons

$$I(f) = \frac{1}{n_G} \sum_{g_i \in G} f(g_i).$$

**Proposition 1.2** Pour  $f \in \mathcal{F}(G)$  nous définissons  $f_g \in \mathcal{F}(G)$  par

$$f_g(h) := f(h \cdot g) \quad \text{et, de même,} \quad {}_g f(h) := f(g \cdot h).$$

Soit  $G$  un groupe fini. Alors

$$I(f) = I(f_g) = I({}_g f) = I(f_{inv}), \quad f_{inv}(h) = f(h^{-1}).$$

---

<sup>1</sup>Une algèbre  $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel muni d'un produit tel que pour tout  $a, b \in \mathcal{A}$ ,  $ab \in \mathcal{A}$ , tel que  $a(b+c) = ab+ac$  et  $a(\lambda c) = (\lambda a)c = \lambda(ac)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  (ou  $\mathbb{R}$ ), si en plus  $(ab)c = a(bc) \forall a, b, c \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  est une algèbre associative.



**Preuve 2** *Nous démontrons seulement*

$$I(f_g) = \frac{1}{n_G} \sum_{g_i \in G} f(g_i \cdot g) = I(f) = \frac{1}{n_G} \sum_{g_i \in G} f(g_i).$$

*Les démonstrations des autres identités sont pareilles. Posons  $h_i = g_i g$  pour  $g \in G$  fixe. Avec  $g_i$ , aussi  $h_i$  atteint tous les éléments du groupe une et seulement une fois. Alors*

$$I(f_g) = \frac{1}{n_G} \sum_{h_i \in G} f(h_i) = I(f).$$

□

Donc l'intégration ici définie pour les groupes finis est invariante sous "translation". Une telle mesure d'intégration peut aussi être définie pour certains groupes infinis. Par exemple pour le groupe  $(\mathbb{R}^n, +)$  la mesure de Lebesgue est invariante sous translation. Une telle mesure invariante existe pour tous les "groupes topologiques localement compacts". Cette mesure joue un rôle très important pour la classification des représentations de groupes comme nous le verrons au chapitre III.

## 1.4 Groupes de Lie

Nous allons d'abord donner la définition correcte d'un groupe de Lie. Ensuite nous définissons une grande classe de groupes de Lie qui nous suffira pour la suite de ce cours. Nous utilisons cet échappatoire pour ne pas devoir nous familiariser avec la notion de variété différentielle, ce qui nous prendrait trop de temps par rapport à son utilité dans ce contexte.

### Définition 1.10 Groupe de Lie

*Un groupe  $G$  qui est une variété différentiable, tel que la multiplication est une application différentiable, s'appelle un **groupe de Lie**. Son espace tangent à  $e$ ,  $T_e G$ , avec le commutateur  $[\cdot, \cdot]$  est son algèbre de Lie dénommée,  $\mathcal{G}$ .*

### Définition 1.11 Surfaces polynomiales

*Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  qui est défini par un nombre  $m \leq n$  d'équations polynomiales est une surface polynomiale dans  $\mathbb{R}^n$ .*

**Proposition 1.3** *Toute surface polynomiale dans  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable.*

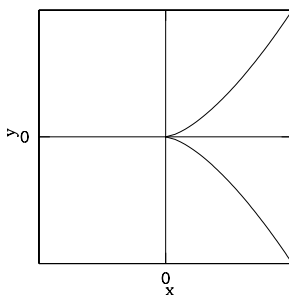
Sans preuve.

**Proposition 1.4** Soit  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  une surface polynomiale décrite par  $m \leq n$  équations polynomiales,  $P_i(\mathbf{x}) = 0$  telles que le rang de  $(\partial_j P_i(\mathbf{x}))$  est maximal  $\forall \mathbf{x}$  avec  $P_i(\mathbf{x}) = 0$ . Dans ce cas  $\mathcal{M}$  peut être décrite localement par  $d = n - m$  paramètres. On appelle  $d$  la dimension de  $\mathcal{M}$ .

**Preuve 3** Ceci est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites de l'analyse.  $\square$

**Exemples :**

- La courbe  $P(x, y) = y^2 - x^3 = 0$  dans  $\mathbb{R}^2$  est une surface polynomiale qui ne satisfait pas les conditions de cette proposition. A  $(x, y) = 0$  nous avons  $P = 0$  mais aussi  $\partial_x P = \partial_y P = 0$ .



- La sphère  $\mathbb{S}^n$  définie par  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$  est une surface polynomiale de dimension  $n - 1$  qui satisfait les conditions de la proposition.
- $SO(2) \equiv \mathbb{S}^1$  aussi.
- Tous les groupes (non discrets) donnés comme exemples dans la section 1.2 sont des surfaces polynomiales qui satisfont les conditions de la proposition.

**Définition 1.12 Surfaces polynomiales régulières** Une surface polynomiale dans  $\mathbb{R}^n$  donnée par  $P_i(\mathbf{x}) = 0$  pour certains polynômes  $P_i$  tels que le rang de  $\partial_j P_i(\mathbf{x})$  est maximal  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  avec  $P_i(\mathbf{x}) = 0$  est appelée une **surface polynomiale régulière**.

Nous ne considérons que des groupes de Lie qui forment des surfaces polynomiales régulières. Les éléments d'une telle surface peuvent être décrits localement par  $d$  paramètres (coordonnées). Ils sont alors localement difféomorphes à un ouvert dans  $\mathbb{R}^d$ . Nous pouvons alors traduire la notion de différenciation de  $\mathbb{R}^d$  dans notre surface polynomiale.

Par la suite nous appellerons "groupe de Lie matriciel" tout groupe de **matrices** qui est décrit par une surface polynomiale régulière dans un ouvert de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Dans un voisinage de  $\mathbb{I} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  toute matrice peut être décrite de la forme

$$S = e^M \quad \text{où} \quad e^M := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}.$$

### Définition 1.13 Algèbre de Lie

L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie matriciel  $G \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  est donnée par toutes les matrices  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  telles que  $e^{tM} \in G, \forall t \in \mathbb{R}$ . Nous la dénotons  $\mathcal{G}$ .

### Proposition 1.5

1. Si le groupe  $G \subset Gl(n, \mathbb{C})$  est défini par  $m$  équations polynomiales,  $\mathcal{G}$  est un espace linéaire de dimension (réelle)  $d = 2n^2 - m$ .
2. Pour  $M, N \in \mathcal{G}$  aussi  $e^{tM} N e^{-tM} \in \mathcal{G} \forall t$ .
3. Pour  $M, N \in \mathcal{G}$  aussi  $[M, N] \equiv MN - NM \in \mathcal{G}$

**Preuve 4** 1. Soit  $G$  décrit par  $m$  équations polynomiales  $P_i(x) = 0 \forall x \in G \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ . Pour  $M \in \mathcal{G}$  nous avons donc  $P_i(e^{tM}) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ . Dérivée cette équation à  $t = 0$  donne  $\frac{\partial P_i}{\partial x_{ab}}(e) \cdot M_{ab} = 0$ .

Ceci donne  $m$  équations linéaires pour  $M$ . Comme le rang de  $\frac{\partial P_i}{\partial x_{ab}}$  est maximal ( $= m$ ), les matrices  $M$  qui satisfont à ces  $m$  équations forment un espace linéaire de dimension réelle  $d = 2n^2 - m$ .

Avant de démontrer les parties 2. et 3. nous allons prouver ce lemme.

**Lemme 1.1** Une matrice  $M$  est un élément de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  du groupe de Lie  $G$  si et seulement si il existe un groupe à un paramètre<sup>2</sup>  $S(t)$  dans  $G$  avec  $\frac{dS}{dt} \Big|_{t=0} = M$ .

**Preuve 5** " $\Rightarrow$ " Clair, prendre un groupe à un paramètre  $e^{tM}$ .

" $\Leftarrow$ " Soit  $S(t)$  un groupe à un paramètre avec  $\frac{dS}{dt} \Big|_{t=0} = M$ .

$$\frac{dS}{dt}(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{S(t_1+h)}^{S(t_1)S(h)} - S(t_1)}{h} = S(t_1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - S(0)}{h} = S(t_1) \cdot M$$

Alors  $S(t)$  satisfait l'éq. diff.  $\dot{S} = SM$  qui a comme unique solution avec  $S(0) = e$  le groupe à un paramètre  $S(t) = e^{tM}$  donc  $M \in \mathcal{G}$ .  $\square$

---

<sup>2</sup>Un groupe à un paramètre est un groupe  $G$  qui est isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$ . C'est-à-dire il existe une application  $\mathbb{R} \rightarrow G : t \mapsto S(t)$  avec  $S(t_1)S(t_2) = S(t_1 + t_2)$  et  $S(0) = e$ .

Revenons alors à la preuve de 2. et 3. de la proposition.

2. Soit  $S = e^{tM}$  et  $A(s) = e^{sN}$ . Alors, pour un  $t$  fixé  $SA(s)S^{-1}$  est un groupe à un paramètre avec

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (SA(s)S^{-1}) = SNS^{-1} = e^{tM} N e^{-tM} \in \mathcal{G}.$$

3. Nous allons utiliser 2. et la formule de Baker-Hausdorff. Comme  $\mathcal{G}$  est un espace linéaire, pour toute courbe différentiable  $M(t)$  dans  $\mathcal{G}$  on a aussi  $\frac{d}{dt}M(t) \in \mathcal{G}$ .

Nous appliquons ceci à la courbe  $e^{tM} N e^{-tM}$  quand  $t = 0$ . D'après Baker-Hausdorff

$$e^{tM} N e^{-tM} = N + t[M, N] + \frac{1}{2}t^2[M, [M, N]] + \mathcal{O}(t^3).$$

$$\text{Donc } \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{tM} N e^{-tM}) = [M, N] \in \mathcal{G}.$$

□

### Définition 1.14 Groupe de Lie simple :

Un groupe de Lie est appelé **simple** s'il ne contient pas de sous-groupes normaux non-triviaux **connexes**.

Notez que ceci est différent de la notion 'simple' pour un groupe abstrait. Par exemple le groupe  $SU(2)$  qui contient le sous-groupe normal  $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$  n'est pas simple comme groupe abstrait mais, comme  $\{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$  n'est pas connexe, il est un groupe de Lie simple.

La classification de tous les groupes de Lie simple a été un programme important dans la théorie des groupes de Lie au début du siècle passé.

### Exercice 1.8

- Démontrer la formule de Baker-Hausdorff.
- Déterminer les algèbres de Lie pour toutes les groupes de matrices donnés à la page 6.

**Réponses :**

$$G = Gl(n, \mathbb{R}) \quad , \quad \mathcal{G} = \mathbb{R}^{n \times n} = gl(n, \mathbb{R}) \quad (1.1)$$

$$G = Gl(n, \mathbb{C}) \quad , \quad \mathcal{G} = \mathbb{C}^{n \times n} = gl(n, \mathbb{C}) \quad (1.2)$$

$$G = Sl(n, \mathbb{R}) \quad , \quad \mathcal{G} = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{tr}(M) = 0\} = sl(n, \mathbb{R}) \quad (1.3)$$

$$G = Sl(n, \mathbb{C}) \quad , \quad \mathcal{G} = \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \text{tr}(M) = 0\} = sl(n, \mathbb{C}) \quad (1.4)$$

$$G = O(n) \quad , \quad \mathcal{G} = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M + M^T = 0\} = o(n) \quad (1.5)$$

$$G = SO(n) \quad , \quad \mathcal{G} = so(n) = o(n) \cap sl(n, \mathbb{R}) \quad (1.6)$$

$$G = U(n) \quad , \quad \mathcal{G} = \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid M + M^* = 0\} = u(n) \quad (1.7)$$

$$G = SU(n) \quad , \quad \mathcal{G} = u(n) \cap sl(\mathbb{C}) = su(n) \quad (1.8)$$

$$G = L \quad , \quad \mathcal{G} = \{M \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid M^T g + gM = 0\} = \ell. \quad (1.9)$$

# Chapitre 2

## Groupes topologiques et la mesure de Haar

### 2.1 Topologie

#### Définition 2.1 Topologies et espaces topologiques

Soit  $X$  un ensemble et  $\mathcal{X} \subset P(X)$  ( $P(X)$  = l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $X$ ).

Si les trois conditions suivantes sont satisfaites

1.  $\{\} \equiv \emptyset \in \mathcal{X}$  et  $X \in \mathcal{X}$ .
2. Pour  $A, B \in \mathcal{X}$  on a aussi  $A \cap B \in \mathcal{X}$ .
- 3.

$$\text{Pour } \mathcal{W} \subset \mathcal{X} \text{ , } \left( \bigcup_{A \in \mathcal{W}} A \right) \in \mathcal{X},$$

alors  $\mathcal{X}$  est appelé une **topologie** sur  $X$  et  $(X, \mathcal{X})$  s'appelle un **espace topologique**.

Si  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  sont deux topologies sur  $X$  et  $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2$ , la topologie  $\mathcal{X}_2$  est appelée **plus fine** que  $\mathcal{X}_1$ .

#### Définition 2.2 Ensembles ouverts et fermés

Un élément  $A \in \mathcal{X}$  est appelé un sous-ensemble **ouvert** de  $X$ . Un ensemble de la forme  $B = X \setminus A$  pour un  $A \in \mathcal{X}$  s'appelle un ensemble **fermé**. Un sous-ensemble ouvert de  $X$  est souvent appelé simplement "un ouvert".

#### Définition 2.3 Bases

Un sous-ensemble  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  s'appelle une **base** de la topologie  $\mathcal{X}$  si tout élément  $A \in \mathcal{X}$  peut être représenté de la forme  $A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$  pour un sous-ensemble  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ .

#### Définition 2.4 Application continue

Soient  $(X, \mathcal{X})$  et  $(Y, \mathcal{Y})$  des espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application. L'application  $f$  est appelé **continu** si pour tout ouvert  $A \subset Y$  (c'est-à-dire  $A \in \mathcal{Y}$ )  $f^{-1}(A)$  est un ouvert dans  $X$  (c'est-à-dire  $f^{-1}(A) \in \mathcal{X}$ ).

#### Définition 2.5 Voisinage

Soit  $(X, \mathcal{X})$  un espace topologique et  $x \in X$ .  $U \subset X$  est appelé un **voisinage** de  $x$  s'il existe un ouvert  $\sigma$  qui contient  $x$  et qui est un sous-ensemble de  $U$ .

#### Définition 2.6 Application continue (suite)

Une application  $f : X \rightarrow Y$  (espaces topologiques) est appelée continue en  $x \in X$  si pour tout voisinage  $V$  de  $f(x)$  il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $f(U) \subset V$ .

**Corollaire 2.1** Une application est continue si et seulement si elle est continue en tout point  $x \in X$ .

**Lemme 2.1** Un sous-ensemble  $A \subset X$  est ouvert si et seulement si pour tout  $x \in A$ ,  $A$  contient aussi un voisinage  $V_x$  de  $x$ ,  $V_x \subset A$ ,  $x \in V_x$ .

#### Preuve 6

##### Preuve du lemme

- " $\Rightarrow$ " Soit  $A$  ouvert alors  $A$  est un voisinage de tout point  $x \in A$ .
- " $\Leftarrow$ " Soit  $V_x$  le voisinage de  $x$  contenu dans  $A$ . Soit  $I_x \subset V_x$  un ouvert qui contient  $x$ ,  $x \in I_x$ .

Alors on a  $A = \bigcup_{x \in A} I_x$ , ce qui est une union d'ouverts. Donc  $A$  est un ouvert.

##### Preuve du corollaire :

- " $\Rightarrow$ " Soit  $f$  continue et  $x \in X$ , et soit  $V$  un voisinage de  $f(x)$ . Nous posons  $U = f^{-1}(V)$ .  $V$  contient un ouvert  $I$  avec  $f(x) \in I$ . Alors  $f^{-1}(I)$  est un ouvert dans  $U$  qui contient  $x$ , donc  $U$  est un voisinage de  $x$ .

- " $\Leftarrow$ " Soit  $f$  continue en tout  $x \in X$  et  $A \subset Y$  un ouvert. Nous voulons montrer que  $f^{-1}(A) \subset X$  est aussi un ouvert. Soit  $x \in f^{-1}(A)$ . Alors  $f(x) \in A$  et il existe un voisinage  $V$  de  $f(x)$  avec  $V \subset A$ . Comme  $f$  est continue en  $x$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  avec  $f(U) \subset V \subset A$ . Donc  $U \subset f^{-1}(A)$ . Alors pour tout  $x \in f^{-1}(A)$  il existe un voisinage  $U$  de  $x$  qui est aussi contenu en  $f^{-1}(A)$ , c'est-à-dire  $f^{-1}(A)$  est ouvert.  $\square$

### Définition 2.7 Convergence d'une suite

Soit  $(X, \mathcal{X})$  un espace topologique et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $X$ . La suite est dite **convergente** vers le point  $x \in X$  si pour tout voisinage  $V$  de  $x$  il existe un nombre  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in V \forall n \geq N$ .

La notion de convergence dépend également de la topologie. Par exemple par rapport à la topologie  $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$  toute suite converge vers tout point  $x \in X$ . Par contre, par rapport à la topologie  $\mathcal{X} = P(X)$ , seules les suites qui sont constantes à partir d'un certain  $N \in \mathbb{N}$  convergent.

**Exemple :**

$$X \equiv \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} \equiv \mathcal{X} = \left\{ \sigma \subset \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } x \in \sigma \text{ il existe un} \\ \text{intervalle ouvert } I \text{ avec } x \in I \subset \sigma \end{array} \right. \right\}$$

Ceci est une topologie sur  $\mathbb{R}$ . C'est la topologie dite "naturelle".

Les notions de continuité et de convergence usuelles sur  $\mathbb{R}$  correspondent à nos définitions si nous utilisons cette topologie. (*exercice!*)

Pour aller plus loin, nous aimerions une notion de séparation. Les ensembles ouverts doivent séparer les points d'une façon ou d'une autre. Il existe au moins cinq différents axiomes de séparation qui sont tous inéquivalentes mais tous satisfaits par  $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ . Nous utilisons un des axiomes qui est moyennement fort :

### Définition 2.8 Espaces de Hausdorff

Un espace topologique  $(X, \mathcal{X})$  satisfait l'axiome de séparation de Hausdorff si tous les points  $x \neq y \in X$  ont des voisinages disjoints. Un espace topologique qui satisfait cet axiome est appelé un "**espace de Hausdorff**".

Par la suite nous ne considérerons que des espaces de Hausdorff.

**Corollaire 2.2** Dans un espace de Hausdorff toute suite convergente ne converge que vers un seul point.



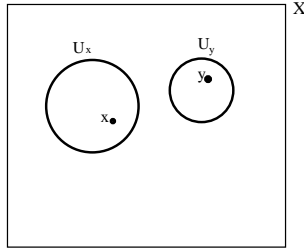


FIG. 2.1 – Séparation de deux points dans un espace topologique de Hausdorff.

**Preuve 7** *Faisons une preuve par l'absurde : soit  $x \neq y$  et la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers  $x$  et vers  $y$ . Soient  $V_x$  et  $V_y$  des voisinages disjoints des points  $x$  et  $y$ . D'après la définition de la convergence il existe des nombres  $N_x, N_y \in \mathbb{N}$  avec  $x_n \in V_x \cap V_y \quad \forall n \geq \max\{N_x, N_y\}$ , mais ceci contredit  $V_x \cap V_y = \emptyset$ .  $\square$*

### Définition 2.9 Espace compact

*Un espace topologique est appelé **compact** s'il est de Hausdorff et si tout recouvrement ouvert contient un recouvrement fini.*

*Un recouvrement ouvert de  $X$  est un sous-ensemble  $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$  tel que  $\bigcup_{A \in \mathcal{W}} A = X$ . Il est appelé "fini" s'il contient un nombre fini d'éléments.*

### Proposition 2.1 Sous espace

*Soit  $(X, \mathcal{X})$  un espace topologique et  $Y \subset X$ . Alors  $\mathcal{Y} = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{X}\}$  génèrent une topologie sur  $Y$  (la topologie induite).*

**Preuve :** *Exercice*

**Proposition 2.2** *Soit  $(X, \mathcal{X})$  un espace topologique de Hausdorff. Si  $Y \subset X$  est compact,  $Y$  est fermé.*

**Preuve 8** *Nous montrons que  $X \setminus Y$  est ouvert, c'est-à-dire que pour  $x \in X \setminus Y$  il existe un voisinage  $V$  de  $x$  qui est dans  $X \setminus Y$ .*

*Pour ceci nous considérons  $y \in Y$ , alors  $x \neq y$  et il existe des voisinages  $U_y$  et  $U'_y$  de  $y$  et  $x$  qui sont disjoints,  $y \in U_y$ ,  $x \in U'_y$  et  $U_y \cap U'_y = \emptyset$ .  $U_y$  contient un ouvert  $I_y \subset U_y$  et alors  $I_y \cap U'_y = \emptyset$ . En faisant ceci avec tout  $y \in Y$  on génère un recouvrement de  $Y$ ,  $\{I_y \cap Y \mid y \in Y\}$ . Comme  $Y$  est compact, ce recouvrement contient un recouvrement fini, disons  $I_{y_1} \cap Y, I_{y_2} \cap Y, \dots, I_{y_n} \cap Y$ .  $Y \subset \bigcup_{i=1}^n I_{y_i}$ . Mais  $V := U'_{y_1} \cap U'_{y_2} \cap \dots \cap U'_{y_n}$  est un voisinage de  $x$  qui n'intersectionne aucun des  $I_{y_j}$ , et alors  $V \cap Y = \emptyset$  donc  $V \subset X \setminus Y$ .*

$\square$

**Théorème 2.1** *Tout intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  est compact (Heine-Borel).*

**Preuve :** *Exercice*

Indication : Soit  $\mathcal{R}$  un recouvrement ouvert de  $[a, b]$ . Définir

$$c := \sup\{x \in [a, b] \mid \text{tel que } [a, x] \text{ a un recouvrement fini, } \mathcal{R}_x \subset \mathcal{R}\}$$

Montrer que  $[a, c]$  a un recouvrement fini. Montrer que  $c = b$ .

**Définition 2.10 Point limite**

*Un point  $x \in A \subset X$  est appelé **point limite** de  $A$  s'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x$  tel que  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ .*

**Définition 2.11 Fermeture**

*Pour  $A \subset X$  la **fermeture**  $\bar{A} \subset X$  est le plus petit ensemble **fermé** qui contient  $A$*

*Si  $A$  est ouvert  $\bar{A} \setminus A =: \partial A$  est appelé le bord de  $A$ .*

**Exercice 2.1** *Montrer que*

$$\bar{A} = \bigcap_{B \in \mathcal{W}} B$$

*où  $\mathcal{W}$  est l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés de  $X$  qui contiennent  $A$ .*

**Proposition 2.3**  $\bar{A} = \{\text{tous les points limites de } A\}$ .

**Preuve :** *Exercice*

De cette proposition il suit que les ensembles fermés sont ceux qui contiennent tous leurs points limites.

**Théorème 2.2** *Une application  $f : X \rightarrow Y : x \rightarrow f(x)$  est continue si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $x \in X$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ .*

**Preuve 9**

- " $\Rightarrow$ " *Soit  $f$  continue et  $(x_n)$  converge vers  $x$ . Soit  $V \subset Y$  un ouvert qui contient  $f(x)$ . Alors  $f^{-1}(V)$  est un ouvert qui contient  $x$ . Il existe donc un  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in f^{-1}(V) \forall n \geq N$ , et alors  $f(x_n) \in V \forall n \geq N$ , c'est-à-dire  $f(x_n)$  converge vers  $f(x)$ .*

- " $\Leftarrow$ " Nous montrons que pour tout  $V \in Y$  ouvert,  $X \setminus f^{-1}(V)$  est fermé. Pour ceci nous démontrons que  $X \setminus f^{-1}(V)$  contient tous ces points limites et puis appliquons la prop. 2.3.  
Soit  $x$  un point limite de  $X \setminus f^{-1}(V)$ . Alors, il existe une suite  $(x_n)_n$ ,  $x_n \in X \setminus f^{-1}(V)$  qui converge vers  $x$ . Donc  $f(x_n)$  converge vers  $f(x)$ . Mais  $f(x_n) \in Y \setminus V$  qui est fermé, donc aussi  $f(x) \in Y \setminus V$  ce qui implique  $x \in X \setminus f^{-1}(V)$ .  $\square$

Les axiomes de séparation sont nécessaires pour qu'un espace contienne assez de sous-ensembles ouverts. Mais il peut aussi en contenir trop. Par exemple, la topologie  $P(X)$  satisfait tous les axiomes de séparation, mais elle n'est quand même pas très utile. Nous avons encore besoin d'un axiome de dénombrabilité.

### Définition 2.12 Dense, le deuxième axiome de dénombrabilité

- Un sous-ensemble  $Y \subset X$  est appelé **dense** si  $\bar{Y} = X$ . Ici  $\bar{Y}$ , la fermeture de  $Y$  ce qui est aussi le plus petit ensemble fermé qui contient  $Y$ .
- Un espace topologique satisfait le **deuxième axiome de dénombrabilité** s'il contient un sous-ensemble dense qui est dénombrable.

**Exemple :**  $\mathbb{R}^n$  avec la topologie "naturelle" satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité :  $\mathbb{Q}^n$  est dense et dénombrable.

### Définition 2.13 Espace produit

Soient  $(X, \mathcal{X})$  et  $(Y, \mathcal{Y})$  deux espaces topologiques. L'ensemble

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{X} \text{ et } B \in \mathcal{Y}\}$$

forme la base d'une topologie sur  $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ .  $X \times Y$  muni de cette topologie est appelé le **produit topologique** de  $X$  avec  $Y$ .

### Proposition 2.4

- $A \subset X$  est dense si et seulement si tout ouvert  $U \neq \emptyset$ ,  $U \subset X$  a une intersection non vide avec  $A$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$ .
- Un espace avec une **base dénombrable** possède un sous-ensemble dense dénombrable.

### Preuve 10

- " $\Rightarrow$ " Soit  $U$  un ouvert avec  $U \cap A = \emptyset$ . Alors  $A \subset X \setminus U$  et comme  $X \setminus U$  est fermé on a aussi  $\bar{A} \subset X \setminus U$ . Mais  $\bar{A} = X$ , donc  $U = \emptyset$ .  
" $\Leftarrow$ " Soit  $A$  tel que tout ouvert  $U \neq \emptyset$  a une intersection non-nulle avec  $A$ . Alors  $X \setminus \bar{A}$  qui est un ouvert ( $\bar{A}$  est fermé) et qui a une intersection vide avec  $A \subset \bar{A}$ , donc  $X \setminus \bar{A}$  est vide, c'est-à-dire  $\bar{A} = X$ .

- Soit  $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  une base dénombrable de  $X$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  nous choisissons  $x_i \in U_i$ . Nous posons  $N = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Comme tout ouvert est de la forme  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $I \subset \mathbb{N}$ , tout ouvert contient certains  $x_i$  et a alors une intersection non-vide avec  $N$ . C'est-à-dire  $N$  est dense.  $\square$

L'inversion du deuxième énoncé n'est en général pas vraie !

**Proposition 2.5** *Pour un espace topologique  $X$  les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *Toute suite en  $X$  possède une sous-suite convergente.*
2. *Tout recouvrement dénombrable contient un sous-recouvrement fini.*
3. *Tout système dénombrable  $\Sigma$  de sous-ensembles **fermés** de  $X$  qui est tel que  $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$  pour tout sous-ensemble  $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \Sigma$  fini possède une intersection non-vide.*

Il est facile à démontrer que dans un espace topologique compacte qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité, tout recouvrement ouvert contient un recouvrement dénombrable, et d'après cette proposition alors tout suite contient une sous-suite convergente.

### Preuve 11

1.  $\Rightarrow$  2. Soit  $U = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  un recouvrement de  $X$ . Soit  $V_1 = U_1$ . Soit  $V_2$  le premier des ensembles  $U_1, U_2, \dots$  qui n'est pas contenu dans  $V_1$ . Soit  $V_3$  le premier des ensembles qui n'est pas contenu dans  $V_1 \cup V_2$ , etc.

(a) Si après  $r$  pas  $\bigcup_{k=1}^r V_k = X$ , nous avons trouvé un recouvrement fini.

(b) Si (a) ne se présente pour aucun  $r \in \mathbb{N}$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  nous choisissons

$$x_k \in V_k \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} V_\ell \neq \emptyset.$$

Nous montrons que la suite  $x_k$  ne peut pas avoir de sous-suite convergente : avec  $(U_i)$ ,  $(V_k)$  est aussi un recouvrement de  $X$ . Supposons que  $x \in X$  soit la limite d'une sous-suite  $(x_{k_n})$ . Mais  $\exists k_0$  avec  $x \in V_{k_0}$ . Mais seulement le nombre fini  $x_i$  avec  $i \leq k_0$  peut se trouver dans  $V_{k_0}$  ce qui est en contradiction avec la notion de limite ! Alors la situation (b) n'est pas possible.

2.  $\Rightarrow$  3. Soit  $\Sigma \subset P(X)$  un système dénombrable de sous-ensembles fermés tel que  $\bigcap_{i=1}^N A_i \neq \emptyset$  pour tout nombre fini d'éléments de  $\Sigma$ . Nous supposons  $\bigcap_{A \in \Sigma} A = \emptyset$ .

Dans ce cas,  $\{X \setminus A \mid A \in \Sigma\}$  est un recouvrement dénombrable de  $X$ . Il contient alors un recouvrement fini, disons  $\{X \setminus A_i \mid A_i \in \Sigma, i = 1, \dots, N\}$ . Ceci implique que  $\bigcap_{i=1}^N A_i = \emptyset$  ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

3.  $\Rightarrow$  1. Soit  $(x_n)$  une suite. Nous posons  $A_n = \{x_k \mid k > n\}$ .  $\Sigma = \{\bar{A}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est un système de sous-ensembles fermés tels que  $\bigcap_{k=1}^N \bar{A}_{n_k} \neq \emptyset \quad \forall N \in \mathbb{N}, n_k \in \mathbb{N}$ . Nous montrons que tout élément  $x \in \bigcap_n \bar{A}_n$  est la limite d'une sous-suite  $(x_{n_k})$ . Pour  $x \in \bigcap_n \bar{A}_n$  et  $U$  un voisinage de  $x$ ,  $U \cap A_n \neq \emptyset \quad \forall n$ . Donc pour tout  $n$  il existe  $k_n > n$  et  $k_n > k_{n-1}$  tel que  $x_{k_n} \in U$ . Alors la sous-suite  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .  $\square$

**Proposition 2.6** Dans le produit  $X \times X$  la diagonale  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$  est fermée.

**Preuve 12** Nous montrons que  $(X \times X) \setminus \Delta$  est ouvert.

Soit  $(x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus \Delta$ . Comme  $x_1 \neq x_2$  il existe des voisinages  $U_1, U_2$  de  $x_1, x_2$  avec  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  donc  $U_1 \times U_2$  est un voisinage de  $(x_1, x_2)$  qui est contenu dans  $(X \times X) \setminus \Delta$ .

(Noter qu'il est important que  $X$  soit un espace de Hausdorff!)  $\square$

**Proposition 2.7** Soient  $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$  deux fonctions continues.

L'ensemble  $H = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  est fermé.

**Preuve 13** Nous définissons  $F : X \rightarrow Y \times Y : x \rightarrow (f(x), g(x))$ .

Alors  $H = F^{-1}(\Delta)$  est fermé parce que  $\Delta$  est fermé et  $F$  est continue.  $\square$

**Conséquences :**

- Si deux fonctions continues sont égales sur un ensemble dense, elles sont complètement égales. Spécifiquement, si deux fonctions sur  $\mathbb{R}$  (ou sur un intervalle) sont égales sur les nombres rationnels ( $\mathbb{Q}$ ), elles sont égales.
- L'ensemble des zéros d'une application continue d'un espace  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$  est fermé (choisir  $g(x) \equiv 0$ ).

**Proposition 2.8 (Théorème du graphe fermé)**

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques,  $f : X \rightarrow Y$  continue. L'ensemble  $G := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$  (appelé le "graphe" de  $f$ ) est fermé dans  $X \times Y$ .

**Preuve 14** *Nous posons*

$$P_2 : X \times Y \rightarrow Y : (x, y) \rightarrow y \quad \text{et} \quad P_1 : X \times Y \rightarrow X : (x, y) \rightarrow x.$$

*Evidemment  $P_1$  et  $P_2$  sont continues. Donc  $(f \circ P_1)$  est aussi continue. Mais*

$$G = \{(x, y) \in X \times Y \mid P_2(x, y) = f \circ P_1(x, y)\}$$

*est donc fermé d'après la proposition 2.7.* □

## 2.2 Groupes topologiques

**Définition 2.14** **Groupe topologique**

*Un groupe topologique est un groupe qui est en même temps un espace topologique tel que l'application*

$$G \times G \rightarrow G : (a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

*est continue.*

**Proposition 2.9** *Les applications*

$$G \rightarrow G : a \rightarrow a^{-1} \quad \text{et} \quad G \times G \rightarrow G : (a, b) \rightarrow ab$$

*sont aussi continues.*

**Preuve 15**

- *Soit  $(a_n)$  une suite qui converge vers  $a$ . Nous allons montrer que  $a_n^{-1}$  converge vers  $a^{-1}$  :  $(e, a_n)$  est une suite qui converge vers  $(e, a)$  (dans  $G \times G$ ) alors  $e \cdot a_n^{-1} = a_n^{-1}$  converge vers  $e \cdot a^{-1} = a^{-1}$  (parce que  $(b, a) \rightarrow ba^{-1}$  est continue).*
- *Soit  $(a_n, b_n)$  une suite qui converge vers  $(a, b)$ , donc  $(a_n, b_n^{-1})$  converge vers  $(a, b^{-1})$ . Alors  $a_n \cdot (b_n^{-1})^{-1} = a_n \cdot b_n$  converge vers  $a \cdot b$ . □*

**Théorème 2.3** *Soit  $f : G \rightarrow H$  un homomorphisme entre deux groupes topologiques. Si  $f$  est continue en  $e \in G$ ,  $f$  est continue partout.*

**Preuve 16** *Soit  $x \in G$  et  $V \subset H$  un voisinage de  $y = f(x)$ . Nous voulons montrer qu'il existe un  $U \subset G$ , voisinage de  $x$  tel que  $f(U) \subset V$ .*

*Nous considérons  $V \cdot y^{-1}$ , qui est un voisinage de  $e \in H$ . Alors il existe un voisinage  $U'$  de  $e \in G$  tel que  $f(U') \subset V \cdot y^{-1}$  (comme  $f$  est continue en  $e$ ). Posons  $U = U' \cdot x$  qui est un voisinage de  $x$  avec*

$$f(U) = f(U') \cdot f(x) \subset V \cdot y^{-1} \cdot f(x) = V.$$

□

**Définition 2.15 Uniformément continu, équi-continu, convergence uniforme**

- Soit  $H \subset G$  un sous-ensemble d'un groupe topologique et  $f : H \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$  une fonction. On dit que  $f$  est **uniformément continu** sur  $H$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V \subset G$  de  $e$  tel que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in H \text{ tel que } x \cdot y^{-1} \in V.$$

- Si nous pouvons choisir  $H \equiv G$ ,  $f$  est dit tout simplement **uniformément continu**.
- Soit  $H \subset G$  et  $\Delta$  un ensemble de fonctions sur  $H$ . Cet ensemble s'appelle **équi-continu** sur  $H$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V \subset G$  de  $e$  tel que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon \forall x, y \in H$  tel que  $xy^{-1} \in V$  et pour tout  $f \in \Delta$ .
- Une suite de fonctions  $f_n$  sur  $H$  converge **uniformément** vers une fonction  $f$  sur  $H$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall n \geq N$  et  $\forall x \in H$ .

**Exercice 2.2**

- La convergence uniforme est équivalente à  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall m, n > N, x \in H.$$

- Si les  $(f_n)$  sont continues et si elles convergent uniformément vers  $f$ ,  $f$  est aussi continue.

**Théorème 2.4** Soit  $G$  un groupe topologique qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité et  $H \subset G$  compact. Soit  $\Delta$  un ensemble de fonctions équi-continues sur  $H$  qui sont bornées uniformément avec

$$|f(x)| < L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H, f \in \Delta.$$

Alors toute suite  $(f_n) \subset \Delta$  contient une sous-suite qui est uniformément convergente.

**Preuve 17** Comme  $G$  satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité, il contient un ensemble dénombrable  $N$  qui est dense, et  $N \cap H$  est dense dans  $H$ .

- Soient  $\{a_1, a_2, \dots\} = N \cap H$ .
- Soit  $(f_n)$  une suite dans  $\Delta$ .

La suite des nombres  $(f_n(a_1))_n$  est bornée, elle possède une sous-suite convergente  $(f_{n_{k_1}}(a_1))_{k_1}$ . Mais  $(f_{n_{k_1}}(a_2))_{k_1}$  est aussi bornée et contient alors une sous-suite  $(f_{n_{k_2}}(a_2))_{k_2}$  qui converge. Alors  $f_{n_{k_2}}(a_1)$  et  $f_{n_{k_2}}(a_2)$  convergent.

Nous pouvons continuer de cette manière et alors construire des suites de nombres  $n_{k_j}$  tel que  $f_{n_{k_j}}$  converge dans tous les

$$a_\ell, \ell \leq j \quad \text{et} \quad (n_{k_j})_{k_j} \supset (n_{k_{j+1}})_{k_{j+1}}.$$

La suite  $(n_{k_k})_{k=1}^\infty$  est telle que  $g_k \equiv f_{n_{k_k}}$  converge pour tous les  $a_i \in N \cap H$ .

Nous allons montrer que la suite  $g_k$  converge uniformément sur  $H$ . Comme les  $g_k$  sont équi-continues, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un voisinage  $V$  de  $e$  tel que

$$|g_k(x) - g_k(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x, y \in H \quad \text{avec} \quad xy^{-1} \in V \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme  $N$  est dense, l'ensemble  $\{Va_i \mid a_i \in N\}$  est un recouvrement ouvert de  $H$ . Il contient aussi un recouvrement fini donné par les éléments

$$b_j = a_{i_j}, \quad j = 1, \dots, M \quad \text{et} \quad H = \bigcup_{j=1}^M Vb_j.$$

La suite  $g_k(b_j)$  converge pour tout  $j = 1, \dots, M$ . Pour tout  $j = 1, \dots, M$ , il existe donc un  $N_j$ , tel que

$$|g_p(b_j) - g_q(b_j)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall p, q > N_j.$$

Soit  $N = \max\{N_1, \dots, N_M\}$ . Soit  $x \in H$  quelconque et  $p, q > N$ . Il existe donc un  $j \in \{1, \dots, M\}$  tel que  $x \in Vb_j$  et alors

$$|g_p(x) - g_q(x)| \leq |g_p(x) - g_p(b_j)| + |g_p(b_j) - g_q(b_j)| + |g_q(b_j) - g_q(x)| < \epsilon.$$

Alors  $(g_p)$  converge uniformément dans  $H$ . □

### Définition 2.16 Inf, sup et S

Soit  $X$  un espace topologique compact,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Nous posons

$$L(f) = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$$

$$K(f) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$$

$$S(f) = K(f) - L(f).$$

### Proposition 2.10

- Il existe un  $x \in X$  et un  $y \in X$  tels que  $L(f) = f(x)$  et  $K(f) = f(y)$ ; c'est-à-dire ces inf et sup sont en effet des min et max.



– Si  $(f_n)$  est une suite qui converge uniformément vers  $f$ , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(f_n) = K(f) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n) = L(f).$$

**Preuve 18** Soit  $x_n$  tel que  $f(x_n) < L(f) + \frac{1}{n}$ . Comme  $X$  est compact,  $x_n$  contient une sous-suite qui converge<sup>1</sup>  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Soit  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  alors

$$f(x) < L(f) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{donc} \quad f(x) \leq L(f).$$

Mais  $L$  est l'infimum de  $f$  alors  $f(x) = L(f)$ .

(En principe il faudrait d'abord montrer que  $L(f)$  existe. Mais ceci se fait de la même façon : supposons que  $L(f)$  n'existe pas. Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$  il existe un  $x_n \in X$  tel que  $f(x_n) < -n$ . Comme  $X$  est compact,  $(x_n)$  possède une sous-suite convergente vers un  $x \in X$ . Ce  $x$  satisfait  $f(x) < -n \forall n \in \mathbb{R}$ , ce qui est une contradiction.)

Les démonstrations pour  $K$  sont analogues (le deuxième point est laissé comme exercice). □

## 2.3 L'intégration de Haar

Pour un groupe fini et une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  nous avons déjà défini

$$I(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

où  $\{x_i\}$  sont les  $N$  éléments de  $G$ .

Cette fonctionnelle  $I$  possède les propriétés suivantes :

$$I(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i^{-1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i y) \quad \forall y \in G.$$

En plus

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \quad , \quad I(\alpha \cdot f) = \alpha I(f), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad I(|f|) \geq |I(f)|.$$

Ce sont les propriétés d'une **intégration invariante**.

Nous allons maintenant construire une telle intégration invariante ou intégration de **Haar** pour tout groupe compact qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité.

---

<sup>1</sup>Exercice!

### Définition 2.17 Intégration invariante (de Haar)

Soit  $\mathcal{C}(G)$  l'ensemble des fonctions continues sur un groupe topologique  $G$ .

Une application  $I : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé une **intégration invariante** ou **intégration de Haar** dénommée  $\int f(x)dx$ , si :

1. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$
2.  $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. Si  $f(x) \equiv 1$ ,  $\int f(x)dx \equiv 1$
4. Si  $f(x) \geq 0$ ,  $\int f(x)dx \geq 0$
5. Pour  $y \in G$  on a  $\int f(xy)dx = \int f(x)dx = \int f(yx)dx$
6.  $\int f(x^{-1})dx = \int f(x)dx$

D'après 1., 2. et 4. il s'ensuit que  $\int |f(x)|dx \geq |\int f(x)dx|$ . Ceci se trouve comme suit :  $|f(x)| - f(x) \geq 0$ ; alors

$$0 \leq \int (|f(x)| - f(x)) dx = \int |f(x)|dx - \int f(x)dx \quad \text{et} \quad \int |f(x)|dx \geq \int f(x)dx .$$

Mais nous avons aussi  $|f(x)| + f(x) \geq 0$ , donc

$$\int |f(x)|dx \geq - \int f(x)dx \quad \text{et donc} \quad \int |f(x)|dx \geq \left| \int f(x)dx \right| .$$

### Théorème 2.5 (Von Neumann 1934)

Sur un groupe topologique compact qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité il existe une unique intégration invariante. Si les conditions 1. à 4. et la première égalité de 5. sont satisfaites, la deuxième égalité de 5. et 6. suivent.

En plus, pour  $f(x) \geq 0$  et  $f \not\equiv 0$ ,  $\int f(x)dx > 0$ .

**Remarque :** Il est facile de voir que pour un groupe  $G$  fini et muni de la topologie  $P(G)$  (topologie discrète) toute fonction est continue et la construction  $I(f)$  constitue une telle intégration invariante. Pour un groupe compact mais non-fini, nous nous laissons guider par cet exemple et nous allons trouver la bonne intégration par une procédure de limite à partir de la somme faite sur les sous-ensembles finis.

**Preuve 19** *La démonstration de ce théorème n'est pas facile. Nous la répartirons donc sur dix étapes. Pour cela  $G$  sera toujours un groupe compact qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité.*

1. *Soit  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$   $A \subset G$  un sous-ensemble fini.*

*Nous posons*

$$M(A, f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(xa_i).$$

*Clairement,  $M(A, f)$  est aussi une fonction continue sur  $G$  qui possède les propriétés suivantes :*

$$L(M(A, f)) \geq L(f), \quad K(M(A, f)) \leq K(f)$$

$$\text{et alors } S(M(A, f)) \leq S(f).$$

*En plus, si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles finis d'éléments de  $G$ , nous avons*

$$M(A, M(B, f))(x) = M(A \cdot B, f)(x)$$

$$(A \cdot B = (a_1b_1, a_1b_2, \dots, a_1b_m, a_2b_1, \dots, a_nb_m))$$

2. *Si  $f$  n'est pas constante, il existe un sous-ensemble fini  $A$  telle que  $S(M(A, f)) < S(f)$ .*

**Preuve (de 2.) :** *Soit  $l$  le minimum et  $k$  le maximum de  $f$ . Comme  $f$  n'est pas constante,  $k > l$ . Comme  $f$  est continue il existe un ouvert  $U$  tel que pour  $h \in (l, k)$ ,  $f(x) \leq h < k$  pour tout  $x \in U$  (e.g.  $f^{-1}(l, h)$ ). Les ensembles de la forme  $Ua^{-1}$ ,  $a^{-1} \in G$  recouvrent le groupe  $G$  et ils contiennent alors un recouvrement fini de la forme  $Ua_i^{-1}$  pour certains  $a_i$ ,  $i \in J$ , ou  $J \subset \mathbb{N}$  est fini et contient  $m$  éléments,  $m = |J|$ . Soit  $A = \{a_i | i \in J\}$ . Nous allons montrer que le maximum*

$$K(M(A, f)) \leq \frac{(m-1)k + h}{m} < k.$$

*Naturellement  $f(xa_i) \leq k$ , mais pour tout  $x \in G$  nous pouvons trouver un  $a_i$  tel que  $x \in Ua_i^{-1}$  alors  $xa_i \in U$  et donc  $f(xa_i) \leq h$ . Il suit alors que  $K(M(A, f)) < k$ . Comme  $L(M(A, f)) \geq l$ , la relation 2. est établie.*

3. Soit  $f$  une fonction continue sur  $G$ . Un nombre  $p \in \mathbb{R}$  est appelé une **moyenne droite** de  $f$  si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un sous-ensemble fini  $A$  dans  $G$  telle que

$$|M(A, f)(x) - p| < \epsilon \quad \forall x \in G.$$

Nous allons montrer que toute fonction continue possède au moins une moyenne droite.

Soit  $\Delta$  l'ensemble de toutes les fonctions de la forme  $M(A, f)$  pour un sous-ensemble  $A$  fini et une fonction  $f$  donnée. De 1. il suit que  $\Delta$  est uniformément bornée. Nous allons montrer que  $\Delta$  est aussi équi-continu. Comme  $f$  est continue sur  $G$  compact,  $f$  est aussi uniformément continue. Pour tout  $\epsilon > 0$  il existe alors un voisinage  $V$  de  $e$  tel que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall xy^{-1} \in V.$$

Mais avec  $xy^{-1} \in V$  nous avons aussi

$$(xa_i)(ya_i)^{-1} = xy^{-1} \in V,$$

et donc

$$|f(xa_i) - f(ya_i)| < \epsilon.$$

La somme sur  $i$  donne

$$|M(A, f)(x) - M(A, f)(y)| < \epsilon$$

pour tout  $xy^{-1} \in V$  et pour tout  $A$  fini. Alors  $\Delta$  est équi-continu.

Soit  $s$  la borne inférieure de tous les  $S(M(A, f))$ . Il existe alors une suite  $f_n$  dans  $\Delta$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f_n) = s.$$

Comme  $\Delta$  est équi-continu, cette suite possède une sous-suite  $(g_n)$  qui converge uniformément. Nous allons appeler sa limite  $g(x)$ .

Sa variation  $S(g)$  est égale à  $s$  (voir théorème 2.4),  $S(g) = s$ .

Nous allons montrer que  $g$  est constante ou bien (cela revient au même) que  $s = 0$ .

Supposons que  $g$  ne soit pas constante. D'après 2. il existe alors un système  $A$  fini d'éléments de  $G$  tel que  $S(M(A, g)) = s' < s$ .

Soit  $\epsilon = \frac{1}{3}(s' - s)$ . Comme  $g_n$  converge uniformément vers  $g$ , il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k > N$ , nous avons

$$|g(x) - g_k(x)| < \epsilon.$$

En remplaçant  $x$  par  $xa_i$  et faisant la somme sur  $a_i \in A$ , on obtient

$$|M(A, g)(x) - M(A, g_k)(x)| < \epsilon.$$

Ces deux inégalités donnent

$$S(M(A, g_k)) < S(M(A, g)) + 2\epsilon = s' + 2\epsilon < s.$$

Mais  $M(A, g_k) \in \Delta$  ce qui est une contradiction puisque  $S(f) \geq s \forall f \in \Delta$ .

Donc la fonction  $g$  est constante. Nous posons  $p := g(x)$ . Comme la suite  $(g_n)$  converge uniformément vers  $p$ , pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|g_n(x) - p| < \epsilon \quad \forall n \geq N, x \in G.$$

Mais  $g_n \in \Delta$ , donc pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $A$  tel que

$$|M(A, f)(x) - p| < \epsilon \quad \forall x \in G.$$

Donc  $p$  est une moyenne droite de  $f$ .

4. En analogie avec 1., nous allons introduire pour un sous-ensemble fini  $B = (b_1, \dots, b_n)$  la fonction  $M'(B, f)$  définie par

$$M'(B, f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(b_i x).$$

– Il est facile de vérifier que

$$M(A, M'(B, f)) = M'(B, M(A, f)).$$

– Les inégalités de 1. et 2. sont aussi vérifiées pour  $M'$ .

5. En analogie avec 3. nous allons appeler  $q \in \mathbb{R}$  une moyenne gauche si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un sous-ensemble  $B$  dans  $G$  telle que  $|M'(B, f) - q| < \epsilon$ .

Nous allons montrer que il existe au moins une moyenne gauche. Pour cela nous allons garder la topologie de  $G$  mais nous définissons une autre multiplication : pour  $x, y \in G$  nous posons  $x \wedge y := y \cdot x$ . Avec  $(G, \cdot)$ ,  $(G, \wedge)$  est aussi un groupe topologique compact qui satisfait le deuxième axiome de dénombrabilité.

Une fonction continue sur  $(G, \cdot)$  et aussi continue sur  $(G, \wedge)$  et  $M'(B, f)$  sur  $(G, \cdot)$  devient  $M(B, f)$  sur  $(G, \wedge)$ . Alors une moyenne droite de  $f$  sur  $(G, \wedge)$  devient une moyenne gauche de  $f$  sur  $(G, \cdot)$ .

Donc  $f$  possède une moyenne gauche sur  $(G, \cdot)$  (on aurait aussi simplement pu répéter la preuve fournie sous 3.).

6. Toute fonction  $f$  continue sur  $G$  a une et une seule moyenne droite, ainsi qu'une (et une seule) moyenne gauche et les deux moyennes sont identiques. Cette unique moyenne est appelée la moyenne de  $f$  et dénommée par  $M(f)$ .

**Preuve :** Soit  $p$  une moyenne droite,  $q$  une moyenne gauche et  $A, B$  telles que

$$|M(A, f)(x) - p| < \epsilon \quad \text{et} \quad |M'(B, f)(x) - q| < \epsilon.$$

$$\text{Donc} \quad |M'(B, M(A, f))(x) - p| < \epsilon$$

$$\text{et} \quad |M(A, M'(B, f))(x) - q| < \epsilon$$

$$\text{Mais} \quad M'(B, M(A, f))(x) = M(A, M'(B, f))(x),$$

alors  $|p - q| < 2\epsilon$  et ceci pour tout  $\epsilon > 0$  donc  $p = q$ .

Alors toute moyenne droite est égale à toute moyenne gauche, ce qu'il fallait démontrer.

7. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $G$ . Alors

$$M(f + g) = M(f) + M(g).$$

Nous allons d'abord montrer que  $M(M(A, f)) = M(f)$  pour tout  $A \subset G$  fini.

Soit  $M(f) = p$ . Alors  $p$  est une moyenne gauche de  $f$ , donc pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $C \subset G$ , fini, tel que

$$|M'(C, f)(x) - p| < \epsilon \quad \forall x \in G.$$

En remplaçant  $x$  par  $xa_i$  et en sommant sur  $a_i \in A$ , il suit que

$$|M(A, M'(C, f))(x) - p| < \epsilon, \quad \text{ce qui est identique à}$$

$$|M'(C, M(A, f))(x) - p| < \epsilon.$$

Alors  $p$  est une moyenne gauche de  $M(A, f)$ , et donc  $p$  est (aussi) l'unique moyenne de  $M(A, f)$ .

Soit  $M(g) = q$ . Alors pour  $\epsilon > 0$  il existe un sous-ensemble  $B$  avec

$$|M(B, g)(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour tout sous-ensemble  $A'$  nous avons

$$|M(A', M(B, g))(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme  $p$  est aussi la moyenne de  $M(B, f)$ , il existe un sous-ensemble fini  $A$  tel que

$$|M(A, M(B, f))(x) - p| < \frac{\epsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } |M(AB, g+f)(x) - (p+q)| &= |M(AB, f)(x) + M(AB, g)(x) - (p+q)| \\ &< |M(AB, g)(x) - q| + |M(AB, f)(x) - p| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc  $p + q$  est la moyenne de  $f + g$ .

8. Soit  $f$  continue et  $a \in G$ . Nous posons  $f_a(x) = f(xa)$  et  ${}_a f(x) = f(ax)$ .

$$M(f_a) = M({}_a f) = M(f).$$

**Preuve :** Remarquons d'abord que

$$M(A, f_a)(x) = M(A, f)(xa) = M(Aa, f)(x).$$

Alors les moyennes droites de  $f$  et  $f_a$  sont égales. De même, avec  $M'$  on conclut que les moyennes gauches de  $f$  et  ${}_a f$  sont identiques, c'est-à-dire que les moyennes de ces trois fonctions coïncident.

9. Si  $f(x) \geq 0$  et  $f \not\equiv 0$ ,  $M(f) > 0$ .

**Preuve :** Soit  $f(x) > h > 0$ . Il existe alors un ouvert  $U$ , voisinage de  $x$ , tel que

$$f(y) > h \forall y \in U.$$

Les ouverts  $Ua_i^{-1}$ ,  $a_i \in G$  recouvrent  $G$  et contiennent alors un recouvrement fini de  $G$ ,  $Ua_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Nous posons  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$ . Pour tout  $x \in G$  il existe donc un  $a_i$  tel que  $x \in Ua_i^{-1}$  donc  $xa_i \in U$  et alors

$$f(xa_i) > h \quad \text{et} \quad M(A, f)(x) > \frac{h}{N}.$$

$$\text{Alors } M(f) = M(M(A, f)) > \frac{h}{N} > 0.$$

## 10. Démonstration finale du théorème

Nous posons

$$\int f(x)dx = M(f).$$

Il est évident que ceci satisfait les conditions 1., 3. et 4. de la définition 2.17. Les conditions 2. et 5. suivent de 7. et 8., établis plus haut.

Nous devons encore montrer le point 6., que  $\int f(x)dx$  est unique.

Soit  $\int^* f(x)dx$  une autre intégration invariante qui satisfait la définition 2.17.

Nous allons montrer que

$$\int^* f(x)dx = M(f).$$

**Preuve :** Soit  $p = M(f)$ . Il existe alors un  $A$  fini tel que

$$|M(A, f)(x) - p| < \epsilon \quad \forall x \in G.$$

Mais à cause de 1., 3. et 5.

$$\left| \int^* M(A, f)(x)dx - p \right| = \left| \int^* f(x)dx - p \right| \leq \epsilon.$$

Et ceci pour tout  $\epsilon > 0$  donc  $\int^* f(x)dx = p = M(f)$ .

Il faut encore prouver que 6. est aussi satisfait. Pour cela posons

$$\int^* f(x)dx := \int f(x^{-1})dx.$$

Il est facile de voir que  $\int^*$  satisfait les conditions 1. à 5. de la définition 2.17. Nous ne montrons que la première de égalités 5. :

$$\int^* f(xa)dx = \int f(a^{-1}x^{-1})dx = \int f(x^{-1})dx = \int^* f(x)dx.$$

Alors  $\int^*$  est aussi une intégration invariante sur  $G$ , donc

$$\int^* \equiv \int.$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.5. □

## 2.4 Autres propriétés importantes des groupes topologiques

### Définition 2.18 Connexe

Un espace topologique  $X$  est appelé **connexe**, s'il n'existe pas deux ensembles fermés  $A, B$  non-vides tels que

$$A \cup B = X \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset.$$



**Exercice 2.3**  $X$  est connexe si et seulement si il n'existe pas deux ensembles ouverts  $A, B$  tels que

$$A \cup B = X \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset.$$

**Définition 2.19** **Sous-groupes topologiques**

Un sous-groupe  $H \subset G$  du groupe topologique  $G$  est appelé **sous-groupe topologique** si  $H$  est fermé.

**Remarque :** Tout sous-groupe  $H$  d'un groupe topologique  $G$  est un espace topologique via la topologie induite même si  $H$  n'est pas un sous-groupe topologique.

**Exemples :**

- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ .
- $(\mathbb{Z}, +)$  est un sous-groupe topologique de  $(\mathbb{R}, +)$ .
- $U(n)$  est un sous-groupe topologique de  $Gl(n, \mathbb{C})$ .
- $O(n)$  est un sous-groupe topologique de  $Gl(n, \mathbb{C})$ .

**Lemme 2.2** Soit  $A \subset X$  muni de la topologie induite.

$f : X \rightarrow Y$  continue,  $f_A$  définie par  $f_A : A \rightarrow Y : x \rightarrow f(x)$ . Alors  $f_A$  est aussi continue.

**Preuve 20** Soit  $V \subset Y$  ouvert.  $f_A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$  est ouvert par rapport à la topologie induite. □

**Lemme 2.3** Soit  $G$  un groupe topologique. La fonction

$$f_n : G \rightarrow G : x \rightarrow x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

est continue.

**Preuve 21** (Par induction). Pour  $n = 1$ ,  $f$  est l'identité qui est trivialement continue.

Soit  $x \rightarrow x^n$  continue. Alors

$$\varphi : G \times G \rightarrow G : (x, y) \rightarrow x^n y$$

est aussi continue. Mais  $f_{n+1} = \varphi|_{\Delta}$  où  $\Delta$  est la "diagonale" de  $G \times G$ . Pour  $n < 0$  nous composons  $f_n$  avec  $x^{-1}$ . □

**Lemme 2.4** Soit  $G$  un groupe topologique.

$$f : G \times G \times \dots \times G \rightarrow G : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}, \quad r_i \in \mathbb{Z}$$

est continue.

**Preuve 22** Nous allons montrer que si  $f_1, \dots, f_n : G \rightarrow G$  sont continues,

$$f_1 \cdots f_n : G \times G \times \dots \times G \rightarrow G : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

est aussi continue. Mais ceci suit du fait que  $f_1 \cdots f_n$  est la combinaison de l'application continue

$$\begin{aligned} f_1 \times \dots \times f_n & : G \times \dots \times G \rightarrow G \times \dots \times G \\ & : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \end{aligned}$$

et l'application continue

$$G \times G \times \dots \times G \rightarrow G : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n.$$

Le lemme 2.4 est juste un exemple de ce fait général pour  $f_i(x) = x^{r_i}$ .  $\square$

**Proposition 2.11** Soit  $a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n} = c$  et  $W$  un voisinage de  $c$ . Alors il existe des voisinages  $U_i$  des  $a_i$  tels que  $U_1^{r_1} \cdot U_1^{r_1} \dots \cdot U_n^{r_n} \subset W$ .

**Preuve 23** Ceci est une simple conséquence de la continuité de la fonction du lemme 2.4.  $\square$

**Lemme 2.5** Soit  $F$  fermé,  $U$  ouvert et  $P$  quelconque, des sous-ensembles d'un groupe topologique  $G$  et  $a \in G$ . Alors  $F \cdot a$ ,  $a \cdot F$  et  $F^{-1}$  sont fermés tandis que  $UP$ ,  $PU$  et  $U^{-1}$  sont ouverts.

**Preuve 24** Il est évident que l'origine d'un ensemble fermé sous une application continue est aussi fermé :

$$\text{Si } f : X \rightarrow Y \text{ et } F \subset Y \text{ est fermé, alors } f^{-1}(F) \subset X \text{ est fermé.}$$

(Il faut juste appliquer la définition de continuité sur l'ensemble ouvert  $Y \setminus F$ .)

Donc  $F \cdot a$ ,  $a \cdot F$  et  $F^{-1}$  sont fermés parce que  $x \mapsto xa^{-1}$ ,  $x \mapsto a^{-1}x$  et  $x \mapsto x^{-1}$  sont des fonctions continues. De même pour  $aU$ ,  $Ua$  et  $U^{-1}$ . Mais  $UP = \bigcup_{a \in P} Ua$  et  $PU = \bigcup_{a \in P} aU$  sont des unions d'ensembles ouverts et donc aussi ouverts.  $\square$

**Remarque :** Comme la continuité, toute propriété topologique **locale** d'un groupe topologique  $G$  est vraie partout si elle vérifiée en  $e$ . Ceci est une conséquence de "l'homogénéité" des groupes topologiques. Les voisinages autour de tout point  $x \in G$  sont de la forme  $V \cdot x$  ou  $V$  est un voisinage de l'identité.

### Définition 2.20 Discret

Un groupe topologique est appelé **discret** si tout élément  $x \in G$  a un voisinage  $V = \{x\}$ .

- Il est évident que dans un groupe discret, seules les séries qui sont constantes à partir d'un élément donné convergent.
- A cause de la remarque qui précède, un groupe est discret si  $\{e\}$  est un ouvert.
- $\mathbb{Z}$  avec la topologie induite de  $\mathbb{R}$  (avec topologie naturelle) est un groupe discret.
- Si on choisit  $\mathcal{P}(G) =$  les ensembles ouverts, tout groupe est discret. Mais ce choix satisfait rarement le deuxième axiome de dénombrabilité.

**Espace quotient** Soit  $H \subset G$  un sous-groupe topologique. Comme dans la proposition 1.1 nous définissons  $x \sim y$  s'il existe un  $h \in H$  tel que  $x = hy$ . Les classes d'équivalence  $[x]$  sont appelées "les co-sets de droite".  $\frac{G}{H} = \{[x] | x \in G\}$  est l'espace des co-sets de droite. Si  $H$  n'est pas un sous-groupe normal,  $\frac{G}{H}$  n'hérite pas de la multiplication induite par celle de  $G$ , comme nous l'avons vu dans la proposition 1.1. Mais nous pouvons toujours induire une **topologie** induite par celle de  $G$  sur  $\frac{G}{H}$  et donc en faire un espace topologique.

**Définition 2.21 Topologie des co-sets** Soit  $\frac{G}{H}$  l'espace des co-sets de droite d'un groupe topologique avec sous-groupe  $H$ . Nous définissons  $\mathcal{U} \subset \frac{G}{H}$  est **ouvert**  $\Leftrightarrow$  si  $\{x \in G | [x] \in \mathcal{U}\}$  est ouvert dans  $G$ .

1. Il est évident que ceci définit une topologie sur  $\frac{G}{H}$ , et que l'application  $\Pi : G \rightarrow \frac{G}{H} : x \rightarrow [x]$  est continue avec cette topologie.
2. Si  $H$  est **normal** ( $Hg = gH \forall g \in G$ ) et donc  $\frac{G}{H}$  est un groupe et la multiplication et l'inversion sont continues, alors  $\frac{G}{H}$  est un groupe topologique avec cette topologie induite (simple conséquence de la définition).

**Théorème 2.6** Soient  $G$  et  $G^*$  deux groupes (pas nécessairement topologiques),  $f : G \rightarrow G^*$  un homomorphisme surjectif et  $\ker f := f^{-1}(e^*) = N$ . Alors  $N$  est un sous-groupe normal et  $\bar{f} : \frac{G}{N} \rightarrow G^* : [x] \rightarrow f(x)$  est un isomorphisme.

**Preuve 25** Soit  $x \in G$ ,  $n \in N$  alors  $f(xnx^{-1}) = f(x) \cdot f(x^{-1}) = e$  donc  $xnx^{-1} \in N$ , donc  $xNx^{-1} = N$  ou  $xN = Nx$ . Il est aussi évident que  $\bar{f}$  est bien défini parce que pour  $x \sim y$   $x = yn$  pour un  $n \in N$  et donc  $f(x) = f(yn) = f(y)$ . En plus, le noyau de  $\bar{f}$  est  $[e]$  alors  $\bar{f}$  est un isomorphisme.  $\square$

Ce théorème ne peut pas être traduit sur des groupes topologiques et des homomorphismes **continus**, mais seulement sur des homomorphismes **ouverts**.

**Définition 2.22 Application ouverte**

Une application continue  $f : X \rightarrow Y$ , ( $X, Y$  espaces topologiques) est appelée **ouverte** si  $f(U)$  est ouvert (dans  $Y$ ) pour tout  $U \subset X$  ouvert.

**Théorème 2.7** Si  $G$  et  $G^*$  sont des groupes topologiques et  $f : G \rightarrow G^*$  est un homomorphisme ouvert, alors  $\bar{f} : \frac{G}{N} \rightarrow G^*$  est un isomorphisme topologique, c'est-à-dire  $\bar{f}$  est un isomorphisme et  $\bar{f}$  ainsi que  $\bar{f}^{-1}$  sont continues.

**Preuve 26** La seule chose qu'il faut encore démontrer est que  $\bar{f}$  et  $\bar{f}^{-1}$  sont continues. La continuité de  $\bar{f}$  est une simple conséquence de la continuité de  $f$ . Pour démontrer que  $\bar{f}^{-1}$  est continue nous utilisons le fait que  $f$  est ouvert : soit  $U \subset \frac{G}{H}$  ouvert donc  $\{x|[x] \in U\}$  est ouvert dans  $G$ . Alors  $(\bar{f}^{-1})^{-1}(U) = \bar{f}(U) = f(\{x|[x] \in U\})$  est ouvert. □

P.S. : comme  $N = f^{-1}([e^*])$  il est clair que  $N$  est fermé.

**Remarque :** Pour des groupes  $G$  et  $G^*$  qui sont localement compacts et qui satisfont au deuxième axiome de dénombrabilité, tout homomorphisme continu et surjectif :  $G \rightarrow G^*$  est aussi ouvert.

(localement compact  $\Leftrightarrow$  tout  $x \in G$  possède un voisinage  $V$  dont la fermeture,  $\bar{V}$ , est compacte)

**Définition 2.23 Composante**

Une **composante** d'un espace topologique  $X$  est un sous-ensemble  $A \subset X$  connexe, fermé et non-vide, tel que  $X = A \cup B$  pour un certain autre sous-ensemble fermé,  $B \subset X$  avec  $A \cap B = \emptyset$ .

1. Un espace connexe n'a qu'une composante,  $A = X$ , parce que la seule décomposition en ensembles fermés est  $X = X \cup \emptyset$ .
2. La composante d'un groupe topologique  $G$  qui contient l'élément neutre forme un sous-groupe normal.

**Preuve 27 du point 2.**

Soit  $N$  la composante de  $e \in G$ ,  $a, b \in N$ . Avec  $N$ ,  $aN^{-1}$  est aussi fermé et connexe, fermé et il contient  $a \cdot a^{-1} = e$ . Donc  $aN^{-1} = N$  alors  $ab^{-1} \in N \forall a, b \in N$ . Alors,  $N$  est un sous-groupe. Par définition  $N$  est aussi fermé. De plus, soit  $x \in G$  quelconque,  $xNx^{-1}$  est connexe et contient  $e$ , alors  $xNx^{-1} = N$ , donc  $N$  est un sous-groupe normal. □

– Si un groupe est connexe, il coïncide avec la composante de  $e$ .

- Si, par contre, la composante de  $e$  est  $\{e\}$  le groupe est appelé complètement dis-connexe ou 0-dimensionnel.

**Proposition 2.12** *Si  $G$  est un groupe connexe et  $U$  un voisinage ouvert de  $e$ ,  $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} U^n$ .*

**Preuve 28** *On voit facilement que pour tout  $U$ , l'ensemble  $V = \cup_{n \in \mathbb{N}} U^n$  est en même temps ouvert et fermé. Comme union d'ensembles ouverts, il est ouvert et la démonstration que  $V$  est aussi fermé est donnée en bas. Donc  $G = V \cup (G \setminus V)$  est une union de deux ensembles fermés. Comme  $G$  est connexe, un des deux doit être vide, mais  $e \in V$ , donc  $V \neq \emptyset$ . Alors  $V = G$ .*

*Pour montrer que  $V$  est fermé, prenons  $a \in \bar{V}$ . Comme  $aU^{-1}$  est un voisinage de  $a$ , il intersectionne  $V$ . Soit  $b \in aU^{-1} \cap V$ . Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  et des  $u_i \in U$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tels que  $b = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$ . En plus il existe  $u_{n+1}^{-1} \in U^{-1}$  tel que  $b = a \cdot u_{n+1}^{-1}$ , donc  $a = u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n+1} \in V$ .  $\square$*

**Proposition 2.13** *Tout sous-groupe normal discret  $N$  d'un groupe connexe  $G$  est un sous-groupe du centre  $Z$  de  $G$ .*

**Preuve 29** *Rappel : Le centre  $Z$  sont les éléments de  $G$  qui commutent avec tous les autres.*

*Soit  $a \in N$ . Comme  $N$  est discret, il existe un voisinage  $V$  de  $a$  qui ne contient aucun élément de  $N$  sauf  $a$ . Il existe aussi un voisinage  $U$  de l'identité tel que  $UaU^{-1} \subset V$  (l'application  $x \rightarrow xax^{-1}$  est continue).*

*Pour tout  $u \in U$  on a alors  $uau^{-1} \in V \cap N = \{a\}$ , donc  $ua = au$ . Mais comme  $G$  est connexe tout élément  $x \in G$  est de la forme  $x = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$  pour certains éléments  $u_i \in U$  et donc  $xa = ax$ .  $\square$*

# Chapitre 3

## Représentations

### 3.1 Définitions et faits élémentaires

#### Définition 3.1 Représentation

- Soit  $V$  un espace vectoriel (complexe ou réel) et  $\text{Aut}(V)$  l'ensemble des applications linéaires et bijectives de  $V$  en soi-même. Evidemment,  $\text{Aut}(V)$  forme un groupe.
- Une **représentation** d'un groupe  $G$  est un homomorphisme  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ .
- Une représentation  $\varphi$  est appelée **irréductible** si les seuls sous-espaces  $W$  de  $V$  qui sont invariants sous tous les  $\varphi(g)$ ,  $g \in G$ , c'est-à-dire  $\varphi(g)(W) \subset W \quad \forall g \in G$ , sont  $\{0\}$  et  $V$ .

Si  $V$  est un espace vectoriel à dimension finie,  $n$ , après le choix d'une base dans  $V$ ,  $\text{Aut}(V)$  est isomorphe à  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$  ou  $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$  et une représentation est un homomorphisme de  $G$  dans les matrices  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ . Comme  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$  est un ensemble ouvert dans  $\mathbb{C}^{n^2}$  dont il hérite la topologie,  $\text{Aut}(V)$  est un groupe topologique (localement compact) qui satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité.

#### Définition 3.2 Réductibilité et irréductibilité

- Un sous-ensemble  $\Delta \subset \text{Aut}(V)$  est appelé **réductible** s'il existe un sous-espace  $W \subset V$  non trivial, c'est-à-dire  $W \neq \{0\}$  et  $W \neq V$ , qui est invariant sous tous les automorphismes  $A \in \Delta$ , c'est-à-dire  $AW \subset W, \quad \forall A \in \Delta$ . Sinon  $\Delta$  est appelé **irréductible**.
- Un sous-ensemble de matrices  $\Delta' \subset \text{Gl}(n, \mathbb{C})$  est appelé **réductible** (**irréductible**) si les transformations linéaires engendrées sur un espace vectoriel  $V$  à dimension  $n$  par des matrices dans  $\Delta'$  après un choix de

base sont **réductibles (irréductibles)**. (Vérifier que cette définition est indépendante du choix de base.)

- Un sous-ensemble  $\Delta \subset \text{Aut}(V)$  est appelé **complètement réductible** s'il existe des sous-espaces  $V_i$ ,  $i \in I$ , avec  $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$  et  $AV_i \subset V_i$  pour tout  $A \in \Delta$ , tel que  $A|_{V_i}$  est irréductible pour tout  $i \in I$ . Dans ce cas, si la dimension de  $V$  est finie, les transformations dans  $\Delta$  sont toutes représentées par des matrices en forme de blocs dans une base adaptée à la décomposition de  $V$ .

**Proposition 3.1** 1. Si  $\Delta \subset \text{Aut}(V)$  est réductible (irréductible) ceci est aussi vrai pour  $A\Delta A^{-1}$  pour n'importe quel  $A \in \text{Aut}(V)$ .

2. Si  $\Delta' \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$  est réductible (irréductible) ceci est aussi vrai pour  $A\Delta' A^{-1}$  pour n'importe quel  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ .

**Preuve 30** Il est clair que le point 2. est un cas spécial du point 1. pour  $V = \mathbb{C}^n$ . En plus il vérifie que la définition d'un ensemble réductible (irréductible) de matrices ne dépend pas de la base choisie.

Mais 1. est évident parce que  $W$  est un espace invariant sous  $\Delta$  si et seulement si  $A \cdot W$  est un espace invariant sous  $A\Delta A^{-1}$ .  $\square$

**Lemme 3.1 (de Schur)**

Soient  $\Sigma$  et  $\Delta$  deux ensembles irréductibles de matrices,  $\Sigma \subset \text{GL}(m, \mathbb{C})$ ,  $\Delta \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ . Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$  tel que

$$\Sigma \cdot A = A \cdot \Delta.$$

Alors nous avons soit  $A \equiv 0$  soit  $m = n$  et  $A$  est inversible,  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ .

**Preuve 31** Soit  $A = (a_{ij})$  et  $U \in \Sigma$ ,  $V \in \Delta$  tels que  $UA = AV$ . Donc

$$(U \cdot a_j)_\ell = \sum_{i=1}^n U_{\ell i} a_{ij} = \sum_{s=1}^m a_{\ell s} V_{sj}.$$

Ici nous avons défini  $a_k \in \mathbb{C}^n$  le vecteur avec les composantes

$$a_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$$

Alors  $\sum_s a_{\ell s} V_{sj}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $a_k$ . Donc  $\Sigma$  laisse invariant l'espace linéaire généré par les vecteurs  $\{a_1, \dots, a_m\}$ . Nous appelons

cet espace  $\mathcal{S}$ . Comme  $\Sigma$  est irréductible il est que  $\dim \mathcal{S} = 0$  ou  $\dim \mathcal{S} = m$ .

Dans le premier cas,  $A \equiv 0$ .

Dans le deuxième cas, les vecteurs  $a_k$ , à  $n$  composantes doivent générer un espace de dimension  $m$ , alors  $n \leq m$ .

Il est facile de voir que  $\Sigma$  (et  $\Delta$ ) sont irréductibles si et seul. si  $\Sigma^T$  et  $\Delta^T$  le sont. Mais si nous appliquons le même argument sur  $\Delta^T A^T = A^T \Sigma^T$ , nous trouvons que  $n \geq m$ .

Alors  $n = m$ . Donc  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et les  $n$  colonnes de  $A$  engendrent un espace vectoriel de dimension  $n$ , alors  $A$  est inversible.  $\square$

**Corollaire 3.1** Soit  $\Delta \subset \text{Gl}(n, \mathbb{C})$  un ensemble irréductible et  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  commute avec tous les matrices dans  $\Delta$ . Alors  $B = \lambda \mathbb{I}$  pour un  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Preuve 32** Nous considérons  $A = B - \lambda \mathbb{I}$  ou  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $B$ . Alors  $A$  n'est pas inversible. Mais  $A\Delta = \Delta A$ , donc  $A \equiv 0$ ,  $B = \lambda \mathbb{I}$ .  $\square$

**Corollaire 3.2** Soit  $\Delta \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$  irréductible et tous les éléments dans  $\Delta$  commutent entre eux. Dans ce cas  $n = 1$ .

**Preuve 33** D'après le corollaire 3.1 les éléments de  $\Delta$  sont tous de la forme  $\lambda \mathbb{I}$ . Ceci est irréductible seulement si  $n = 1$ .  $\square$

Nous considérons maintenant des espaces vectoriels (complexes) munis d'un produit scalaire.

Si nous choisissons une **base orthonormée**, une **transformation unitaire** d'un espace vectoriel de dimension  $n$  correspond à une matrice unitaire,  $A \in \mathcal{U}(n)$ .

### Définition 3.3 Produit scalaire

Un produit scalaire sur un espace vectoriel (complexe) est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

qui est linéaire dans le premier argument et anti-linéaire dans le deuxième. C'est-à-dire

$$\langle \alpha v_1 + v_2, w \rangle = \alpha \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \quad \text{et}$$

$$\langle v, \alpha w_1 + w_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$$

### Définition 3.4 Unitaire, Orthonormé



- Soit  $V$  un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire. Un automorphisme  $\varphi \in \text{Aut}(V)$  est appelé unitaire si

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

- Une base  $(e_j)$  de  $V$  est appelée orthonormée si  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**Proposition 3.2** Soit  $V$  un espace linéaire complexe de dimension  $n$  avec un produit scalaire. Après un choix de base orthonormée toute transformation unitaire de  $V$  correspond à une matrice unitaire  $A \in \mathcal{U}(n)$  et vice-versa.

**Preuve 34** Soit  $(e_i)_{i=1}^n$  une base orthonormée donnée.

$e_j \mapsto \sum_{\ell} A_{\ell j} e_{\ell}$  définit une application linéaire sur  $V$  et toute application linéaire peut s'écrire de cette forme.

La condition d'unitarité est alors

$$\left\langle \sum_{\ell} A_{\ell j} e_{\ell}, \sum_m A_{mi} e_m \right\rangle = \delta_{ji}.$$

Linéarité dans le premier et anti-linéarité dans le deuxième argument donne

$$\delta_{ji} = \sum_{\ell, m} A_{\ell j} \bar{A}_{mi} \underbrace{\langle e_{\ell}, e_m \rangle}_{\delta_{\ell m}} = \sum_{\ell} A_{\ell j} \bar{A}_{\ell i} = \sum_{\ell} A_{\ell j} A_{i\ell}^* = (A^* A)_{ji}.$$

Alors  $A^* \cdot A = \mathbb{I}$  donc  $A^{-1} = A^*$ , c'est-à-dire  $A$  est unitaire.  $\square$

Noter que les composantes d'un vecteur ne transforment pas avec  $A$  mais avec  $A^T$ . Mais si  $A$  est unitaire aussi  $A^T$  l'est, et donc une transformation linéaire est unitaire si la matrice qui la représente (c'est-à-dire, avec laquelle transforment les composantes d'un vecteur) dans une base orthonormée l'est.

**Proposition 3.3** Soit  $A : V \rightarrow V$  une transformation unitaire qui laisse invariant un sous-espace  $S \subset V$ . Alors  $A$  laisse aussi invariant son complément orthogonal,  $S^{\perp}$ .

**Preuve 35** Le complément orthogonal d'un sous-espace  $S$  est donné par  $S^{\perp} = \{x \in V \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in S\}$ . Soit alors  $x \in S^{\perp}$  et  $y \in S$ . Comme  $A$  laisse  $S$  invariant, on peut le considérer comme un automorphisme sur  $S$ . Il existe donc un  $z \in S$  avec  $Az = y$ . Donc

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ax, Az \rangle = \langle x, z \rangle = 0,$$

ce qui implique  $Ax \in S^{\perp} \forall x \in S^{\perp}$ .  $\square$

Comme  $V = S \oplus S^\perp$  nous pouvons alors choisir une base orthonormée (premiers  $j$  éléments dans  $S$ , derniers  $n - j$  éléments dans  $S^\perp$ ) telle que  $A$  correspond à une matrice  $D$  de la forme

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  sont des matrices unitaires de dimension  $j$  et  $n - j$  respectivement.

Comme les transformations unitaires d'un espace à dimension  $n$  sont isomorphes aux matrices  $\mathcal{U}(n)$ , ils héritent la topologie de  $\mathcal{U}(n)$  (on demande que cet isomorphisme soit continu). Avec  $\mathcal{U}(n)$ , le groupe des transformations unitaires est compact et il satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité.

## 3.2 Théorie des représentations de groupes compacts

### Définition 3.5 Equivalence

Deux représentations  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  et  $\varphi' : G \rightarrow \text{Aut}(W)$  sont appelées **équivalentes** s'il existe un isomorphisme

$$T : V \rightarrow W \text{ tel que } \varphi'(x) = T\varphi(x)T^{-1} \text{ pour tout } x \in G.$$

**Théorème 3.1** Soit  $\varphi$  une représentation d'un groupe compact  $G$  (qui satisfait au deuxième axiome de dénombrabilité) à dimension  $n$  finie. Alors il existe une représentation équivalente  $\varphi'$  qui est unitaire, c'est-à-dire toutes les transformations  $\varphi'(x)$ ,  $x \in G$  sont unitaires.

**Preuve 36** Soit  $(e_i)_{i=1}^n$  une base quelconque de  $V$ . Nous introduisons un produit scalaire par :

$$u = \sum_i u_i e_i, v = \sum_i v_i e_i, \quad \langle u, v \rangle = \sum_i u_i \bar{v}_i.$$

Par construction  $(e_i)_{i=1}^n$  est une base orthonormée par rapport à ce produit scalaire. Avec ceci et  $\varphi$  nous construisons un nouveau produit scalaire sur  $V$  donné par :

$$[u, v] = \int_G dx \langle \varphi(x)u, \varphi(x)v \rangle$$

où  $\int$  est l'intégration invariante (de Haar) sur  $G$ . Par rapport à ce nouveau produit scalaire  $\varphi$  est clairement unitaire :

$$[\varphi(y)u, \varphi(y)v] = \int_G dx \langle \varphi(xy)u, \varphi(xy)v \rangle = \int_G dx \langle \varphi(x)u, \varphi(x)v \rangle = [u, v].$$

Soit alors  $(f_i)_{i=1}^n$  une base orthonormée par rapport à ce nouveau produit scalaire et soit  $T$  défini par  $T(f_i) = e_i$ . Alors  $\varphi'(x) := T\varphi(x)T^{-1}$  est unitaire par rapport à l'ancien produit scalaire.  $\square$

**Remarque :** Le fait que la dimension de  $V$  soit finie n'est pas essentiel, il faut seulement que la représentation soit une application continue et bien sure que  $V$  admette un produit scalaire.

### Définition 3.6 Représentation réductible, irréductible

Une représentation  $\varphi$  d'un groupe  $G$  est appelé réductible/ irréductible/ complètement réductible si l'ensemble  $\{\varphi(x)|x \in G\} \subset \text{Aut}(V)$  est réductible/ irréductible/ complètement réductible.

**Exemple :** Ils existent des représentations qui sont réductibles mais ne pas complètement réductibles : Considérons la représentation

$$\varphi : (\mathbb{R}/\{0\}, \cdot) \rightarrow \text{Gl}(2, \mathbb{R}) : a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \ln(|a|) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Le sous-espace

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

est évidemment invariant sous  $\varphi(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , mais il n'existe pas d'autre sous-espace invariant,  $V_2 \neq \mathbb{R}^2$  tel que  $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^2$ . Les matrices de la forme (3.1) ne sont pas diagonalisables (elles sont déjà dans leur forme normale de Jordan).

**Théorème 3.2** Toute représentation unitaire à dimension finie est complètement réductible.

**Preuve 37** (du thm. 3.2)

Nous procédons par induction. Pour  $n = 1$  il n'y a rien à prouver. Supposons que le thm soit vrai pour tout  $m < n$ . Soit maintenant  $n = \dim V$ , et

$$\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V) : x \mapsto \varphi(x)$$

une représentations unitaire d'un groupe  $G$ . Si  $\varphi$  est irréductible elle est déjà dans la forme voulue. Si par contre  $\varphi$  est réductible il existe un sous-espace non-triviale  $V_1 \subset V$  qui est invariant sous toutes les transformations  $\varphi(x)$ ,  $x \in G$ . Mais comme ce sont des transformations unitaires aussi  $V_1^\perp$  est invariant (prop. 3.3) et  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$  pour deux espace invariants de dimension  $m_{1,2}$  avec  $1 \leq m_{1,2} < n$ . Par induction  $\varphi|_{V_1}$  et  $\varphi|_{V_1^\perp}$  sont complètement réductibles et nous pouvons alors trouver des sous-espaces  $W_1, \dots, W_i \subset V_1$  et  $W_{i+1}, \dots, W_j \subset V_1^\perp$  tels que

$$\varphi(x)W_p \subset W_p \text{ pour tout } 1 \leq p \leq j \text{ et } V = \bigoplus_{p=1}^j W_p. \quad \square$$

Dans les exercices nous démontrons encore que toute représentation irréductible d'un groupe compact est de dimension finie.

**Définition 3.7 Caractère** *Le caractère  $\mathcal{X}$  d'une représentation est la trace des matrices de représentation, la fonction*

$$\mathcal{X}_\varphi(x) = \text{tr } \varphi(x) \quad , x \in G,$$

ici  $\varphi(x)$  est la matrice de représentation dans une base quelconque. Comme  $\text{tr } \varphi(x)$  ne dépend pas de la base,  $\mathcal{X}_\varphi(x)$  est bien défini.

– Deux représentations équivalentes ont des caractères identiques,

$$\varphi = T\varphi'T^{-1} \text{ alors } \mathcal{X}_\varphi(x) = \mathcal{X}_{\varphi'}(x).$$

– Le caractère est une fonction sur les classes de conjugaison :

$$\text{soit } y = axa^{-1} \text{ alors } \mathcal{X}_\varphi(x) = \mathcal{X}_\varphi(y).$$

– Si la représentation  $\varphi$  d'un groupe  $G$  est réductible, tel que

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_n(x) \end{pmatrix}$$

nous obtenons

$$\mathcal{X}_\varphi(x) = \mathcal{X}_{\varphi_1}(x) + \mathcal{X}_{\varphi_2}(x) + \dots + \mathcal{X}_{\varphi_n}(x).$$

(Les  $\varphi_i$  sont aussi des représentations de  $G$  donc tout est bien défini.)

**Théorème 3.3** *Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux représentations **inéquivalentes** de  $G$  à dimensions  $m$  et  $n$ , unitaires. Nous considérons une base fixée ou  $\varphi$  et  $\psi$  sont données par des matrices unitaires*

$$(\varphi_{ij}(x)) \in \mathcal{U}(m) \text{ et } (\psi_{ij}(x)) \in \mathcal{U}(n).$$

$\mathcal{X}_\varphi$  et  $\mathcal{X}_\psi$  sont les caractères respectives. Les relations d'orthogonalité suivantes sont alors vérifiées :

$$\int \varphi_{ij}(x) \cdot \bar{\psi}_{\ell p}(x) dx = 0$$

$$\int \mathcal{X}_\varphi(x) \cdot \bar{\mathcal{X}}_\psi(x) dx = 0$$

**Preuve 38** Evidemment la deuxième équation est une conséquence de la première. Il nous faut donc juste démontrer celle-ci.

Soit  $b \in \mathbb{C}^{m \times n}$  arbitraire,  $a(x) = \varphi(x) \cdot b \cdot \psi^{-1}(x)$ . Nous posons

$$a = \int a(x) dx.$$

Nous voulons montrer que  $\varphi(y)a = a\psi(y)$  :

$$\begin{aligned} \varphi(y)a &= \int dx \varphi(y) \varphi(x) b \psi(x^{-1}) \\ &\stackrel{z=yx}{=} \int dz \varphi(z) b \psi(z^{-1}) \psi(y) = a\psi(y). \end{aligned}$$

D'après le lemme de Schur  $a$  est donc soit inversible, soit  $a \equiv 0$ . Comme  $\varphi$  et  $\psi$  sont inéquivalentes la première possibilité ne peut pas se réaliser, donc  $a \equiv 0$ . C'est-à-dire

$$\sum_{j\ell} \int \varphi_{ij}(x) b_{j\ell} (\psi^{-1})_{\ell p}(x) dx \equiv 0 \quad \forall b \in \mathbb{C}^{n \times m}.$$

En choisissant pour  $b$  la matrice avec 1 pour l'élément  $j\ell$  et 0 pour tous les autres éléments on obtient :

$$\int \varphi_{ij}(x) \bar{\psi}_{\ell p}(x) dx = 0.$$

□

**Théorème 3.4** Soit  $\varphi$  une représentation irréductible, unitaire, de dimension  $n$  du groupe compact  $G$ , alors

$$\begin{aligned} \int \varphi_{ij}(x) \bar{\varphi}_{ij}(x) dx &= \frac{1}{n}, \quad (\text{pas de somme!}) \\ \int \varphi_{ij}(x) \bar{\varphi}_{r\ell}(x) dx &= 0 \quad \text{si } i \neq r \quad \text{ou } j \neq \ell \\ \int \mathcal{X}_\varphi(x) \bar{\mathcal{X}}_\varphi(x) dx &= 1. \end{aligned}$$

**Preuve 39** De nouveau, la dernière éq. est une conséquence des autres.

Soit, comme avant,  $a(x) = \varphi(x) b \varphi(x^{-1})$ ,  $a = \int a(x) dx$  pour un  $b \in \mathbb{C}^{n \times n}$  quelconque. Nous obtenons comme avant

$$\varphi(y)a = a\varphi(y).$$

Le Lemme de Schur implique que  $a = \lambda \mathbb{I}$ , c'est-à-dire

$$\sum_{\ell, m} \int \varphi_{i\ell}(x) b_{\ell m} \varphi_{mj}(x^{-1}) dx = \lambda \delta_{ij}.$$

Nous nous attendons que ce nombre  $\lambda$  va dépendre du choix de  $b$ .

En prenant la trace des deux côtés on obtient avec

$$\text{tr}(\varphi(x)b\varphi(x^{-1})) = \text{tr} b = n \cdot \lambda, \quad \text{donc}$$

$$\lambda = \frac{\text{tr} b}{n}.$$

De nouveau nous choisissons  $b$  tel que  $b_{r\ell} = 1$  pour un  $1 \leq r \leq n$  et un  $1 \leq \ell \leq n$  et  $b_{km} = 0$  pour tous les autres éléments .

Alors  $\text{tr} b = \delta_{r\ell}$  et donc

$$\int \varphi_{ir}(x) \varphi_{\ell j}(x^{-1}) dx = \int \varphi_{ir}(x) \bar{\varphi}_{j\ell}(x) dx = \frac{\delta_{ij} \delta_{r\ell}}{n}$$

ce qui implique les deux premières égalités du théorème.  $\square$

Soit maintenant  $\varphi$  une représentation réductible d'une dimension  $N$ , unitaire. Elle est alors complètement réductible et nous pouvons la décomposer en somme de représentations irréductibles, symboliquement

$$" \varphi = m_1 \varphi_1 \oplus \dots \oplus m_r \varphi_r "$$

où  $m_i$  est la multiplicité avec laquelle apparaît la représentation irréductible  $\varphi_i$ . Nous appelons  $\mathcal{X}_i$  le caractère de la représentation  $\varphi_i$ . Evidemment

$$\mathcal{X}_\varphi(x) = \sum_i m_i \mathcal{X}_i(x).$$

En multipliant avec  $\bar{\mathcal{X}}_k$  et intégrant nous obtenons

$$\int \mathcal{X}_\varphi(x) \bar{\mathcal{X}}_k(x) dx = m_k.$$

$$\text{En plus} \quad \int \mathcal{X}_\varphi(x) \bar{\mathcal{X}}_\varphi(x) dx = \sum_{i=1}^r m_i^2.$$

Donc, si la représentation  $\varphi$  est réductible,

$$\int \mathcal{X}_\varphi(x) \bar{\mathcal{X}}_\varphi(x) dx > 1.$$

Nous avons utilisé exactement ces identités pour dériver la série de Clebsch-Gordon de  $SU(2)$  en mécanique quantique.

- Même si ici (pour plus de simplicité) nous n'avons considéré que des représentations à dimension finie, aussi les représentations unitaires à dimension infinie sont complètement réductibles.
- En plus toutes les représentations irréductibles d'un groupe compact ont une dimension finie.
- On peut encore montrer (Pontrjagin [8]) que les fonctions  $\varphi_{ij}$  ne sont pas seulement orthogonaux mais ils forment une base de l'espace  $L^2(G)$ , des fonctions carré-intégrables sur le groupe compact  $G$ .

De même les caractères forment une base des fonctions sur les classes.

Cela mène à l'analyse harmonique sur les groupes et sur les espaces homogènes de la forme  $\frac{G}{H}$ .

**Exemples bien connus :** Les fonctions  $e^{in\alpha}$  forment une base de  $\mathcal{S}^1 = \mathcal{U}(1)$ . Les fonctions  $Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = D_{m0}^{(\ell)}(\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{n})$  forment une base des fonctions sur l'espace homogène  $\mathcal{S}^2 = \frac{\text{SO}(3)}{\text{SO}(2)}$ .

### Définition 3.8 Représentation régulière

Soit  $G$  un groupe compact et  $\mathcal{F}(G)$  l'algèbre de toutes les fonctions continues (complexes) sur  $G$ . La **représentation régulière** de  $G$  est

$$R : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}(G)) : f \mapsto {}_a^{-1}f \quad \text{ou} \quad {}_a^{-1}f(x) = f(a^{-1}x).$$

**Proposition 3.4** La représentation régulière d'un groupe compact contient toute représentation irréductible autant de fois qu'est sa dimension.

**Preuve 40** Pour démontrer ceci nous utilisons le théorème de Pontrjagin [8] que les éléments de matrice  $A_{ij}(x)$  des représentations irréductibles, inéquivalentes forment une base de l'espace  $L^2(G)$ .

Soit  $x \rightarrow A(x)$  une représentation irréductible de  $G$ . Comme tous les éléments de matrices  $\bar{A}_{ij}(x)$  sont des fonctions orthogonales je peux choisir une base sur  $\mathcal{F}(G)$  qui les contient.

Sur cette base

$$(R(a)\bar{A})(x)_{ij} = \bar{A}_{ij}(a^{-1}x) = \sum_{\ell} \bar{A}_{i\ell}(a^{-1})\bar{A}_{\ell j}(x).$$

Pour  $j$  fixé nous posons  $e_i(x) = \bar{A}_{ij}(x)$ . Soit  $v(x) = \sum_i v_i e_i(x)$ . Alors

$$\begin{aligned} (R(y)v)(x) &= v(y^{-1}x) = \sum_i v_i e_i(y^{-1}x) \\ &= \sum_{i\ell} v_i \bar{A}_{i\ell}(y^{-1}) e_{\ell}(x) \quad \underbrace{=}_{A \text{ est unitaire}} \sum_{\ell} \left( \sum_i A_{\ell i}(y) v_i \right) e_{\ell}(x). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{V}_j = \left\{ v(x) = \sum_i v_i e_i(x) \mid v_i \in \mathbb{C} \right\}$$

porte la représentation irréductible  $A$ . Nous pouvons former autant d'espace  $\mathcal{V}_j$  que  $A$  possède des colonnes et ils sont tous orthogonaux.

Comme les fonctions  $A_{ij}$  engendrent l'espace  $\mathcal{F}(G)$  la somme directe

$$\bigoplus_{\{A\}} (\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_\alpha) = \mathcal{F}(G).$$

Ici la première somme porte sur toutes les représentations irréductibles inéquivalentes  $A$ , et  $\alpha$  est la dimension de  $A$ .  $\square$

### 3.3 Certains résultats supplémentaires pour groupes finis

Soit  $G = \{x_1, \dots, x_{n_G}\}$  un groupe fini, muni de la topologie  $\mathcal{P}(G)$  (tout sous-ensemble de  $G$  est ouvert) et toute fonction sur  $G$  est continue. Une base évidente de l'espace vectoriel des fonctions sur  $G$  est donnée par les éléments

$$\delta_i(x) := \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la dimension de l'espace des fonctions sur  $G$ , dénommé  $\mathcal{F}(G)$  est égale à  $n_G = \dim \mathcal{F}(G)$ .

**Proposition 3.5** *Un groupe fini  $G$  à  $n_G$  éléments et  $n_C$  classes de conjugaison a  $n_C$  représentations irréductibles inéquivalentes à dimensions  $d_1, d_2, \dots, d_{n_C}$  avec*

$$\sum_{i=1}^{n_C} d_i^2 = n_G.$$

**Preuve 41** *La dernière équation est une conséquence du premier énoncé et de la proposition 3.4. Il faut donc encore montrer le premier énoncé.*

*Nous considérons l'ensemble des fonctions sur les classes. D'après ce que nous avons dit, les caractères de toutes les représentations irréductibles inéquivalentes forment une base orthonormée sur cette algèbre. Mais aussi les  $n_C$  fonctions  $\delta_{[x]}$  définies par*

$$\delta_{[x]}(y) = \begin{cases} 1 & y \in [x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*forment une base, donc ils ont les deux le même nombre d'éléments.*  $\square$



### Définition 3.9 Représentations d'une algèbre

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre sur  $\mathbb{C}$ . Une **représentation** de  $\mathcal{A}$  est une application

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \text{end}(V) : a \mapsto \varphi(a)$$

telle que

$$\varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b) \quad \text{et} \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

$\text{end}(V)$  = les endomorphismes sur un espace vectoriel  $V$ .

### Définition 3.10 Algèbre de groupe

Pour un groupe  $G$  donné nous définissons l'**algèbre du groupe**,  $\mathcal{A}(G)$ , comme les combinaisons linéaires abstraites de la forme

$$a = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad x_i \in G, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Le produit est défini par

$$(b = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i) \quad a \cdot b = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(n,m)} \lambda_i \mu_j x_i y_j.$$

**Proposition 3.6** Une représentation d'un groupe  $G$  est irréductible si et seulement si la représentation correspondante sur l'algèbre du groupe,  $\mathcal{A}(G)$ , est irréductible.

**Preuve 42** soit  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  irréductible (c'est-à-dire, il n'existe pas de **vrai** sous-espace  $W \subset V$  avec  $\varphi(x)W \subset W \forall x \in G$ . Alors ceci est aussi vrai pour l'algèbre  $\mathcal{A}(G)$  parce que  $G \subset \mathcal{A}(G)$ .

Soit  $\varphi : \mathcal{A}(G) \rightarrow \text{end}(V)$  irréductible. Supposons  $\varphi$  réduit sur le groupe  $G \subset \mathcal{A}(G)$  ne le soit pas. Il existe alors un **vrai** sous-espace  $W \subset V$  avec  $\varphi(x)W \subset W \forall x \in G$ .

$$\text{Donc} \quad \varphi(\lambda x + \mu y)W \subset \lambda \varphi(x)W + \mu \varphi(y)W \subset W$$

pour tout  $a = \lambda x + \mu y \in \mathcal{A}(G)$ . De même pour des éléments avec plus que deux termes.  $\square$

La représentation régulière correspond à la représentations de l'algèbre du groupe par simple multiplication de gauche : Pour  $a \in \mathcal{A}(G)$  nous pouvons écrire

$$a = \sum_{x \in G} \lambda(x)x, \quad \text{où } \lambda(x) \text{ est une fonction sur } G.$$

La représentation régulière applique  $R(y)\lambda(x) = \lambda(y^{-1}x)$ . Donc

$$R(y)a = \sum_{x \in G} \lambda(y^{-1}x)x = \sum_{z \in G} \lambda(z)yz = y \cdot a \quad \forall y \in G. \quad (3.2)$$

Pour  $b \in \mathcal{A}(G)$ ,  $b = \sum_{z \in G} \mu(z)z$  nous posons

$$R(b)a = \sum_{z \in G} \mu(z)R(z)a.$$

De cette manière toute représentation d'un groupe sur un espace linéaire peut être étendue à une représentation de l'algèbre du groupe. Cette représentation de l'algèbre du groupe sur elle-même est souvent aussi appelée la représentation régulière et elle satisfait évidemment aussi aux propositions 3.4 et 3.5.

### Définition 3.11 Idéal

Soit  $J \subset \mathcal{A}$  une sous-algèbre d'une algèbre  $\mathcal{A}$ .  $J$  est appelé **idéal à gauche** si  $\mathcal{A} \cdot J \subset J$ .

Un idéal  $J$  est appelé **minimal** s'il n'existe pas de vrais sous-idéaux  $J_1, J_2$  tels que  $J_1 \oplus J_2 = J$  et  $J_1 \neq \{0\}$ ,  $J_2 \neq \{0\}$ .

**Proposition 3.7** L'algèbre de groupe peut être décomposée en idéaux à gauche minimaux,  $J_1, J_2, \dots, J_n$  tels que  $J_1 \oplus \dots \oplus J_n = \mathcal{A}$  et sur chacun des idéaux  $J_\ell$  la représentation régulière est irréductible.

**Preuve 43** La preuve est une simple conséquence des prop. 3.4 et 3.5 appliquées sur la représentation régulière :

Soit  $\mathcal{A}(G) = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$  la décomposition de  $\mathcal{A}(G)$  en sous-espaces qui sont irréductibles par rapport à la représentation régulière. Alors

$$a \cdot J_\ell \subset J_\ell \quad \forall a \in \mathcal{A}(G),$$

ce qui montre que  $J_\ell$  est un idéal de gauche. En plus,

$$\text{soit } J_\ell = I_1 \oplus I_2, \quad I_1 \text{ et } I_2 \text{ idéaux,}$$

$$\text{alors } aI_1 \subset I_1 \text{ et } aI_2 \subset I_2 \quad \forall a \in \mathcal{A}(G)$$

ce qui est possible seul pour  $I_1 = J_\ell$  ou  $I_2 = J_\ell$  parce que  $J_\ell$  est irréductible.

□

Soit  $e \in G$  l'identité et  $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$  la décomposition de  $e$  par rapport aux  $J_i$  pour  $x \in \mathcal{A}(G)$  nous avons alors

$$x = xe = xe_1 + xe_2 + \dots + xe_n, \quad xe_i \in J_i.$$

Ceci représente la décomposition de  $x$  en ces parties dans  $J_i$ . Comme cette décomposition est unique, il suit que  $e_i e_j = 0$  si  $i \neq j$ . Donc pour  $x = e_i$  nous obtenons  $e_i = e_i^2$ . Alors

$$e_i = e_i^2 \quad \text{et} \quad e_i \cdot e_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

De tels éléments  $e_j$  sont appelés des idem-potents normaux primitifs (le dernier parce que les  $J_i$  sont minimaux).

Pour tout  $x \in \mathcal{A}(G)$  il est aussi clair que

$$xe_j \in J_j \quad \text{et} \quad xe_j = x \quad \text{si} \quad x \in J_j.$$

La multiplication avec  $e_j$  (de droite) correspond alors à la projection sur l'idéal  $J_j$  (de gauche).

Nous avons donc le résultat suivant :

**Théorème 3.5** *Soit  $G$  un groupe fini et  $\mathcal{A}(G)$  l'algèbre du groupe. Cette algèbre peut être décomposée dans des idéaux (à gauche) minimaux,*

$$\mathcal{A}(G) = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$$

qui ont des dimensions  $d_1, \dots, d_n$ .

Dans cette décomposition il y a  $n_G$  idéaux inéquivalents ( $n_G =$  le nombre de classes) et chaque idéal de dimension  $d_j$  apparaît en  $d_j$  copies équivalents, en plus

$$\sum_{j=1}^{n_G} d_j^2 = n_G$$

où nous comptons chaque "classe" d'idéaux équivalents qu'une fois.

**Remarque :** Au lieu d'écrire  $\mathcal{A} = J_1 \oplus \dots \oplus J_n$  avec des idéaux  $J_j = \mathcal{A} \cdot e_j$  à gauche on aurait aussi pu décomposer  $\mathcal{A}$  en idéaux à droite,  $\mathcal{A} = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$  où  $R_j = e_j \cdot \mathcal{A}$  sont des idéaux à droite. On peut même démontrer qu'une telle algèbre (semi-simple) se laisse décomposer en idéaux à deux côtés :

$$A_i \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot A_i = A_i \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n,$$

où les  $A_i$  sont des idéaux minimaux, ne contiennent plus d'autres idéaux (de deux côtés); ceci sont des algèbres **simples**.

Cette remarque est résumée dans la proposition suivante :

**Proposition 3.8** *Toute algèbre semi-simple (i.e. somme directe d'idéaux minimaux à gauche) est aussi une somme directe d'idéaux à droite et une somme directe d'idéaux aux deux côtés (appelés simplement idéaux) :*

$$\mathcal{A} = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n \quad (\text{idéaux gauches})$$

$$\mathcal{A} = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n \quad (\text{idéaux droites})$$

$$\mathcal{A} = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m \quad (\text{idéaux aux deux côtés})$$

$$L_i = \mathcal{A}e_i \quad , \quad R_i = e_i\mathcal{A}$$

$$A_i A_j = \{0\} \quad \text{si } i \neq j \quad , \quad A_i^2 = A_i$$

**Preuve 44** *Soit comme avant  $e \in G$  l'identité. Donc  $e = e_1 + \dots + e_n$ , avec  $e_i \in L_i$ , unique,  $e_i e_j = 0$  pour  $i \neq j$  et  $e_i^2 = e_i$ . Soit  $a \in L_j$ . Alors*

$$a = a \cdot e = \underbrace{a \cdot e_1}_{\ni L_1} + \underbrace{a \cdot e_2}_{\ni L_2} + \dots + \underbrace{a \cdot e_j}_{\ni L_j} + \dots + \underbrace{a \cdot e_n}_{\ni L_n}.$$

*Donc  $ae_i = 0 \forall i \neq j$  et  $ae_j = a$ .*

*Pour  $a \in \mathcal{A}$  quelconque, la somme*

$$a = a \cdot e = ae_1 + ae_2 + \dots + ae_n$$

*est la décomposition de  $a$  en composantes dans  $L_j$ . Nous voulons alors montrer que*

$$\mathcal{A} = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n \quad \text{avec } R_i = e_i\mathcal{A}$$

*est une décomposition de  $\mathcal{A}$  en idéaux minimaux à droite.*

*D'abord, les  $R_i$  sont des idéaux à droite parce que pour*

$$a \in \mathcal{A}, r \in R_i, r = e_i b \Rightarrow ra = e_i b a \in R_i.$$

*En plus, soit  $R' \subset R_i$  un idéal à droite. Alors  $R_i = R' \oplus R''$  et alors  $e_i = e'_i + e''_i$ , unique avec  $(e'_i)^2 = e'_i$ ,  $(e''_i)^2 = e''_i$  et  $e'_i \cdot e''_i = 0$ . Donc*

$$\{e_1, \dots, e'_i, e''_i e_{i+1}, \dots, e_n\}$$

*est un ensemble d'idempotents ( $e_\ell^2 = e_\ell$ ) orthogonaux, donc*

$$L_i = \underbrace{\mathcal{A}e'_i \oplus \mathcal{A}e''_i}_{L'_i \oplus L''_i}$$

*où  $L'_i$  et  $L''_i$  sont des idéaux à gauche, contrairement à l'hypothèse que les  $L_i$  serait minimaux. Pour montrer que  $\mathcal{A}$  peut être décomposée en idéaux (de*

deux côtés) supposons  $B \subset \mathcal{A}$  soit un tel idéal,  $B \neq \{0\}$ . Nous montrerons alors qu'il existe un autre idéal (deux côtés)  $B'$  tel que  $B \oplus B' = \mathcal{A}$ .

Comme  $\mathcal{A}$  peut être décomposée en idéaux à gauche, il existe un idéal à gauche  $L \subset \mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{A} = B \oplus L$ . Nous montrons que  $L$  est aussi un idéal à droite :

$$BL \subset B \cap L = \{0\}, \text{ donc } (LB)^2 = L(BL)B = \{0\}.$$

Alors  $LB \subset \mathcal{A}$  est un idéal nil-potent. Comme  $\mathcal{A}$  est semi-simple cela implique  $LB = \{0\}$  (exercice!).

Alors  $L\mathcal{A} = L(B \oplus L) = L^2 = L$ , donc  $L$  est un idéal (aux deux côtés).

Supposons maintenant que  $A_1 \subset \mathcal{A}$  soit un idéal minimal. Alors  $\mathcal{A} = A_1 \oplus A'_1$  ou aussi  $A'_1 \subset \mathcal{A}$  est un idéal. Induction par  $\dim \mathcal{A}$  implique que  $A'_1 = A_2 \oplus \dots \oplus A_m$  où Les  $A_j$  sont des idéaux minimaux de  $A'_1$ . Nous montrons que les  $A_j$  sont aussi des idéaux (minimaux) de  $\mathcal{A}$  : Soit

$$a \in \mathcal{A}, a = a_1 + a'_1, a_1 \in A_1, a'_1 \in A'_1 \quad b \in A_j \quad \text{alors}$$

$$ab = \underbrace{a_1 \cdot b}_{\in A_1} + \underbrace{a'_1 \cdot b}_{\in A_j}.$$

Mais comme aussi  $A'_1$  est un idéal  $a_1 b \in A_1 \cap A'_1 = \{0\}$ . Donc  $ab \in A_j$ . De même avec  $ba$ . Donc finalement

$$\mathcal{A} = A_1 \oplus \dots \oplus A_m \quad , \quad A_j \text{ idéaux (aux deux côtés).}$$

□

# Chapitre 4

## Application sur $SO(3)$ et $SU(2)$

### 4.1 La mesure de Haar sur $SU(2)$

Le groupe  $SU(2)$  est donné par

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \alpha = x_1 + ix_2, \beta = x_3 + ix_4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \right\} \equiv \mathbb{S}^3. \quad (4.1)$$

Ici l'équivalence  $SU(2) \equiv \mathbb{S}^3$  est une équivalence comme espaces topologiques ou, plus précisément comme variétés différentielles.

Comme on vérifie par simple calcul, la multiplication en  $SU(2)$  de

$$x = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 + iy_2 & y_3 + iy_4 \\ -y_3 + iy_4 & y_1 - iy_2 \end{pmatrix}$$

est équivalent à la multiplication du vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{S}^3$  avec la matrice

$$T(y) = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 \\ y_2 & y_1 & y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & y_2 \\ y_4 & y_3 & -y_2 & y_1 \end{pmatrix} \in SO(4).$$

$T(y)\mathbf{x} = \mathbf{z}$  avec  $z = x \cdot y$ . Ici les symboles non-gras indiquent les matrices de  $SU(2)$  et les symboles gras les vecteurs correspondants dans  $\mathbb{S}^3$ .

Mais la multiplication avec une matrice orthogonale laisse invariant la mesure de Lebesgues sur  $\mathbb{R}^4$  et donc la mesure de Haar sur  $SU(2)$  est donnée par la mesure sur  $\mathbb{S}^3$  qui est induite par la mesure de Lebesgues du  $\mathbb{R}^4$ .

Soit  $x \in SU(2)$  et  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^3$  le vecteur associé. En coordonnées sphériques

sur  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{x}$  est donné par

$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{avec } r = 1. \quad (4.2)$$

L'élément de longueur sur  $\mathbb{R}^4$  en coordonnées sphériques est est

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))$$

et l'élément de volume est

$$d^4x = r^3 \sin^2 \psi \sin \theta dr d\psi d\theta d\phi.$$

De cela on obtient la mesure induit sur  $\mathbb{S}^3$  en posant  $r = 1 = \text{constant}$ , donc

$$dv = \sin^2 \psi \sin \theta d\psi d\theta d\phi.$$

Ceci donne la mesure de Haar à une normalisation près. Il est facile de vérifier que

$$\int_{\mathbb{S}^3} dv = \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \psi \sin \theta = 2\pi^2. \quad (4.3)$$

Donc la mesure de Haar normalisée est

$$d\mu_{SU(2)} = \frac{1}{2\pi^2} \sin^2 \psi \sin \theta d\psi d\theta d\phi.$$

Nous voulons encore la spécialiser sur des fonctions qui ne dépendent que de la classe. Toute matrice  $x \in SU(2)$  peut être diagonalisée avec une matrice  $a \in SU(2)$  tel que

$$axa^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}.$$

Donc les classes sont déterminées par un nombre  $\alpha \in [0, \pi]$  et une fonction sur les classes ne dépend que de  $\alpha$ . Pour une matrice  $x$  exprimée en coordonnées sphériques on a

$$\cos \alpha = \text{tr}(x)/2 = x_1 = \cos \psi, \quad \alpha = \psi \quad (4.4)$$

Une fonction sur les classes ne dépend donc pas de  $\theta$  et  $\phi$ . L'intégration sur  $\phi$  et  $\theta$  donne un simple facteur  $4\pi$  et la mesure de Haar sur les classes devient

$$\int d\mu_{SU(2)} f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\psi \sin^2 \psi f(\psi). \quad (4.5)$$

## 4.2 Représentation des rotations sur les fonctions (particules sans spin)

Dans l'espace de Hilbert,  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ , une particule sans spin n'est pas représentée par un unique vecteur complexe  $\Psi \in \mathcal{H}$ , mais par un *rayon unitaire*, noté  $[\Psi]$  :

$$[\Psi] = \{e^{i\alpha}\Psi \mid \alpha \in \mathbb{R}, \} . \quad (4.6)$$

Un élément  $\Psi \in [\Psi]$  est appelé une *fonction d'onde*. Le produit scalaire entre deux fonctions d'onde  $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}$  est défini par l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\langle \Phi \Psi \rangle := \int d^3x \bar{\Phi}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) . \quad (4.7)$$

Evidemment,  $\langle \Phi, \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi \Phi \rangle}$ . De plus, nous avons les propriétés  $\langle \Phi, \Psi_1 + \Psi_2 \rangle = \langle \Phi, \Psi_1 \rangle + \langle \Phi, \Psi_2 \rangle$  et  $\langle \Phi_1 + \Phi_2, \Psi \rangle = \langle \Phi_1, \Psi \rangle + \langle \Phi_2, \Psi \rangle$ . Finalement, si  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\langle \Phi, a\Psi \rangle = a\langle \Phi, \Psi \rangle$  et  $\langle a\Phi, \Psi \rangle = \bar{a}\langle \Phi, \Psi \rangle$ .

Soit  $SO(n)$  le groupe des matrices  $n \times n$  orthogonales réelles, avec déterminantes 1, i.e.,  $R^T R = \mathbb{I}_n$  et  $\det R = 1$ . Pour chaque  $R \in SO(3)$ , on définit un opérateur  $\mathcal{U}(R) : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$  tel que

$$[\mathcal{U}(R)\Psi](\mathbf{x}) := \Psi(R^{-1}\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 . \quad (4.8)$$

L'opérateur  $\mathcal{U}(R)$  agit sur les fonctions, tandis que la transformation  $R$  agit sur les points de l'espace. Comme  $|\det R| = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle [\mathcal{U}(R)\Phi](\mathbf{x}), [\mathcal{U}(R)\Psi](\mathbf{x}) \rangle &= \langle \Phi(R^{-1}\mathbf{x}), \Psi(R^{-1}\mathbf{x}) \rangle \\ &= \int d^3x \bar{\Phi}(R^{-1}\mathbf{x})\Psi(R^{-1}\mathbf{x}) \\ &= \int d^3x \bar{\Phi}(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})|\det R| \\ &= \langle \Phi, \Psi \rangle . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ainsi, l'opérateur  $\mathcal{U}(R)$  est unitaire puisqu'il laisse le produit scalaire invariant. De plus, nous avons

$$[\mathcal{U}(R_1)\Psi](\mathbf{x}) = \Psi(R_1^{-1}\mathbf{x}) =: \tilde{\Psi}(\mathbf{x}) , \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \{\mathcal{U}(R_2)[\mathcal{U}(R_1)\Psi]\}(\mathbf{x}) &= [\mathcal{U}(R_2)\tilde{\Psi}](\mathbf{x}) = \tilde{\Psi}(R_2^{-1}\mathbf{x}) = \Psi(R_1^{-1}[R_2^{-1}\mathbf{x}]) \\ &= \Psi([R_2R_1]^{-1}\mathbf{x}) = [\mathcal{U}(R_2R_1)\Psi](\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

La propriété  $\mathcal{U}(R_2)\mathcal{U}(R_1) = \mathcal{U}(R_2R_1)$  implique que l'application  $\mathcal{U} : O(3) \rightarrow uni(\mathcal{H})$  est un homomorphisme. Ici  $uni(\mathcal{H})$  signifie le groupe d'opérateurs unitaires sur l'espace de Hilbert,  $\mathcal{H}$ . En autres termes,  $\mathcal{U}$  est une représentation de  $SO(3)$ .



**Définition 4.1** Chaque représentation  $\mathcal{D}$  d'un groupe de Lie  $\mathcal{G}$  induit une représentation  $\mathcal{D}_*$  de l'algèbre de Lie correspondante,  $\mathcal{G}$ . Pour  $A \in \mathcal{G}$ , elle est donnée par

$$\mathcal{D}(e^{At}) = e^{\mathcal{D}_*(A)t}, \quad \text{donc} \quad \mathcal{D}_*(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{D}(e^{At}). \quad (4.12)$$

Nous voulons maintenant déterminer la représentation  $\mathcal{U}_*$  sur l'algèbre de Lie  $so(3)$  du groupe  $SO(3)$  induite par  $\mathcal{U}$ . Pour ceci, nous avons besoin des sous-groupes (additifs) à un paramètre de  $SO(3)$ <sup>1</sup>; ce sont les rotations d'angle  $\alpha$  autour d'une direction  $\mathbf{e}$  fixée ( $|\mathbf{e}|^2 = 1$ ). Nous les dénotons  $\{\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ . On a (exercice)

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)\mathbf{x} = \cos \alpha \mathbf{x} + [1 - \cos \alpha](\mathbf{e} \cdot \mathbf{x})\mathbf{e} + \sin \alpha \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}. \quad (4.13)$$

Les  $\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)$  forment un groupe additif en  $\alpha$ . En effet, nous avons<sup>2</sup>

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha + \beta) = \mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)\mathcal{R}(\mathbf{e}, \beta) = \mathcal{R}(\mathbf{e}, \beta)\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha). \quad (4.14)$$

Ceci nous permet de définir

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha + \epsilon) - \mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\mathcal{R}(\mathbf{e}, \epsilon) - \mathcal{R}(\mathbf{e}, 0)] \mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha) \\ &= \Omega \mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha), \end{aligned} \quad (4.15)$$

où

$$\Omega = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha) \right|_{\alpha=0} \quad \text{et, avec (4.13),} \quad \Omega \mathbf{x} = \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}. \quad (4.16)$$

Ainsi, on a  $\Omega = \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}$  avec  $(I_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk}$ , où  $\epsilon_{ijk}$  dénote le tenseur antisymétrique à trois indices. Explicitement, nous avons

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

<sup>1</sup>Nous avons vu que tout sous-groupe additif à un paramètre dans un groupe de Lie est de la forme  $R(s) = \exp(As)$  pour un élément  $A$  dans l'algèbre de Lie, et donc  $\left. \frac{d}{ds} R(s) \right|_{s=0}$  est un élément de l'algèbre de Lie.

<sup>2</sup>Nous rappelons que les rotations autour d'un axe fixe forment un groupe abélien,  $SO(2)$ .

L'équation (4.15) implique que  $\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha) = \exp(\alpha \mathbf{e} \cdot \mathbf{I})$ . Les  $I_j$  sont les générateurs infinitésimaux des rotations autour de l'axe  $\mathbf{e}_j$ . Ils forment une base de l'algèbre de Lie  $so(3)$  du groupe  $SO(3)$ . Ainsi, ils satisfont aux relations de commutation

$$[I_i, I_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} I_k, \quad (4.18)$$

$$[\mathbf{e} \cdot \mathbf{I}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}] = (\mathbf{e} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{e}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.19)$$

Le groupe  $\{\mathcal{U}(\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  est un groupe unitaire à un paramètre. Or, d'après le théorème de Stone<sup>3</sup>, il existe un opérateur auto-adjoint  $L(\mathbf{e})$  tel que

$$L(\mathbf{e})\Psi = i\hbar \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{U}(\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)) \right|_{\alpha=0} \Psi \quad (4.20)$$

dans le domaine de  $L(\mathbf{e})$ . On a donc

$$\mathcal{U}(\mathcal{R}(\mathbf{e}, \alpha)) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \alpha L(\mathbf{e})\right). \quad (4.21)$$

Si  $\Psi(\mathbf{x})$  est une fonction d'onde différentiable, on a

$$\begin{aligned} L(\mathbf{e})\Psi(\mathbf{x}) &= i\hbar \left. \frac{d}{d\alpha} \Psi(\mathbb{R}^{-1}(\mathbf{e}, \alpha)\mathbf{x}) \right|_{\alpha=0} \\ &= -i\hbar [\nabla \Psi(\mathbf{x})] \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{e} \cdot \left( \mathbf{x} \wedge \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

ce qui implique

$$L(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} \quad \text{où} \quad \mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \frac{\hbar}{i} \nabla. \quad (4.23)$$

Ce résultat peut aussi être dérivé par une application naïve de la règle de correspondance,  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$ , où  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  désignent respectivement le moment cinétique orbital d'une particule, sa position et son impulsion.

Ainsi, comme en mécanique classique, nous avons une relation entre le moment cinétique orbital et des rotations infinitésimales. Le moment cinétique (orbital) est le générateur des rotations.

---

<sup>3</sup>**Théorème de Stone :** Soit  $\{\mathcal{U}_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires (fortement continu) sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  (donc  $\mathcal{U}_t \mathcal{U}_s = \mathcal{U}_{t+s}$ ). Alors, il existe un opérateur auto-adjoint  $A$  sur  $\mathcal{H}$  tel que  $A\Psi = -i \left. \frac{d}{dt} \mathcal{U}_t \Psi \right|_{t=0}$  et  $\mathcal{U}_t = \exp(iAt)$  sur le domaine de définition de  $A$ . Pour plus de détails et la démonstration, cf. [9], chap. VIII, section 4.

La représentation  $\mathcal{U}_*$  induite sur  $o(3)$  est alors donnée par

$$L_j = i\hbar\mathcal{U}_*(I_j) . \quad (4.24)$$

Les règles de commutation des  $I_j$  sont héritées par les  $L_j$  :

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k . \quad (4.25)$$

On peut facilement vérifier ce dernier résultat directement en appliquant (4.23) sur les fonctions d'onde différentiables.

Si un système est invariant sous rotation (par exemple, une particule dans un potentiel à symétrie sphérique), l'hamiltonien commute avec tous les  $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ . Il s'ensuit que

$$[\mathcal{H}, \mathbf{L}] = 0 \quad : \text{invariance sous rotation.} \quad (4.26)$$

Alors, les  $L_i$  sont invariants par rapport à une évolution temporelle ; ils sont conservés :

$$\mathbf{L}\Psi_t = \mathbf{L}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\Psi_0 = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\mathbf{L}\Psi_0 . \quad (4.27)$$

On peut en conclure qu'un espace propre de l'hamiltonien avec valeur propre  $E$  "réduit" la représentation  $\mathcal{U}(\mathcal{R})$  sur  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ , puisque le sous-espace de chaque valeur propre de  $\mathcal{H}$  est invariant par rapport aux rotations (voir exercices).

### 4.3 Les représentations irréductibles du groupe des rotations

Dans cette section nous voulons construire les représentations unitaire irréductibles de  $SO(3)$ . Une représentation (unitaire quelconque  $\mathcal{D}$  sur un espace linéaire  $\mathcal{E}$  peut alors être décomposée de la forme  $\mathcal{E} = W^1 \oplus W^2 \oplus \dots \oplus W^n$ , où les  $W^j$  portent des représentations irréductibles  $\mathcal{D}^j$  de  $G$ . Dans une base orthonormée de  $\mathcal{E}$  adaptée à cette décomposition, la matrice qui représente un automorphisme  $\mathcal{D}(g)$  est composée des blocs :

$$\mathcal{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^2(g) & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{D}^n(g) \end{pmatrix} . \quad (4.28)$$

Pour construire les représentations irréductibles de  $SO(3)$  (qui est bien sûr un groupe compact, exercice!), nous considérons d'abord une représentation

$\mathcal{D}_*$  de l'algèbre de Lie  $so(3)$  sur un espace vectoriel  $\mathcal{E}$  à dimension finie. Les matrices  $(I_j)_{j=1}^3$  forment une base de  $so(3)$  et nous posons

$$\mathcal{D}_*(I_j) = (i\hbar)^{-1}L_j . \quad (4.29)$$

Nous définissons encore

$$\mathbf{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 , \quad (4.30)$$

$$L_{\pm} := L_1 \pm iL_2 . \quad (4.31)$$

En utilisant les relations de commutation (4.25) pour les composantes  $L_j$ , il est facile de vérifier que

$$[\mathbf{L}^2, L_j] = 0 = [\mathbf{L}^2, L_{\pm}] , \quad (4.32)$$

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} , \quad (4.33)$$

$$L_{\pm}L_{\mp} = \mathbf{L}^2 - L_3^2 \pm \hbar L_3 . \quad (4.34)$$

Comme  $\mathbf{L}^2$  est un opérateur hermitien,  $\mathbf{L}^2$  se laisse diagonaliser par une matrice unitaire. Il existe donc une base orthonormée de vecteurs propres de  $\mathbf{L}^2$ . Comme  $\mathbf{L}^2$  et  $L_3$  commutent, les espaces propres de  $\mathbf{L}^2$  de valeur propre  $\lambda$  sont invariants sous  $L_3$  : soit  $\psi$  un vecteur propre de  $\mathbf{L}^2$  avec valeur propre  $\lambda$ , alors  $\mathbf{L}^2 L_3 \psi = L_3 \mathbf{L}^2 \psi = \lambda L_3 \psi$ . Il s'ensuit que  $L_3 \psi$  est aussi vecteur propre de  $\mathbf{L}^2$  avec valeur propre  $\lambda$ . Comme  $L_3$  est aussi un opérateur hermitien, nous pouvons le diagonaliser dans chacun des espaces propres de  $\mathbf{L}^2$  et obtenons de cette façon une base de  $\mathcal{E}$  dans laquelle  $\mathbf{L}^2$  et  $L_3$  sont les deux diagonales. Soit  $\psi_{\max}$  un vecteur propre normalisé de  $L_3$  et de  $\mathbf{L}^2$ ,

$$L_3 \psi_{\max} = \hbar b \psi_{\max} , \quad \mathbf{L}^2 \psi_{\max} = \hbar^2 a \psi_{\max} , \quad (4.35)$$

où  $\hbar b$  est la valeur propre maximale de l'opérateur  $L_3$ . Comme  $\mathbf{L}^2 \geq L_3^2$ , nous avons  $a \geq b^2 \geq 0$ . En combinant (4.33) et (4.35), nous obtenons

$$L_3 L_+ \psi_{\max} = L_+ L_3 \psi_{\max} + \hbar L_+ \psi_{\max} = \hbar(b+1)L_+ \psi_{\max} . \quad (4.36)$$

Donc  $L_+ \psi_{\max}$  est soit un vecteur propre de  $L_3$  avec valeur propre  $\hbar(b+1) > \hbar b$ , soit nulle. Or, comme nous avons supposé que  $\hbar b$  est la valeur propre maximale de l'opérateur  $L_3$ , ceci implique que  $L_+ \psi_{\max} = 0$ . D'après (4.34),

$$\mathbf{L}^2 = L_3^2 + L_+ L_- - \hbar L_3 , \quad (4.37)$$

$$= L_3^2 + L_- L_+ + \hbar L_3 . \quad (4.38)$$

En appliquant Eq. (4.38) à  $\psi_{\max}$ , nous obtenons

$$\hbar^2 a \psi_{\max} = \mathbf{L}^2 \psi_{\max} = (L_3^2 + \hbar L_3) \psi_{\max} = (\hbar^2 b^2 + \hbar^2 b) \psi_{\max} , \quad (4.39)$$

donc  $a = b(b + 1)$ . Nous agissons maintenant avec  $L_-$  sur  $\psi_{\max}$  et trouvons

$$L_3 L_- \psi_{\max} = L_- L_3 \psi_{\max} - \hbar L_- \psi_{\max} = \hbar(b - 1) L_- \psi_{\max} . \quad (4.40)$$

Donc  $L_- \psi_{\max}$  est un vecteur propre de  $L_3$  avec valeur propre  $\hbar(b - 1)$ . En continuant ainsi, on obtient que  $(L_-)^n \psi_{\max}$  est soit vecteur propre de  $L_3$  avec valeur propre  $\hbar(b - n)$ , soit identiquement nul. Comme  $L_3$  possède une valeur propre minimale, il doit exister un  $n$  maximal, tel que  $(L_-)^{n+1} \psi_{\max} = 0$ . En utilisant Eq. (4.37), nous trouvons

$$\begin{aligned} \hbar^2 a (L_-)^n \psi_{\max} &= (L_-)^n \mathbf{L}^2 \psi_{\max} = \mathbf{L}^2 (L_-)^n \psi_{\max} = [L_3^2 - \hbar L_3] (L_-)^n \psi_{\max} \\ &= \hbar^2 [(b - n)^2 - (b - n)] (L_-)^n \psi_{\max} . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Donc  $a = b(b + 1) = (b - n)^2 - b + n$ , i.e.,  $b = n/2 \equiv \ell$ . Ainsi,  $\ell$  ne peut prendre que des valeurs entières ou demi-entières.

Pour la suite, nous posons

$$\psi_{\max} = \psi_\ell \quad \text{et} \quad \frac{(L_-)^n \psi_{\max}}{|(L_-)^n \psi_{\max}|} = \psi_{\ell-n} . \quad (4.42)$$

Nous trouvons alors  $\forall 0 \leq n \leq 2\ell$

$$L_3 \psi_{\ell-n} = \hbar(\ell - n) \psi_{\ell-n} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^2 \psi_{\ell-n} = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \psi_{\ell-n} . \quad (4.43)$$

Evidemment, l'espace linéaire engendré par les vecteurs normalisés  $\psi_{\ell-n}$  avec  $0 \leq n \leq 2\ell$ , porte une représentation irréductible de  $so(3)$  de dimension  $2\ell + 1$ . Elle est irréductible parce qu'on peut obtenir tous les vecteur de base  $\psi_m$  en appliquant  $L_-$  sur  $\psi_\ell$  (ou en appliquant  $L_+$  sur  $\psi_{-\ell}$ ).

Les vecteurs  $\psi_{\ell-n}$  forment une base orthonormée. En effet, ils sont des vecteurs propres de l'opérateur hermitien  $L_3$  avec des valeurs propres différentes, et sont donc orthogonaux. De plus, toutes les représentations irréductibles de  $so(3)$  de dimension finie sont de cette forme pour un  $\ell \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ .

Il nous reste à déterminer lesquelles de ces représentations peuvent être "levées" à une représentation du groupe  $SO(3)$ . Nous allons voir dans la section 6.1 que seulement les  $\ell$  entiers correspondent aussi à une représentation de  $SO(3)$ .

### 4.3.1 Les harmoniques sphériques

Dans cette section, nous construisons explicitement les représentations  $\mathcal{D}^\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , sur l'espace des fonctions sur la sphère,  $\mathbb{S}^2$ . Pour un  $\ell$  donné, nous cherchons d'abord des fonctions  $\psi_{\ell,m}(r, \vartheta, \varphi)$  sur  $\mathbb{R}^3$  telles que

$$\begin{cases} \mathbf{L}^2 \psi_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell + 1) \psi_{\ell,m} , \\ L_3 \psi_{\ell,m} = \hbar m \psi_{\ell,m} , \end{cases} \quad \text{avec} \quad -\ell \leq m \leq \ell . \quad (4.44)$$

D'après (4.23), nous avons  $\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{x} \wedge \nabla$ . Nous exprimons cette identité en coordonnées sphériques, avec la notation

$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta \partial_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \partial_\varphi, \quad (4.46)$$

où  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$  sont les vecteurs unitaires en directions  $r, \vartheta$  et  $\varphi$  :

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

En combinant ces expressions, nous obtenons

$$\mathbf{L} = i\hbar \begin{pmatrix} \cos \varphi \cot \vartheta \partial_\varphi + \sin \varphi \partial_\vartheta \\ \sin \varphi \cot \vartheta \partial_\varphi - \cos \varphi \partial_\vartheta \\ -\partial_\varphi \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Donc  $L_3 = i\hbar \partial_\varphi$  et les opérateurs  $\mathbf{L}^2$  et  $L_\pm$  sont

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \right] = -\hbar^2 r^2 \Delta_{\vartheta\varphi}, \quad (4.49)$$

$$L_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi} [\pm \partial_\vartheta + i \cot \vartheta \partial_\varphi]. \quad (4.50)$$

Ces expressions nous permettent de rechercher les fonctions  $\psi_{\ell,m}(r, \vartheta, \varphi)$  qui sont solutions des Eq. (4.44), i.e., qui satisfont au système d'équations

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \psi_{\ell,m}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \psi_{\ell,m} = -\ell(\ell+1) \psi_{\ell,m}, \quad (4.51)$$

$$-i \partial_\varphi \psi_{\ell,m} = m \psi_{\ell,m}. \quad (4.52)$$

Dans ces équations, la variable  $r$  n'apparaît dans aucun opérateur différentiel ; on peut donc considérer  $r$  comme un paramètre et décomposer les fonctions propres  $\psi_{\ell,m}(r, \vartheta, \varphi)$  sous la forme

$$\psi_{\ell,m}(r, \vartheta, \varphi) = f(r) Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi), \quad (4.53)$$

où  $f(r)$ , la fonction radiale, apparaît comme un facteur constant dans les équations aux dérivées partielles (4.51)–(4.52). Les fonctions  $Y_{\ell,m}$  sont des fonctions sur la sphère, que nous choisissons normalisées telles que

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi |Y_{\ell,m}|^2 = 1. \quad (4.54)$$

On les appelle les **harmoniques sphériques**.

Avec cette décomposition, le système d'équations se réduit à

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_{\vartheta} (\sin \vartheta \partial_{\vartheta} Y_{\ell, m}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_{\varphi}^2 Y_{\ell, m} = \ell(\ell + 1) Y_{\ell, m} , \quad (4.55)$$

$$-i \partial_{\varphi} Y_{\ell, m} = m Y_{\ell, m} . \quad (4.56)$$

La dernière équation implique immédiatement

$$Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) = g(\vartheta) e^{im\varphi} . \quad (4.57)$$

Ceci implique que  $m \in \mathbb{Z}$  pour que les fonctions  $Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi)$  soient bien définies. Or, comme nous savons que  $m$  et  $\ell$  sont soit tous deux entiers, soit tous deux demi-entiers, il s'ensuit que  $\ell$  aussi ne peut être qu'entier.

Nous essayons un "Ansatz" de la forme

$$Y_{\ell, m}(\vartheta, \varphi) = \frac{c_{\ell, m}}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_{\ell}^m(\mu) \quad \text{où} \quad \mu = \cos \vartheta . \quad (4.58)$$

Les  $c_{\ell, m}$  sont des constantes de normalisation. Si l'on utilise  $\frac{d}{d\mu} = -\sin \vartheta^{-1} \partial_{\vartheta}$ , Eq. (4.55) se réduit à

$$\left[ (1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d}{d\mu} + \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P_{\ell}^m(\mu) = 0 . \quad (4.59)$$

Ceci est l'équation différentielle pour les fonctions de Legendre associées. Pour  $m = 0$ , cette équation se réduit à l'équation différentielle pour les polynômes de Legendre,  $P_{\ell}$ . Dans les exercices, nous vérifierons que Eq. (4.59) est satisfaite par les fonctions

$$P_{\ell}^m(\mu) = \frac{(-1)^m}{2^{\ell} \ell!} (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{d\mu^{\ell+m}} (\mu^2 - 1)^{\ell} . \quad (4.60)$$

De cette expression, on peut facilement extraire une relation de récurrence,

$$P_{\ell}^{m+1}(\mu) = -\sqrt{1 - \mu^2} \left[ \frac{d}{d\mu} + \frac{m\mu}{1 - \mu^2} \right] P_{\ell}^m(\mu) . \quad (4.61)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \hbar^{-1} L_+ Y_{\ell, m} &= \frac{c_{\ell, m}}{\sqrt{2\pi}} e^{i(m+1)\varphi} [\partial_{\vartheta} - m \cot \vartheta] P_{\ell}^m(\mu) \\ &= -\frac{c_{\ell, m}}{\sqrt{2\pi}} e^{i(m+1)\varphi} \sqrt{1 - \mu^2} \left[ \frac{d}{d\mu} + \frac{m\mu}{1 - \mu^2} \right] P_{\ell}^m(\mu) \\ &= \frac{c_{\ell, m}}{\sqrt{2\pi}} e^{i(m+1)\varphi} P_{\ell}^{m+1}(\mu) \\ &= \frac{c_{\ell, m}}{c_{\ell, m+1}} Y_{\ell, m+1} . \end{aligned} \quad (4.62)$$

Pour déterminer les constantes de normalisation  $c_{\ell,m}$ , nous utilisons la normalisation des harmoniques sphériques,

$$1 = \langle Y_{\ell,m}, Y_{\ell,m} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \bar{Y}_{\ell,m} Y_{\ell,m} . \quad (4.63)$$

Avec Eq. (4.62), cette relation implique

$$\begin{aligned} \left| \frac{c_{\ell,m}}{c_{\ell,m+1}} \right|^2 &= \hbar^{-2} \langle L_+ Y_{\ell,m}, L_+ Y_{\ell,m} \rangle \\ &= \hbar^{-2} \langle Y_{\ell,m}, L_- L_+ Y_{\ell,m} \rangle \\ &= \hbar^{-2} \langle Y_{\ell,m}, [L^2 - L_3^2 - \hbar L_3] Y_{\ell,m} \rangle \\ &= \ell(\ell+1) - m(m+1) , \end{aligned} \quad (4.64)$$

donc

$$\hbar^{-1} L_+ Y_{\ell,m} = \frac{c_{\ell,m}}{c_{\ell,m+1}} Y_{\ell,m+1} = \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} Y_{\ell,m+1} . \quad (4.65)$$

En appliquant  $L_-$  sur cette équation et utilisant Eq. (4.38) nous obtenons

$$\hbar^2 [\ell(\ell+1) - m(m+1)] Y_{\ell,m} = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} L_- Y_{\ell,m+1} , \quad (4.66)$$

ce qui implique

$$L_- Y_{\ell,m+1} = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} Y_{\ell,m} . \quad (4.67)$$

Nous pouvons combiner les résultats (4.65)–(4.67) en

$$\boxed{L_\pm Y_{\ell,m} = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell,m \pm 1}} \quad (4.68)$$

Les constantes  $c_{\ell,\ell}$  peuvent être déterminées en appliquant l'opérateur  $L_+$  sur  $Y_{\ell,\ell}$ . En effet, l'identité  $L_+ Y_{\ell,\ell} = 0$  implique

$$[\partial_\vartheta - \ell \cot \vartheta] P_\ell^\ell(\cos \vartheta) = 0 , \quad (4.69)$$

avec solution

$$P_\ell^\ell = \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^\ell \ell!} \sin^\ell \vartheta . \quad (4.70)$$

Pour que  $Y_{\ell,\ell}$  soit normalisé, il faut que

$$\int_0^\pi d\vartheta c_{\ell,\ell}^2 |P_\ell^\ell|^2 \sin \vartheta = 1 . \quad (4.71)$$



Cette identité requiert (exercice),

$$c_{\ell,\ell} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{2(2\ell)!}} . \quad (4.72)$$

Nous avons donc trouvé

$$Y_{\ell,\ell} = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} \sin^\ell \vartheta e^{i\ell\varphi} . \quad (4.73)$$

En utilisant la relation de récurrence

$$c_{\ell,m-1} = c_{\ell,m} \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} , \quad (4.74)$$

nous pouvons déduire toutes les autres harmoniques sphériques,

$$\boxed{Y_{\ell,m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \cdot \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (4.75)$$

L'identité (dérivée dans les exercices)

$$P_\ell^{-m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m \quad (4.76)$$

implique finalement

$$\boxed{Y_{\ell,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \bar{Y}_{\ell,m}(\vartheta, \varphi)} \quad (4.77)$$

Aux ordres les plus bas, les harmoniques sphériques sont alors données par

$$\begin{aligned} \ell = 0 : \quad Y_{0,0}(\vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} , \\ \ell = 1 : \quad Y_{1,0}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta , \\ & Y_{1,1}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi} , \\ \ell = 2 : \quad Y_{2,0}(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} [3 \cos^2 \vartheta - 1] , \\ & Y_{2,1}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} , \\ & Y_{2,2}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi} . \end{aligned} \quad (4.78)$$

## 4.4 Série de Clebsch-Gordan et le caractère d'une représentation

### 4.4.1 Preuve intuitive du théorème de Clebsch-Gordan

Comme nous le démontrons dans la section 6.1, le recouvrement universel du groupe des rotation et le groupe  $SU(2)$  et chaque système de la mécanique quantique qui est invariant sous rotation porte alors une représentation du groupe  $SU(2)$  qui est de la form  $\mathcal{D}^j$  pour un  $j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$ . Seul si  $j \in \mathbb{N}_0$ , ceci est aussi une représentation de  $SO(3)$ .

En physique, nous considérons souvent la combinaison de deux systèmes (deux électrons autour un noyau dans un atome, *etc.*). Celle-ci est décrite par (une partie du) le produit tensoriel des espace de Hilbert des deux systèmes. Si le premier système porte la représentation  $\mathcal{D}^{j_1}$  et le deuxième la représentation  $\mathcal{D}^{j_2}$ , le système combiné porte la représentation  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$ .

Si l'hamiltonien est invariant sous rotation, les niveaux d'énergie sont dégénérés dans les sous-espaces qui portent une représentation irréductible de  $SU(2)$ . Il est alors essentiel de trouver la décomposition irréductible du produit tensoriel  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$  de deux représentations irréductibles, i.e.,  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} \simeq \bigoplus_j m_j \mathcal{D}^j$ . Ici nous démontrons que

$$\boxed{\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} \mathcal{D}^j \quad \text{série de Clebsch-Gordan.} \quad (4.79)}$$

**Preuve :** Soient  $\mathcal{V}^{(j_1)}$  et  $\mathcal{V}^{(j_2)}$  deux espaces qui portent les représentations  $\mathcal{D}^{j_1}$  et  $\mathcal{D}^{j_2}$  du groupe  $SU(2)$ . L'espace  $\mathcal{V}^{(j_1)} \otimes \mathcal{V}^{(j_2)}$  porte alors  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$ . Soient  $(\phi_m^{(j_1)})$  et  $(\psi_m^{(j_2)})$  des bases canoniques de  $\mathcal{V}^{(j_1)}$  et  $\mathcal{V}^{(j_2)}$ . Donc les états  $(\phi_{m_1}^{(j_1)} \otimes \psi_{m_2}^{(j_2)})$  forment une base de  $\mathcal{V}^{(j_1)} \otimes \mathcal{V}^{(j_2)}$ . Pour calculer la valeur de  $L_3$  sur ces états nous utilisons

$$\begin{aligned} L_3^{(j_1 \otimes j_2)} &\equiv i\hbar (\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2})_* (I_3) = i\hbar \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} (\mathcal{D}^{j_1}(R_3(\alpha)) \otimes \mathcal{D}^{j_2}(R_3(\alpha))) \\ &= \left( L_3^{(j_1)} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes L_3^{(j_2)} \right) , \end{aligned}$$

ou  $R_3(\alpha)$  signifie la rotation avec angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ . Les super-scripts de  $L_3$  indiquent dans quelle espace l'opérateur  $L_3$  vit. Ils sont supprimés par la suite. Pour nos états de base ceci donne

$$L_3 \phi_{m_1}^{(j_1)} \otimes \psi_{m_2}^{(j_2)} = \hbar(m_1 + m_2) \phi_{m_1}^{(j_1)} \otimes \psi_{m_2}^{(j_2)} .$$

Donc l'état de base avec valeur propre de  $L_3$  maximale est  $\phi_{j_1}^{(j_1)} \otimes \psi_{j_2}^{(j_2)}$  avec valeur propre  $\hbar(j_1 + j_2)$ . Tous les autres états ont des valeurs propres inférieures. Donc  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$  contient  $D^{j_1+j_2}$  une et une seule fois.

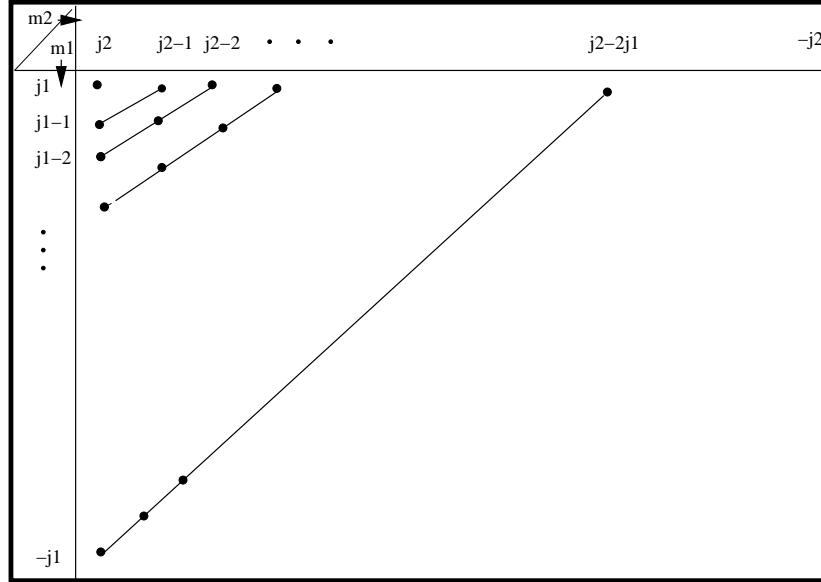


FIG. 4.1 – Une table pour les valeurs propres possibles de  $L_3$  pour  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$ . Dans l'exemple présenté,  $j_1 < j_2$ . Le long des diagonales indiquées, la valeur est  $m = j_1 + j_2 - k$ , avec  $k = 0$  pour le point tout en haut et  $k = k_{\text{lim}} = 2j_1$  pour la diagonale la plus basse.

En plus, l'espace des états avec valeur propre  $\hbar(j_1 + j_2 - 1)$  est bi-dimensionnel avec base  $\phi_{j_1-1}^{(j_1)} \otimes \psi_{j_2}^{(j_2)}$  et  $\phi_{j_1}^{(j_1)} \otimes \psi_{j_2-1}^{(j_2)}$ . Un de ces états contribue à la représentation  $D^{j_1+j_2}$ , mais l'autre doit faire partie d'une représentation  $D^{j_1+j_2-1}$ , qui doit aussi être présente une et une seule fois. Ça continue de cette façon (voir figure 4.1) et une après l'autre, la dimension de l'espace propre avec valeur propre  $\hbar(j_1 + j_2 - k)$  de  $L_3$  augmente par 1 et la représentation  $j = j_1 + j_2 - k$  doit être présente une seule fois, jusqu'à  $k = k_{\text{lim}} = 2 \min(j_1, j_2)$ . Pour  $k > k_{\text{lim}}$  la dimension de l'espace propre avec valeur propre  $\hbar(j_1 + j_2 - k)$  reste constante pendant  $2|j_1 - j_2|$  pas, pendant lesquelles  $m$  descend de  $\hbar|j_1 - j_2|$  jusqu'à  $-\hbar|j_1 - j_2|$ , et aucune nouvelle représentation est possible (voir figure 4.1). Après, la dimension commence à décroître un par un. La dernière représentation est donc celle avec  $j = j_1 + j_2 - k_{\text{lim}} = |j_1 - j_2|$ . Ceci complète la démonstration.  $\square$

Comme nous l'avons dit, la série de Clebsch-Gordan est très importante en Mécanique Quantique. Comme illustration nous considérons deux systèmes

avec des hamiltoniens  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  invariants sous rotation sur des espace de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ . Nous supposons que les états fondamentaux de ces systèmes portent les représentations irréductibles  $\mathcal{D}^{j_1}$  et  $\mathcal{D}^{j_2}$  de  $SU(2)$  sur des sous-espaces  $\mathcal{E}^{j_1} \subset \mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{E}^{j_2} \subset \mathcal{H}_2$ . Si nous ajoutons maintenant une interaction  $\mathcal{H}_{int}$  entre ces deux systèmes, les moments cinétiques  $\mathbf{J}^{(1)}$  et  $\mathbf{J}^{(2)}$  ne seront plus conservés individuellement, mais leur somme  $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)} + \mathbf{J}^{(2)}$  sera conservée. Et (si la perturbation  $\mathcal{H}_{int}$  est petite) on a

$$(\mathcal{E}, \mathcal{D}) = (\mathcal{E}^{j_1} \otimes \mathcal{E}^{j_2}, \mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}) = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} (\mathcal{E}^j, \mathcal{D}^j), \quad (4.80)$$

et tous les sous-espaces linéaires  $\mathcal{E}^j$  possèdent en général des énergies légèrement différentes (séparation des niveaux d'énergie).

Dans la suite de cette section je donne une preuve plus formelle pour (4.79), qui a besoin de plusieurs outils de la théorie de groupe qui ne sont pas développés dans ce cours. Cette partie s'adresse d'abord aux étudiants en physique théorique qui auront de toute façon besoin d'un cours/livre sur la théorie de groupe ou les notions utilisées ici sont traitées.

#### 4.4.2 Le caractère de $SU(2)$

La classe de conjugaison de  $SU(2)$  se détermine de la manière suivante. Pour  $U' \in SU(2)$ , il existe toujours une matrice  $V \in SU(2)$  telle que

$$U' = VU(\alpha)V^{-1} \quad \text{où} \quad U(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = U_3(2\alpha). \quad (4.81)$$

Il s'ensuit que chaque classe de conjugaison peut être représentée par une matrice de la forme de  $U(\alpha)$ . En plus, si on choisit

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

nous obtenons  $U'(\alpha) = VU(\alpha)V^{-1} = U(-\alpha)$ , i.e.,  $\chi_{\mathcal{D}}(U(-\alpha)) = \chi_{\mathcal{D}}(U(\alpha))$ .

L'intégration invariante de  $SU(2)$  sur les classes est donnée par (4.5),  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha$ . Donc  $\mathcal{D}$  est une représentation irréductible de  $SU(2)$  si et seulement si

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha |\chi_{\mathcal{D}}(U(\alpha))|^2 = 1. \quad (4.83)$$

De plus, si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont deux représentations inéquivalentes de  $SU(2)$ , alors

$$\int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha \bar{\chi}_{\mathcal{D}}(U(\alpha)) \chi_{\mathcal{D}'}(U(\alpha)) = 0. \quad (4.84)$$

Dans la section 4.3 nous avons vu que les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie  $su(2) \equiv so(3)$  sont données par les  $\mathcal{D}_*^j, \forall j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ . Pour un groupe simplement connexe, toute représentation de son algèbre de Lie peut être élevée à une représentation du groupe. Pour  $j \in \mathbb{N}$ , ce sont les représentations  $\mathcal{D}^j$  de  $SO(3)$  que nous avons trouvées dans la section 4.3. Plus précisément,  $\mathcal{D}^j(U) = \mathcal{D}^j(\Pi(U))$ . D'après nos résultats de la section 4.3, la dimension de  $\mathcal{D}_*^j$  (et donc aussi de  $\mathcal{D}^j$ ) est  $2j + 1$ . Pour de pures raisons dimensionnelles, il s'ensuit que

- $\mathcal{D}^0(U) = 1$  :  $\mathcal{D}^0$  est la représentation triviale ; cela signifie qu'un état quantique sans moment angulaire (un état  $s$ ) est invariant sous rotation.
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(U) = U$  :  $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}$  est l'identité .
- $\mathcal{D}^1(U) = \mathcal{D}^1(\Pi(U)) = \Pi(U)$  .

Nous dériverons des représentations explicites pour les  $\mathcal{D}^j$  sur  $SU(2)$  pour tout demi-entier  $j$  dans les exercices.

Comme pour  $SO(3)$ , nous posons maintenant  $\mathbf{J} = i\hbar\mathcal{D}_*^j(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}i\hbar\mathcal{D}_*^j(-i\sigma)$ . Soit  $(\Psi_m^j)_{m=-j}^j$  une base de l'espace linéaire  $\mathcal{E}^j$  qui diagonalise  $\mathbf{J}^2$  et  $J_3$ . Il suit alors (voir section 4.3)

$$J_3\Psi_m^j = \hbar m\Psi_m^j, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{J}^2\Psi_m^j = \hbar^2 j(j+1)\Psi_m^j. \quad (4.86)$$

Avec  $J_{\pm} := J_1 \pm iJ_2$ , nous avons  $\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J_-J_+ + \hbar J_3 + J_3^2$ , et

$$J_{\pm}\Psi_m^j = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \Psi_{m\pm 1}^j. \quad (4.87)$$

$\mathbf{J}^2$  est un multiple de l'identité sur  $\mathcal{E}^j$ .

Dans le chapitre précédent nous avons trouvé que pour un groupe compact, toutes les représentations irréductibles ont une dimension finie et elles peuvent être choisies *unitaires*.

Nous considérons

$$M_3 = \frac{d}{d\alpha}U_3(\alpha)\Big|_{\alpha=0} \quad \text{où} \quad U_3(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} = U(\alpha/2). \quad (4.88)$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^j(U(\alpha/2)) &= \mathcal{D}^j(U_3(\alpha)) = \mathcal{D}^j(\exp(\alpha M_3)) \\ &= \exp(\alpha\mathcal{D}_*^j(M_3)) = \exp\left(\frac{\alpha}{i\hbar}J_3\right), \end{aligned} \quad (4.89)$$

et on obtient  $\mathcal{D}^j(U(\alpha))\Psi_m^j = \mathcal{D}^j(U_3(2\alpha))\Psi_m^j = e^{-i2\alpha m}\Psi_m^j$ . Dans la base

$(\Psi_m^j)_{m=-j}^j$  on a alors

$$\mathcal{D}^j(U(\alpha)) = \begin{pmatrix} e^{-2i\alpha j} & & & \\ & e^{-2i\alpha(j-1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{2i\alpha j} \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Le caractère de la représentation  $\mathcal{D}^j$  est donc

$$\chi_j(U(\alpha)) = \sum_{m=-j}^j e^{i2\alpha m} = \frac{e^{i(2j+1)\alpha} - e^{-i(2j+1)\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} = \frac{\sin([2j+1]\alpha)}{\sin \alpha}, \quad (4.91)$$

puisque c'est une série géométrique. De Eq. (4.83)–(4.84), il suit que

$$\int_{SU(2)} dU |\chi_j(U)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2([2j+1]\alpha) = 1, \quad \text{et} \quad (4.92)$$

$$\int_{SU(2)} dU \bar{\chi}_j(U) \chi_{j'}(U) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin([2j+1]\alpha) \sin([2j'+1]\alpha) = 0 \quad (4.93)$$

pour  $j \neq j'$ .

### 4.4.3 Décomposition en représentations irréductibles et addition de moments cinétiques

Soit  $\mathcal{E}$  un espace linéaire qui porte une représentation  $\mathcal{D}$  de  $SU(2)$ . Nous aimerions décomposer  $\mathcal{D}$  en représentations irréductibles  $\mathcal{D}^j$ . Explicitement, nous désirons déterminer les coefficients  $m_j$  tels que

$$(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \simeq \bigoplus_{j=1}^N m_j (\mathcal{E}^j, \mathcal{D}^j), \quad (4.94)$$

où  $\simeq$  indique que la décomposition en parties irréductibles est unique à une transformation d'équivalence près (Théorème d'unicité). Ceci implique que le caractère de la représentation  $\mathcal{D}$  satisfait

$$\chi_{\mathcal{D}} = \sum_{j=1}^N m_j \chi_j, \quad (4.95)$$

où  $\chi_j$  est le caractère de la représentation irréductible  $\mathcal{D}^j$ . Le coefficient  $m_j$  spécifie donc la multiplicité de la représentation  $\mathcal{D}^j$  dans la décomposition

de  $\mathcal{D}$ . En combinant Eqs. (4.83) et (4.95), nous obtenons

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha |\chi_{\mathcal{D}}(\alpha)|^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha \sum_{j=1}^N m_j^2 |\chi_j(\alpha)|^2 = \sum_{j=1}^N m_j^2. \quad (4.96)$$

De plus,

$$m_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin^2 \alpha \bar{\chi}_{\mathcal{D}}(\alpha) \chi_j(\alpha). \quad (4.97)$$

On peut en conclure que la multiplicité  $m_j$  de la représentation  $\mathcal{D}^j$  est entièrement spécifiée par le caractère.

Il est facile de voir que le caractère correspondant au produit tensoriel de deux représentations est le produit des caractères  $\chi_{j_1}$  et  $\chi_{j_2}$ . Si  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} \simeq \oplus_j m_j \mathcal{D}^j$  nous avons donc  $\chi_{j_1} \chi_{j_2} = \sum_j m_j \chi_j$ . D'autre part, on trouve (exercice)

$$\chi_{j_1}(\alpha) \chi_{j_2}(\alpha) = \sum_{m_1, m_2} e^{2i(m_1+m_2)\alpha} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} \sum_{m=-j}^j e^{2im\alpha} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} \chi_j(\alpha). \quad (4.98)$$

Ainsi,  $\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2}$  contient *une seule fois* chacune des représentations  $\mathcal{D}^j$ , où  $|j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2|$ . Ceci mène de nouveau à la série de Clebsch-Gordan :

$$\mathcal{D}^{j_1} \otimes \mathcal{D}^{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{|j_1+j_2|} \mathcal{D}^j. \quad (4.99)$$

# Chapitre 5

## Les représentations irréductibles de $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ et le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$

### 5.1 Introduction

#### Définition 5.1 Représentation tensorielle

Soit  $G$  un groupe et  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  une représentation.

La représentation tensorielle  $\varphi \otimes \varphi : G \rightarrow \text{Aut}(V \otimes V)$  est définie par

$$(\varphi \otimes \varphi)(x) = \varphi(x) \otimes \varphi(x).$$

**Proposition 5.1** – Soit  $V$  un espace vectoriel et

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_n =: V^{\otimes n}$$

son  $n^{\text{ème}}$  produit tensoriel et

$$\phi^{\otimes n}(x) : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n} := \underbrace{\phi(x)V \otimes \dots \otimes \phi(x)V}_n$$

la représentation tensorielle de  $G$  dans  $\text{Aut}(V^{\otimes n})$ .

- Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ .
- Soit  $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$  la base de  $V^{\otimes n}$  engendrée par une base quelconque  $(e_i)_{i=1}^m$  de  $V$ .

Nous définissons  $T_\sigma^\pm$  comme le sous-espace des tenseurs de rang  $n$  qui sont invariants (changent de signe) sous la permutation  $\sigma$ .

1. La définition  $T_\sigma^\pm$  est indépendant du choix de la base  $(e_i)$ .



2.  $T_\sigma^\pm$  est un sous-espace invariant de  $\phi^{\otimes n}$ .

**Preuve 45** Soit

$$t = \sum_{i_1 \dots i_n} t_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$$

invariant ( $\pm$ ) sous  $\sigma$ .

$$\text{Donc } t_{i_1 \dots i_n} = \pm t_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(n)}}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } (\varphi^{\otimes n}(x)t)_{i_1 \dots i_n} &= \sum_{j_1 \dots j_n=1}^m \varphi_{i_1 j_1} \dots \varphi_{i_n j_n} t_{j_1 \dots j_n} \\ &= \sum_{j_1 \dots j_n=1}^m \varphi_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \dots \varphi_{i_{\sigma(n)} j_{\sigma(n)}} (\pm) t_{j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(n)}} \\ &= \pm (\varphi^{\otimes n}(x)t)_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(n)}}. \end{aligned}$$

La démonstration de l'invariance sous changement de base est identique. Il faut juste remplacer  $\varphi_{ij}$  par la matrice de transformation de base,  $O_{ij}$ .  $\square$

Comme l'intersection de deux espaces invariants est aussi invariante, les espaces

$$V^{\otimes n} = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{S}_n} T_\sigma^{(+)} \quad \text{et} \quad V^{\@n} = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{S}_n(2)} T_\sigma^{(-)}$$

sont aussi invariants. Ici  $\mathcal{S}_n(2)$  sont les permutations qui consistent seulement d'un échange de deux éléments.  $V^{\otimes n}$  est l'espace des tenseurs totalement symétriques tandis que  $V^{\@n}$  est l'espace des tenseurs totalement anti-symétriques.

Si  $e_i e_j := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$  signifie le produit symétrisé, il est évident que

$$\left( \underbrace{e_1 e_1 \dots e_1}_n, e_1 \dots e_1 e_2, \dots, e_1 \dots e_1 e_m, \underbrace{e_1 \dots e_1}_{n-2} e_2 e_2, \dots, e_m e_m \dots e_m \right)$$

forment une base de  $V^{\otimes n}$  et alors  $\dim V^{\otimes n} = \binom{m+n-1}{n}$  (combinaisons avec répétition).

Par contre, si

$$(e_1 \wedge e_2 \wedge e_n, e_2 \wedge e_3, \dots \wedge e_n \wedge e_{n+1}, \dots, e_{m-n} \wedge e_{m-n+1} \wedge \dots \wedge e_m)$$

forment une base de  $V^{\otimes n}$  qui a alors la dimension

$$\dim V^{\otimes n} = \binom{m}{n} \quad (\text{combinaisons sans répétition}).$$

Ces exemples rendent évident que les sous-espaces invariants sous  $\text{Gl}(m, \mathbb{C})$  de  $V^{\otimes n}$  sont liés aux sous-espaces invariants de la représentation de  $\mathcal{S}_n$  qui échange simplement les indices des tenseurs. Pour trouver ces derniers nous voulons d'abord étudier le groupe  $\mathcal{S}_n$ .

## 5.2 Les représentations irréductibles du groupe $\mathcal{S}_\ell$ et les tableaux de Young

Une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_\ell$  peut être indiquée par

$$\sigma : (1, 2, \dots, \ell) \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(\ell))$$

ou

$$\sigma : (1, i_1, i_2, \dots, i_{n_1}) (i_{n_1+1} \dots i_{n_2}) \dots (i_{n_p+1} \dots i_{n_{p+1}})$$

$$\text{où } \sigma(1) = i_1, \sigma(i_1) = i_2, \dots, \sigma(i_{n_1}) = 1 \quad \text{etc.}$$

Les suites  $(i_{n_q+1}, i_{n_q+2}, \dots, i_{n_{q+1}})$  sont appelés des **cycles**.

Les énoncés suivants sur les permutations sont élémentaires et importants :

**Proposition 5.2** 1. *Toute permutation peut être obtenue par une suite de transpositions  $\tau_i$  de deux éléments (échanges de deux éléments).*

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p.$$

$$\text{Si } \sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_p = \tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_q$$

$p$  et  $q$  sont les deux soit paires, soit impaires.

2. *Une permutation est invariante sous échange de l'ordre de ses cycles.*
3. *Soit  $q_1 \dots q_p$  la longueur des différents cycles qui constituent  $\sigma$  avec  $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \dots \leq q_p$ . Alors la suite  $q_1 \dots q_p$  reste la même pour toute la classe*

$$[\sigma] = \{\rho \sigma \rho^{-1} \mid \rho \in \mathcal{S}_\ell\}.$$

**Preuve 46**

1. L'identité est faite par un nombre pair de transpositions alors

$$\text{id} = \sigma \circ \sigma^{-1} = \tau_1 \circ \tau_2 \dots \tau_p \circ \tau'_q \circ \tau'_{q-1} \dots \tau'_1.$$

Donc  $p + q$  est un nombre pair. (Exercice : l'identité ne peut être générée que par un nombre pair de transpositions.)

2. C'est évident.

3. Soient  $\sigma$  et  $\rho$  des permutations. Un cycle de  $\sigma$ , commençant par l'élément  $i$  disons, est de la forme

$$(i, \sigma(i), \sigma(\sigma(i)), \dots).$$

Ceci correspond au cycle suivant de  $\rho\sigma\rho^{-1}$  :

$$(\rho(i), \rho\sigma\rho^{-1}(\rho(i)), \rho\sigma\rho^{-1}\rho\sigma\rho^{-1}(\rho(i)), \dots).$$

Donc pour un cycle de  $\sigma$  ( $i_1 \dots i_n$ ) la permutation  $\rho\sigma\rho^{-1}$  possède le cycle correspondant ( $\rho(i_1), \rho(i_2) \dots \rho(i_n)$ ). Donc les deux permutations  $\sigma$  et  $\rho\sigma\rho^{-1}$  ont des cycles de la même longueur. D'autre part, si deux permutations  $\sigma$  et  $\sigma'$  ont des cycles de longueurs correspondants  $p_1 \geq p_2 \dots \geq p_n$

$$(i_1 \dots i_{p_1})(i_{p_1+1} \dots i_{p_1+p_2}) \dots (\dots i_{p_1+p_2+\dots+p_n}) = \sigma$$

et

$$(j_1 \dots j_{p_1})(j_{p_1+1} \dots j_{p_1+p_2}) \dots (\dots j_{p_1+p_2+\dots+p_n}) = \sigma'$$

La permutation  $\rho$  avec  $\rho(j_m) = i_m$  est telle que

$$\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1}.$$

□

Donc les permutations avec des longueurs égales de leur cycles forment une classe.

### Tableaux de Young :

Soient  $f_1 \dots f_n$  des nombres  $f_1 \geq f_2 \dots \geq f_n$  tels que  $\sum_{i=1}^m f_i = f$ . Nous associons à cette suite le tableau de Young  $\mathcal{T} = T(f_1 \dots f_n)$  de  $f_i$  cases dans la  $i^{\text{ème}}$  ligne :

$f_1$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2$	9	10	11	12	13	14		
$f_3$	15	16	17	18	19	20		
$f_4$	21	22						
$f_5$	23							
$f_6$	24							

$$f_1 = 8, f_2 = f_3 = 6, f_4 = 2, f_5 = f_6 = 1$$

$$f = \sum f_i = 24$$

Le tableau de Young  $\mathcal{T}$  rempli des nombres 1 à  $f$  est appelé un diagramme de Young,  $D$ . Il est clair qu'il existe autant de tableaux que de répartitions des permutations en cycles différents, donc autant que le groupe  $\mathcal{S}_f$  a de classes (donc autant que  $\mathcal{S}_f$  a de représentations irréductibles inéquivalentes!).

Soit  $\sigma$  une permutation qui n'échange que des éléments de la même ligne d'un diagramme  $D$  et  $\Sigma(D)$  l'ensemble de telles permutations. Il est évident que  $\Sigma(D) \subset \mathcal{S}_f$  est un sous-groupe. Nous posons

$$a = \sum_{\sigma \in \Sigma(D)} \sigma \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f).$$

De même soit  $\Omega(D) \subset \mathcal{S}_f$  le sous-groupe des permutations  $\omega$  qui ne permutent que des éléments de la même colonne. Nous posons

$$b = \sum_{\omega \in \Omega(D)} \delta_\omega \cdot \omega \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \quad \text{où} \quad \delta_\omega = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \text{ est pair} \\ -1, & \text{si } \omega \text{ est impair} \end{cases}$$

(Une permutation "paire" est une permutation qui peut être construite par un nombre pair de transpositions.)

**Théorème 5.1** *Nous définissons*

$$e(D) = a \cdot b \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f).$$

*Nous voulons montrer les choses suivantes*

1.  $(e(D))^2 = \gamma e(D)$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ , donc  $u = \gamma^{-1}e(D)$  est idem-potent.
2. L'idem-potent  $u$  est primitif et les éléments  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)e(D)$  génèrent alors une représentation irréductible sur

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \cdot e(D) =: L(D) \quad \text{idéal à gauche minimal.}$$

3. Les représentations qui correspondent à des tableaux  $T$  et  $T'$  inégaux sont inéquivalents.
4. Les idéaux  $L(D)$  et  $L(D')$  où  $D$  et  $D'$  sont des diagrammes associés au même tableau  $T$  sont  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  isomorphes (C'est-à-dire la représentation régulière réduite sur  $L(D)$  et  $L(D')$  engendre des représentations équivalentes).

**Remarque :** Ce théorème démontre que les différents tableaux de Young à un nombre  $f$  de carrés correspondent aux représentations irréductibles inéquivalentes de  $\mathcal{S}_f$ .

Dans le prochain paragraphe nous allons les lier aux représentations tensorielles de  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ .

**Preuve du théorème 5.1 :** Nous allons procéder en plusieurs étapes. D'abord il nous faut démontrer la proposition suivante :

**Proposition 5.3** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre semi-simple et  $L = \mathcal{A}e$  un idéal à gauche avec idempotent générateur  $e$ ,  $e^2 = e$ .  $L$  est minimal si et seulement si tout élément  $a \in e\mathcal{A}e$ ,  $a \neq 0$  a un inverse dans  $e\mathcal{A}e$ .

**Preuve 47 (de la prop. 5.3)**

- " $\implies$ " Soit  $L$  minimal.  $e\mathcal{A}e$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  avec élément neutre  $e$ .  $e\mathcal{A}e \subset L$ . Soit  $L_1 \subset e\mathcal{A}e$  un idéal gauche de  $e\mathcal{A}e$ . Alors  $\mathcal{A}L_1 \subset \mathcal{A}e\mathcal{A}e \subset \mathcal{A}e = L$ . Alors  $\mathcal{A}L_1$  est un idéal gauche de  $\mathcal{A}$  dans  $L$ , donc  $\mathcal{A}L_1 = L$ . Mais comme  $e$  est une identité (des deux côtés) dans  $e\mathcal{A}e$ , nous avons

$$e\mathcal{A}e = eL = e\mathcal{A}L_1 = e\mathcal{A}eL_1 = L_1.$$

Donc  $L_1 = e\mathcal{A}e$ . Donc  $e\mathcal{A}e$  n'a pas d'idéaux gauches non-triviaux. Mais dans une algèbre sans idéaux gauches non-triviaux tout élément  $a$  a un inverse. Ceci se voit comme suit : soit  $B$  une algèbre sans idéaux à gauche non triviaux,  $a \in B$ ,  $a \neq 0$ . Supposons qu'il n'existe pas de  $b$  avec  $ba = 1$ . Dans ce cas  $Ba \subset B$  est un idéal à gauche non-trivial.

- " $\impliedby$ " Nous démontrons que si  $L = \mathcal{A}e$  n'est pas minimal,  $e\mathcal{A}e$  possède des éléments sans inverses.

Soit  $L = L_1 \oplus L_2$  et  $e = e_1 + e_2$ ,  $e_i \in L_i$ ,  $e_i \neq 0$ .

Alors  $e_2e = e_2$  et  $e_1e = e_1$ . Donc  $e_2 = ee_2e$ ,  $e_1 = ee_1e$ . C'est-à-dire que  $e\mathcal{A}e$  contient de éléments orthogonaux non-nuls,  $e_1 \cdot e_2 = 0$ ,  $e_i \neq 0$ , qui ne peuvent alors pas posséder d'inverse.

□

Pour continuer la preuve du théorème 5.1 nous démontrons encore quelques lemmes.

Pour un diagramme  $D$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_f$  nous définissons  $D' = \sigma D$ , le diagramme qui correspond au même tableau que  $D$  et qui a le nombre  $\sigma(\alpha)$  à la position  $(i, j)$  si  $\alpha$  est le nombre à la position  $(i, j)$  du diagramme  $D$

$$D = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \hline \alpha_5 & \alpha_6 & & \\ \hline \alpha_7 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$D' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) & \sigma(\alpha_3) & \sigma(\alpha_4) \\ \hline \sigma(\alpha_5) & \sigma(\alpha_6) & & \\ \hline \sigma(\alpha_7) & & & \\ \hline \end{array}$$

Alors pour  $\tau \in \mathcal{S}_f$   $\sigma\tau D = \sigma\tau\sigma^{-1}D'$

Ceci est évident comme  $\sigma^{-1}D' = D$ .

**Lemme 5.1**

$$\text{Pour } \sigma \in \mathcal{S}_f \quad , \quad \Sigma(\sigma D) = \sigma \Sigma(D) \sigma^{-1},$$

$$\Omega(\sigma D) = \sigma \Omega(D) \sigma^{-1} \quad \text{et} \quad e(\sigma D) = \sigma e(D) \sigma^{-1}.$$

**Preuve 48 (du lemme 5.1)**

Rappeler que  $\Sigma(D)$  sont les permutations à l'intérieur des lignes de  $D$  et  $\Omega(D)$  sont celles des colonnes.

Si  $p \in \Sigma(D)$ ,  $p$  laisse tout élément de  $D$  dans sa ligne. Alors  $\sigma p \sigma^{-1}$  laisse tout élément de  $\sigma D$  dans sa ligne. De même pour les colonnes.  $\square$

**Lemme 5.2** Un élément  $\sigma \in \mathcal{S}_f$  est de la forme  $\sigma = pq$  avec  $p \in \Sigma(D)$  et  $q \in \Omega(D)$  si et seulement s'il n'existe pas deux nombres co-linéaires dans  $D$  qui sont "co-colonnaires" dans  $\sigma D$ .

**Preuve 49 (du lemme 5.2)**

Soit  $\sigma = pq$  et  $\alpha, \beta$  dans la même ligne de  $D$ . Alors, ils sont aussi dans la même ligne de  $pD$ . Mais  $\sigma D = (pqp^{-1})pD$  et  $pqp^{-1}$  est une permutation dans une colonne pour  $pD$ . Donc aussi dans  $\sigma D = (pqp^{-1})pD$   $\alpha$  et  $\beta$  sont dans des colonnes différentes.

D'autre part, supposons qu'il n'existe pas deux nombres qui sont dans la même ligne de  $D$  et dans la même colonne de  $\sigma D$ . En particulier, tous les éléments de la première colonne de  $\sigma D$  sont dans des lignes différentes de  $D$ .

Il existe alors une permutation  $p_1 \in \Sigma(D)$  qui les met tous dans la première colonne. Donc  $\sigma D$  et  $p_1 D$  ont les mêmes éléments dans la première colonne. En répétant cette procédure avec les autres colonnes nous arrivons à

$$p = p_j p_{j-1} \dots p_1 \in \Sigma(D)$$

tel que  $pD$  a les mêmes éléments dans chacune des colonnes que  $\sigma D$  (mais en général dans un ordre différent) : par exemple

1	4	3
5	2	

5	2	3
1	4	

En organisant maintenant les colonnes avec une permutation  $q' \in \Omega(pD)$  nous obtenons

$$\sigma D = q' p D, \quad \text{mais} \quad q' = p q p^{-1} \quad \text{pour un } q \in \Omega(D)$$

$$\text{Donc} \quad \sigma D = p q D, \quad \sigma = p q.$$

□

Nous avons défini

$$e(D) = \sum_{p \in \Sigma(D), q \in \Omega(D)} \delta_q p q.$$

Tous les produits  $pq$ ,  $p \in \Sigma(D)$ ,  $q \in \Omega(D)$  sont différents parce que

$$p_1 q_1 = p_2 q_2 \quad \text{implique} \quad p_2^{-1} p_1 = q_2 q_1^{-1} \in \Sigma(D) \cap \Omega(D) = \{\mathbb{I}\}.$$

Donc  $p_1 = p_2$  et  $q_1 = q_2$ .

Donc  $e(D) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  est une somme de certains éléments (ou leurs négatifs) de  $\mathcal{S}_f$ , tous différents. Alors certainement  $e(D) \neq 0$ .

Pour  $p_1 \in \Sigma(D)$  et  $q_1 \in \Omega(D)$  nous obtenons

$$p_1 e(D) = \sum \delta_q p_1 p \cdot q = e(D) \quad \text{et}$$

$$e(D) q_1 = \sum \delta_q p q q_1 = \delta_{q_1} \sum \delta_{q \cdot q_1} p (q q_1) = \delta_{q_1} \cdot e(D).$$

Ceci montre que pour  $p \in \Sigma(D)$ ,  $q \in \Omega(D)$  et  $\gamma \in \mathbb{C}$

$$p \cdot \gamma e(D) q = \delta_q \cdot \gamma \cdot e(D).$$

Dans le lemme 5.4 nous montrerons que aussi le converse est vrai.

Pour deux tableaux  $T$  et  $T'$  avec des lignes de longueurs  $n_1 \geq \dots \geq n_k$  et  $n'_1 \geq \dots \geq n'_k$  nous définissons  $T > T'$  si la première différence non-nulle  $n_i - n'_i > 0$ . Il est évident que ceci est une bonne relation d'ordre (pour tout pair de tableaux  $T$  et  $T'$  nous avons soit  $T < T'$ ,  $T > T'$  ou  $T = T'$ ).

**Lemme 5.3** Soient  $D$  et  $D'$  deux diagrammes associés aux tableaux  $T$  et  $T'$ . Si  $T > T'$ ,  $e(D')e(D) = 0$ .

**Preuve 50** D'abord, il existe deux nombres qui sont co-linéaires en  $D$  et co-colonnaires en  $D'$ . Si ceci n'est pas le cas, tous les  $n_1$  nombres de la première ligne doivent apparaître dans des colonnes différentes. Mais  $T'$  a  $n'_1$  colonnes donc il faut  $n'_1 \geq n_1$ , mais  $T > T'$  implique  $n'_1 \leq n_1$ , donc  $n'_1 = n_1$ .

Nous appliquons alors une transformation dans les colonnes de  $D'$  pour obtenir un nouveau diagramme  $D''$  qui est associé au même tableau  $T'$  et qui partage sa première ligne avec  $D$ . Nous répétons alors l'argument pour la deuxième ligne qui nous mène à  $n'_2 = n_2$  etc. jusqu'à  $n'_k = n_k$  donc  $T' = T$  ce qui contredit notre hypothèse.

Soient alors  $\alpha$  et  $\beta$  dans la même ligne de  $D$  et dans la même colonne de  $D'$ . Soit  $\tau = (\alpha, \beta) \in \mathcal{S}_f$  la transposition qui échange  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors  $\tau \in \Sigma(D)$  et  $\tau \in \Omega(D')$ . Evidemment  $\delta_\tau = -1$ . Donc

$$e(D')e(D) = \underbrace{e(D')\tau}_{-e(D')} \cdot \underbrace{\tau e(D)}_{e(D)} = -e(D')e(D) = 0.$$

□

**Lemme 5.4** Soit  $x \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  tel que  $pxq = \delta_q x$  pour tout  $p \in \Sigma(D)$  et  $q \in \Omega(D)$ . Alors  $x = \gamma \cdot e(D)$  pour un  $\gamma \in \mathbb{C}$ .

**Preuve 51** Soit

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \alpha_\sigma \cdot \sigma \quad , \quad \alpha_\sigma \in \mathbb{C} \\ x &= \delta_q p^{-1} x q^{-1} = \delta_q \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \alpha_\sigma (p^{-1} \sigma q^{-1}) \\ &= \delta_q \sum_{\tau \in \mathcal{S}_f} \alpha_{p\tau q} \cdot \tau \quad \text{pour tout } p \in \Sigma(D) \text{ et } q \in \Omega(D). \end{aligned}$$

$$(*) \quad \text{Donc } \alpha_\tau = \delta_q \alpha_{p\tau q} \quad \forall p \in \Sigma(D), q \in \Omega(D).$$

Pour  $\tau = \text{id} = \mathbb{I}$  ceci donne  $\alpha_{pq} = \delta_q \alpha_{\mathbb{I}}$ .

Pour compléter la preuve il faut encore démontrer que  $\alpha_\sigma = 0$  si  $\sigma$  n'est pas de la forme  $pq$ . Mais si  $\sigma$  n'est pas de cette forme, d'après la lemme 5.2 il existe des nombres  $\alpha, \beta$  qui sont dans la même ligne de  $D$  et dans la même colonne de  $\sigma D$ . Donc  $p = (\alpha, \beta) \in \Sigma(D)$  et  $p \in \Omega(\sigma D)$ . Il existe alors un



$q \in \Omega(D)$  tel que  $p = \sigma q \sigma^{-1}$ .  $q$  est aussi une transposition donc  $\delta_q = -1$ .  
 Mais d'après (\*) et comme  $\sigma = p \sigma q^{-1} = p \sigma q$ ,

$$\alpha_\sigma = \alpha_{p \sigma q} = \delta_q \alpha_\sigma = -\alpha_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_\sigma = 0.$$

□

Pour  $p \in \Sigma(D)$  et  $q \in \Omega(D)$  nous avons

$$p e^2(D) q = p e(D) e(D) q = \delta_q e^2(D).$$

Donc  $e^2(D) = \gamma e(D)$  pour un  $\gamma \in \mathbb{C}$ . En plus  $\gamma$  est le coefficient de  $\mathbb{I}$  dans  $e^2(D)$ , il est alors un nombre entier.

Nous allons encore montrer que  $\gamma \neq 0$ . Pour ceci nous considérons l'homomorphisme

$$T : \mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}_f) : x \rightarrow x \cdot e(D).$$

Soit  $T$  la matrice qui représente cet homomorphisme dans la base

$$\sigma_1 = \mathbb{I}, \sigma_2, \dots, \sigma_{f!} \in \mathcal{S}_f.$$

Soit  $e(D) = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \dots$ . Donc

$$\begin{aligned} \sigma_1 e(D) &= e(D) = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \dots \\ \sigma_2 e(D) &= \quad \quad \cdot + \alpha_1 \sigma_2 + \dots \\ \sigma_3 e(D) &= \quad \quad \cdot + \quad \quad \cdot + \alpha_1 \sigma_3 + \dots \\ \dots &= \quad \quad \dots \end{aligned}$$

Alors la trace de  $T$  est  $\alpha_1 \cdot f!$ .

Mais  $\alpha_1 = 1$  comme  $\mathbb{I}$  apparaît avec le coefficient 1 dans  $e(D)$ , donc  $\text{tr } T = f!$ .

Nous calculons encore la trace de  $T$  en utilisant une autre base (ce qui doit donner le même résultat).

Soit  $\{v_1, \dots, v_{f!}\}$  une base de  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  telle que  $v_1, \dots, v_m$  forment une base de  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \cdot e(D) =: L(D)$ . Ici  $m = \dim(\mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \cdot e(D)) \geq 1$  parce que  $e(D) \neq 0$ .  $L(D) = \mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \cdot e(D)$  est évidemment un idéal à gauche. Pour  $x \in L(D)$  nous avons  $x = a \cdot e(D)$  et donc

$$x \cdot e(D) = a \cdot e(D)^2 = \gamma \cdot a \cdot e(D) = \gamma \cdot x.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{array}{rcl}
v_1e(D) & = & \gamma v_1 \\
v_2e(D) & = & \gamma v_2 \\
\vdots & & \vdots \\
v_me(D) & = & \gamma v_m \\
v_{m+1}e(D) & = & * \cdots \cdots * + 0 + 0 \cdots \\
\vdots & & \vdots \\
v_{f!}e(D) & = & * \cdots \cdots * + 0 \cdots
\end{array}$$

(Parce que  $v_je(D) \in L(D)$ , donc seul les composantes 1 à  $m$  peuvent être non-nulles.)

Cette fois nous obtenons  $\text{tr}T = \gamma \cdot m$  ce qui implique  $\gamma m = f!$  donc  $\gamma = f!/m \neq 0$ .

L'idéal  $L(D)$  est donc généré par l'idem-potent  $u = \gamma^{-1}e(D)$ , avec  $u^2 = u \neq 0$ .

Nous voulons encore montrer que l'idéal  $L(D)$  est minimal, donc la représentation régulière restreinte sur  $L(D)$  est irréductible.

D'après la proposition 5.3 il nous suffit de démontrer que dans le double idéal  $u\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)u \equiv e(D)\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)e(D) =: A$  tout élément non-nul a un inverse.

Mais  $x \in A$  est de la forme  $x = e(D)ye(D)$  pour un  $y \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$ . Donc  $pxq = pe(D)ye(D)q = \delta_q x$  pour tout  $p \in \Sigma(D)$ ,  $q \in \Omega(D)$ . D'après le lemme 5.4 nous pouvons donc écrire  $x = \alpha \cdot e(D)$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , et alors

$$x^{-1} = \frac{1}{\alpha\gamma}e(D) \quad \text{et donc} \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e(D).$$

Ceci complète la démonstration du fait que  $L(D)$  est minimal.

Comme deux diagrammes du même tableau sont reliés par une permutation,  $D' = \sigma D$  et  $e(D') = \sigma e(D)\sigma^{-1}$ . Il est évident que les idéaux

$$L(D) = \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)e(D) \quad \text{et} \quad L(D') = \sigma\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)\sigma^{-1}\sigma e(D)\sigma^{-1} = \sigma L(D)\sigma^{-1}$$

sont isomorphes et les représentations régulières sur  $L(D)$  et  $L(D')$  sont équivalentes.

Il faut encore montrer que si  $D$  et  $D'$  sont associés à des tableaux **différents**,  $L(D)$  et  $L(D')$  ne sont pas isomorphes (comme idéaux dans  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$ ).

Supposons  $\varphi : L(D) \rightarrow L(D')$  soit un isomorphisme. (Un isomorphisme entre deux idéaux de gauche  $I_1$  et  $I_2$  d'une algèbre  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme d'algèbre qui satisfait à  $\phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v)$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  et  $v \in I_1$ . Soit  $u \in L(D)$  et  $u' \in L(D')$  les idem-potent de  $L(D)$  et  $L(D')$ .)

$$\text{Alors} \quad \varphi(a) = \varphi(a \cdot u) = a \cdot \varphi(u) \quad \forall a \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$$

Soit  $a' = \varphi(u) \in L(D')$ . Il existe donc un  $b \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  avec  $u \cdot a' = b \cdot u'$ . Comme  $u^2 = u$ ,  $ubu' = ua'$ .

Mais pour tout  $\sigma \in \mathcal{S}_f$  on a

$$u\sigma u' = u(\sigma u' \sigma^{-1})\sigma = 0$$

parce que avec  $u$  et  $u'$  aussi  $u$  et  $\sigma u' \sigma^{-1}$  sont les générateurs de diagrammes associés à des tableaux différents et nous pouvons appliquer le lemme 5.3.

Donc  $ua' = u\varphi(u) = \varphi(u^2) = \varphi(u) = a' = 0$  ce qui contredit l'hypothèse que  $\varphi$  soit un  $\mathcal{A}$ -isomorphisme.

Avec ceci nous avons complété la démonstration du théorème 5.1. La décomposition de la représentation régulière de  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  sur soi-même est donc de la forme

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_f) = \bigoplus_T d(T)L(T).$$

Ici  $d(T)$  est la dimension des idéaux  $L(D) \simeq L(T)$  qui sont tous équivalents pour tout diagramme  $D$  du tableau  $T$ .

Les représentations des diagrammes associés aux mêmes tableaux sont équivalentes et les représentations de ceux associés à des tableaux différents sont inéquivalentes.

$$L(D) = \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)e(D), \quad e(D) = \sum_{p \in \Sigma(D), q \in \Omega(D)} \delta_q p \cdot q$$

où

$\Sigma(D)$  = Permutations qui ne permutent que des éléments de la même ligne.

$\Omega(D)$  = Permutations qui ne permutent que des éléments de la même colonne.

### 5.3 Centralisateurs de représentations d'algèbres symétriques

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre (à dimension finie) et  $a \in \mathcal{A}$ . La multiplication de gauche est indiquée par  $\mathcal{L}_a$  :

$$\mathcal{L}_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : x \rightarrow ax.$$

Evidemment  $a \rightarrow \mathcal{L}_a$  est la représentation régulière.

**Théorème 5.2** *Si  $\mathcal{A}$  est semi-simple la trace*

$$f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \rightarrow \text{tr}(\mathcal{L}_x \cdot \mathcal{L}_y) = f(x, y)$$

*est bi-linéaire, symétrique, associative ( $f(x, yz) = f(xy, z)$ ) et non-dégénérée.*

**Preuve 52** *Tout sauf le dernier énoncé (non-dégénérée) est évident. Nous allons donc démontrer que celui-ci.*

*D'abord, soit  $B \subset \mathcal{A}$  un idéal (double). Nous considérons*

$$B^\perp = \{y \mid f(x, y) = 0 \ \forall x \in B\}.$$

*Avec cette définition  $f$  est non-dégénérée si et seulement si  $\mathcal{A}^\perp = \{0\}$ .*

*Comme  $f(x, ay) = f(xa, y)$  et  $f(x, ya) = f(ya, x) = f(y, ax) = f(ax, y)$*

*avec  $x \in B$  et  $y \in B^\perp$  aussi  $ay \in B^\perp$  et  $ya \in B^\perp$ , donc aussi  $B^\perp$  est un idéal double. Supposons  $\mathcal{A}^\perp \neq \{0\}$ . Dans ce cas  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\perp \oplus A$  où  $A$  est aussi un idéal double. Nous posons  $\mathbb{I} = e^\perp + e$  avec  $e^\perp \in \mathcal{A}^\perp$  et  $e \in A$ .  $\mathcal{L}_{e^\perp}$  est le projecteur sur  $\mathcal{A}^\perp$  donc  $\text{tr}\mathcal{L}_{e^\perp} \neq 0$ .*

$$\text{Mais } 0 = f(e^\perp, e^\perp) = \text{tr}\mathcal{L}_{e^\perp}^2 = \text{tr}\mathcal{L}_{e^\perp}.$$

□

Une algèbre semi-simple est alors une algèbre symétrique dans le sens de la définition suivante :

**Définition 5.2** *Une algèbre  $\mathcal{A}$  à dimension finie sur  $\mathbb{C}$  est appelée **algèbre symétrique** si elle admet une forme bi-linéaire, symétrique, associative et non-dégénérée.*

**Définition 5.3** *Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre symétrique. Nous considérons une représentation de  $\mathcal{A}$  sur un espace vectoriel  $M$ . Le **centralisateur**  $C(\mathcal{A}, M) \subset \text{end}(M)$  consiste de toutes les applications linéaires  $T : M \rightarrow M$  qui commutent avec la représentation de  $\mathcal{A}$ ,  $Ta = aT \ \forall a \in \mathcal{A}$ .*

(Ici nous avons identifié la représentations d'un élément  $a \in \mathcal{A}$  avec l'élément lui-même,  $R(a) \equiv a$ , pour simplifier la notation.)

Nous démontrerons l'équivalence entre les sous-espaces de  $M$  qui sont invariants sous tous les éléments de  $C(\mathcal{A}, M)$  et certains idéaux à droit de de  $\mathcal{A}$ . Dans la section suivante nous utiliserons cette équivalence pour construire les représentations tensorielles irréductibles de  $\text{Gl}(\mathbb{C})$  et de certains de ses sous-groupes.

Dans la suite de cette section, Nous n'allons pas toujours présenter des preuves détaillées, elles se trouvent dans la référence : Curtis & Reiner, p.440ff

Nous préférons expliquer la signification des résultats pour notre application, la réduction complète des représentations tensorielles de  $\text{Gl}(\mathbb{C})$ .

Soient  $(a_i)$  et  $(b_j)$  deux bases duales de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $f$ . C'est-à-dire

$$f(a_i, b_j) = \delta_{ij}.$$

$$\text{Pour } a \in \mathcal{A}. \text{ Soient } a_i \cdot a = \sum_j \lambda_{ij}(a) a_j$$

$$\text{et } b_i \cdot a = \sum_j \mu_{ij}(a) b_j.$$

Alors la linéarité, la symétrie et l'associativité de  $f$  impliquent

$$a \cdot b_i = \sum_j \lambda_{ji}(a) b_j \quad , \quad a \cdot a_i = \sum_j \mu_{ji}(a) a_j.$$

**Preuve 53** Soit  $ab_i = \sum_j \kappa_{ji} b_j$  alors

$$\kappa_{ji} = f(a_j, ab_i) = f(a_j a, b_i) = \lambda_{ji}(a).$$

De même pour  $a \cdot a_i$ . □

Soit  $M$  un espace vectoriel qui porte une représentation de  $\mathcal{A}$  et  $M^*$  son dual (les formes linéaires,  $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ ). Nous notons l'action de  $\mathcal{A}$  sur  $M$  comme  $x \mapsto ax$  pour  $a \in \mathcal{A}$  et  $x \in M$ . Pour  $\psi \in M^*$  et  $a \in \mathcal{A}$  nous définissons

$$(\psi a)(x) := \psi(ax) \quad \forall x \in M.$$

Ceci définit une "anti-représentation" sur  $M^*$ . C'est-à-dire, pour  $R(a)\psi := \psi a$  nous avons

$$(R(b)R(a)\psi)(x) = R(b)\psi(ax) = \psi(abx) = (R(ab)\psi)(x).$$

Nous définissons alors l'application

$$\mathcal{T} : M \times M^* \rightarrow \mathcal{A} : (x, \psi) \mapsto \sum_i b_i \psi(a_i x).$$

En utilisant la dualité des bases  $(a_i)$  et  $(b_i)$  il est facile à voir que cette définition est indépendante des bases choisies (aussi longtemps qu'elles soient duales).

**Lemme 5.5**  $\mathcal{T}$  est  $\mathcal{A}$ -bilinéaire dans le sens que

$$\mathcal{T}(ax + by, \psi) = a\mathcal{T}(x, \psi) + b\mathcal{T}(y, \psi) \quad \text{et}$$

$$\mathcal{T}(x, \varphi a + \psi b) = \mathcal{T}(x, \varphi)a + \mathcal{T}(x, \psi)b.$$

L'application  $\mathcal{T}$  n'est pas dégénérée, dans le sens que

$$\mathcal{T}(x, \psi) = 0 \quad \forall x \in M \quad \text{seul pour } \psi = 0 \quad \text{et} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{T}(x, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in M^* \quad \text{seul pour } x = 0. \quad (5.2)$$

**Preuve 54** Par exemple

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(ax + by, \psi) &= \sum_i b_i \psi(a_i(ax + by)) \\ &= \sum_i b_i (\psi(a_i ax) + \psi(a_i by)) \end{aligned}$$

Avec  $a_i a = \sum \lambda_{ij} a_j$  le premier terme devient

$$\sum_i b_i \psi \left( \sum_j \lambda_{ij} a_j x \right) = \sum_{ij} b_i \lambda_{ij} \psi(a_j x) = \sum_j ab_j \psi(a_j x).$$

En traitant le deuxième terme de la même façon on obtient

$$\mathcal{T}(ax + by, \psi) = \sum_j ab_j \cdot \psi(a_j x) + \sum_j bb_j \psi(a_j y) = a \cdot \mathcal{T}(x, \psi) + b\mathcal{T}(y, \psi).$$

La  $\mathcal{A}$ -linéarité dans le deuxième argument peut être démontrée de la même façon.

Pour démontrer que  $\mathcal{T}$  n'est pas dégénérée nous remarquons que pour  $\mathcal{T}(x, \psi) = 0 \quad \forall x \in M$  il faut  $\psi(a_i x) = 0 \quad \forall x \in M$  parce que les  $b_i \in \mathcal{A}$  sont linéairement indépendants.

Mais les  $(a_i) \subset \mathcal{A}$  forment une base, donc  $\mathbb{I} = \sum \alpha_i a_i$  et alors  $\psi(a_i x) = 0$  implique  $\psi(x) = 0 \quad \forall x$ , donc  $\psi = 0$ . De la même manière on peut démontrer éq. (5.2).  $\square$

Nous définissons

$$\mathcal{A}_M := \left\{ \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(x_i, \psi_i) \mid x_i \in M, \psi_i \in M^*, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{A}.$$

A cause de la bi-linéarité de  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{A}_M$  est un double-idéal de  $\mathcal{A}$ .

On appelle  $\mathcal{A}_M$  le **noyau** de  $M$ .

Nous supposons que  $\mathcal{A}$  soit semi-simple. Alors  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_M \oplus \mathcal{A}'$  où  $\mathcal{A}'$  est aussi un double-idéal et  $\mathbb{I} = \epsilon + \epsilon'$  avec  $\epsilon^2 = \epsilon \in \mathcal{A}_M$ ,  $\epsilon'^2 = \epsilon' \in \mathcal{A}'$ .

$$\text{Alors } \mathcal{A}_M = \mathcal{A} \cdot \epsilon = \epsilon \mathcal{A}. \quad \epsilon = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(x_i^\circ, \psi_i^\circ)$$

$$\text{Soit } C(\mathcal{A}, M) = \{T : M \rightarrow M \mid T \in \text{end}(M), Ta = aT \forall a \in \mathcal{A}\}$$

Le centralisateur de l'algèbre  $\mathcal{A}$ .

Clairement  $C(\mathcal{A}, M)$  est une algèbre avec représentation sur  $M$ .

$$\mathcal{C} := C(\mathcal{A}, M)$$

**Théorème 5.3** Soit  $\gamma \in C(\mathcal{C}, M)$ . Alors il existe un  $a \in \mathcal{A}_M$  tel que  $ax = \gamma x \quad \forall x \in M$ .

En d'autres mots le centralisateur du centralisateur de  $\mathcal{A}$  est contenu dans  $\mathcal{A}_M$ .

**Preuve 55** Pour tout couple  $(\psi, x) \in M^* \times M$  nous construisons un endomorphisme  $\psi \square x$  de  $M$  par

$$\psi \square x : M \rightarrow M : y \mapsto \mathcal{T}(y, \psi)x.$$

Nous démontrons que  $\psi \square x \in \mathcal{C} : \text{pour } a \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} (\psi \square x)(ay) &= \mathcal{T}(ay, \psi)x = a\mathcal{T}(y, \psi)x \\ &= a(\psi \square x)(y). \end{aligned}$$

Donc  $\gamma \in C(\mathcal{C}, M)$  commute avec tous les  $\psi \square x$ . Alors pour tout  $y \in M$  nous avons

$$(\psi \square x)(\gamma y) = \gamma((\psi \square x)y).$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{T}(\gamma y, \psi)x = \gamma(\mathcal{T}(y, \psi)x) \quad \forall y, x \in M, \psi \in M^*. \quad (5.3)$$

Nous posons  $a := \sum \mathcal{T}(\gamma x_i^\circ, \psi_i^\circ)$ . Alors (5.3) donne

$$\begin{aligned} ay &= \sum \mathcal{T}(\gamma x_i^\circ, \psi_i^\circ)y = \gamma\left(\sum \mathcal{T}(x_i^\circ, \psi_i^\circ)\right)y \\ &= \gamma(\epsilon y) = \gamma y. \end{aligned}$$

□

Ici nous avons utilisé que  $\epsilon y = y \quad \forall y \in M$ , mais ceci suit du fait que  $\epsilon a = a \quad \forall a \in \mathcal{A}_M$ , donc

$$\epsilon \mathcal{T}(x, \psi) = \mathcal{T}(\epsilon x, \psi) = \mathcal{T}(x, \psi) \quad \forall x \in M, \psi \in M^*.$$

Alors  $\mathcal{T}(\epsilon x - x, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in M^*$  et donc  $\epsilon x = x$ .

De même on trouve que  $\psi \epsilon = \psi \quad \forall \psi \in M^*$ .

Notez aussi que  $\epsilon' x = 0$  et donc  $ax = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}'$ . Donc le 'noyau'  $\mathcal{A}_M$  est 'la partie de l'algèbre qui agit de façon non-triviale sur  $M$  et son complément  $\mathcal{A}'$  la partie qui agit trivialement sur  $M$ . Dans nos considérations on pourrait alors remplacer  $\mathcal{A}$  par  $\mathcal{A}_M$  et en effet dans les exemples on a souvent que  $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}$ .

Nous voulons maintenant établir une connexion entre les idéaux à droite de  $\mathcal{A}_M$  et les sous-espaces invariants de  $\mathcal{C}$  sous  $M$  :

Pour tout idéal à droite  $R \subset \mathcal{A}_M$ ,  $R \cdot M$  est un sous-espace invariant sous les endomorphismes dans  $\mathcal{C}$  :

$$\text{pour } y = ax \in RM, a \in R \quad \text{et } \gamma \in \mathcal{C},$$

$$\text{nous avons } \gamma y = \gamma ax = a\gamma x \in RM.$$

En plus, pour tout sous-espace  $N \subset M$ ,

$$\mathcal{A}_{N, M^*} := \left\{ \sum_i \mathcal{T}(n_i, \psi_i) \mid n_i \in N, \psi_i \in M^* \right\}$$

est un idéal à droite de  $\mathcal{A}_M$

$$\mathcal{T}(n_i, \psi_i) \cdot a = \mathcal{T}(n_i, \psi_i a) \in \mathcal{A}_{NM^*} \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Nous supposons maintenant que  $N$  soit invariant sous  $\mathcal{C}$ . Ceci est certainement le cas pour tous les sous-espaces de la forme  $R \cdot M$  où  $R \subset \mathcal{A}_M$  est un idéal à droite.

Il est facilement vérifiable que

$$\mathcal{A}_{RM, M^*} \subset R \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{N, M^*} \cdot M \subset N.$$

Le premier parce que

$$\mathcal{T}(Rx, \psi) = R \cdot \mathcal{T}(x, \psi) \subset R$$

et le second parce que pour tout  $n \in N$

$$\mathcal{T}(n, \psi)x = \underbrace{(\psi \square x)}_{\in \mathcal{C}} n \in N \quad (N \text{ est invariant sous } \mathcal{C}).$$

Le théorème suivant régle la question dans quels cas le signe  $\subset$  peut être remplacé par  $=$ .



**Théorème 5.4** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre semi-simple et  $M$  un espace vectoriel qui porte une représentation de  $\mathcal{A}$ . Soit  $\mathcal{C} := C(\mathcal{A}, M)$  et  $\mathcal{A}_M$  le noyau de  $\mathcal{A}$  sur  $M$ .

- Alors l'application  $R \rightarrow RM$  entre les idéaux à droite de  $\mathcal{A}_M$  et les sous-espaces de  $M$  qui sont invariants sous  $\mathcal{C}$  est bijective.
- Tout sous-espace de  $M$  invariant sous  $\mathcal{C}$  est de la forme  $eM$  où  $e \in \mathcal{A}_M$  est idem-potent,  $e^2 = e$ .
- Le sous-espace  $eM$  est irréductible si et seulement si  $e$  est primitif, c'est-à-dire l'idéal  $e\mathcal{A}_M$  est minimal.
- Deux idéaux  $R_1 = e_1\mathcal{A}_M$  et  $R_2 = e_2\mathcal{A}_M$  sont isomorphe sous  $\mathcal{A}_M$  si et seulement si les sous-espaces  $e_jM$  sont isomorphes sous  $\mathcal{C}$ .

Ici  $R_1$  et  $R_2$  sont "isomorphes sous  $\mathcal{A}$ " s'il existe un isomorphisme des algèbres  $R_1$  et  $R_2$

$$\varphi : R_1 \rightarrow R_2 \quad \text{avec} \quad \varphi(ab) = a\varphi(b) \quad \forall a \in \mathcal{A}, b \in R_1.$$

De même  $N_1 = e_1M$  et  $N_2 = e_2M$  sont "isomorphes sous  $\mathcal{C}$ " s'il existe une transformation linéaire bijective

$$\gamma : N_1 \rightarrow N_2 \quad \text{telle que} \quad \gamma(\alpha x) = \alpha\gamma(x) \quad \forall x \in N_1, \alpha \in \mathcal{C}.$$

La preuve de ce théorème peut être trouvée dans Curtis & Reiner (p.440)

**Corollaire 5.1** Soient  $\mathcal{A}$  et  $M$  comme dans le théorème précédent, et  $e \in \mathcal{A}$  un idem-potent primitif.

Alors soit  $eM = \{0\}$ , soit  $eM$  est un sous-espace irréductible sous  $\mathcal{C}$ .

**Preuve 56** Nous savons qu'il existe un idem-potent  $\epsilon \in \mathcal{A}_M$  avec  $\epsilon a = a\epsilon$  pour tout  $a \in \mathcal{A}_M$  et  $\epsilon y = y$  pour tout  $y \in M$ .

$$\text{Soit} \quad B := \{b \in \mathcal{A} \mid bM = 0\}.$$

Si  $b \in B \cap \mathcal{A}_M$  ceci implique

$$b = b\epsilon = \sum \mathcal{T}(bx_i^\circ, \psi_i^\circ) = 0.$$

Mais pour tout  $a \in \mathcal{A}$ ,  $a\epsilon - \epsilon a \in B \cap \mathcal{A}_M$  donc  $a\epsilon = \epsilon a$ , c'est-à-dire  $\epsilon$  est un idem-potent **central** pour tout  $\mathcal{A}$ .

Pour  $a \in \mathcal{A}$  quelconque nous avons donc

$$a = \underbrace{a\epsilon}_{a_1} + \underbrace{a(1-\epsilon)}_{a_2} \quad \text{et} \quad a_1 \cdot a_2 = 0.$$

Ceci est aussi vrai pour un idem-potent primitif  $e$ . Mais comme celui-ci ne peut pas être décomposé en deux idem-potents orthogonaux soit

$$e_1 = e\epsilon \quad \text{soit} \quad e_2 = e(1 - \epsilon) \quad \text{est nulle.}$$

Dans le premier cas l'idéal de droite  $e \cdot \mathcal{A}_M = e\epsilon\mathcal{A}$  est nul et donc aussi  $eM = e\epsilon M$  est nul, dans le deuxième cas  $e = e\epsilon$  donc  $e\mathcal{A}_M = e\epsilon\mathcal{A} = e\mathcal{A} = R$  est un idéal minimal à droite et  $eM = e\epsilon M$  est un sous-espace invariant irréductible sous  $\mathcal{C}$ .  $\square$

Cette preuve montre aussi que  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{A}_M$  est une décomposition de  $\mathcal{A}$  en deux idéaux (en général non-minimaux) des deux côtés. En effet  $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$  Nous voulons encore rendre cette réciprocity entre  $\mathcal{A}_M$  et  $\mathcal{C}$  un peu plus explicite.

Soit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_M$  un idéal double simple (pas de sous-idéaux non-triviaux). Il est évident que  $M_{\mathcal{B}} := \mathcal{B}M$  est invariant sous  $\mathcal{C}$ . Nous allons montrer que  $M_{\mathcal{B}}$  est irréductible en tant que sous-espace invariant sous  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$ . Soit  $N \subset M_{\mathcal{B}}$  un sous-espace invariant **sous  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$** . Comme  $\mathcal{B}$  est un idéal, il existe une décomposition  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$  où  $\mathcal{B}'$  est aussi un double-idéal et  $\mathcal{B}\mathcal{B}' = \mathcal{B}'\mathcal{B} = \{0\}$ , nous obtenons  $N = \mathcal{A}N = \mathcal{B}N$ . Soit

$$\mathcal{B} = \bigoplus_i e_i \mathcal{A}$$

une décomposition de  $\mathcal{B}$  en idéaux à droite minimaux. Alors  $N = \bigoplus_i e_i N$ . Comme  $N \neq \{0\}$ , il existe  $e_i \in \mathcal{B}$  et  $x \in N$  avec  $e_i x \neq 0$ . Mais  $\mathcal{C}e_i x = e_i \mathcal{C}x$ , donc  $e_i M$  est un sous-espace de  $M$  qui est invariant sous  $\mathcal{C}$ , et comme  $e_i M$  est irréductible  $N \supset e_i M$ . Utilisons encore que  $\mathcal{A}e_i \mathcal{A}$  est un double idéal dans  $\mathcal{B}$ , et nous trouvons que  $\mathcal{A}e_i \mathcal{A} = \mathcal{B}$ . Alors

$$N = \mathcal{A}N \supset \mathcal{A}e_i M = \mathcal{A}e_i \mathcal{A}M = \mathcal{B}M = M_{\mathcal{B}}.$$

Avec  $N \subset M_{\mathcal{B}}$  ceci montre que  $N = M_{\mathcal{B}}$ .

Nous pouvons alors décomposer  $M_{\mathcal{B}}$  d'un côté en sous-espaces invariants sous  $\mathcal{C}$  qui sont d'après le théorème 5.4 de la forme

$$M_{\mathcal{B}} = \bigoplus_i e_i M$$

où les  $e_i$  sont des idempotents primitifs de  $\mathcal{B}$  tel que

$$\mathcal{B} = \bigoplus_i e_i \mathcal{A}$$

est la décomposition de  $\mathcal{B}$  en idéaux minimaux de droite.

De l'autre côté nous pouvons décomposer  $M_{\mathcal{B}}$  en espaces irréductibles sous  $\mathcal{A}$ ,

$$M_{\mathcal{B}} = \bigoplus_j M_j.$$

Tout  $M_j$  est isomorphe à un idéal à gauche minimal de  $\mathcal{B}$  (comm espace vectoriel). Ceci se voit comme suit : soit  $L \subset \mathcal{B}$  un idéal à gauche minimal et  $x \in M_i$ . Alors  $Lx$  est un sous-espace invariant dans  $M_i$ ,  $Lx \subset M_i$ . Donc soit  $Lx = \{0\}$ , soit  $Lx = M_i$ . Mais comme  $\mathcal{B} = \bigoplus_j L_j$  et  $\mathcal{B}M_i = \mathcal{A}M_i = M_i \neq \{0\}$  pour un  $x \in M_i$  ( $\mathcal{B}$  contient un idempotent  $e \in \mathcal{B}$  pour lequel  $b = be \quad \forall b \in \mathcal{B}$  et  $x = ex \quad \forall x \in M_i$ , alors  $\mathcal{B}M_i = M_i$ ).

Nous voulons encore rendre le résultat de cette section un peu plus concret : Soit  $M = \bigoplus_i M_i$  la décomposition de  $M$  en sous-espaces **irréductibles** sous l'algèbre  $\mathcal{A}$  (ceci est possible si  $\mathcal{A}$  est semi-simple).

Soit  $\Pi_i$  la projection sur  $M_i$  avec  $\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_j$ .

$$\text{Comme d'habitude} \quad \Pi_i(M_j) = \delta_{ij} M_j \quad \text{et} \quad \sum_i \Pi_i = \mathbb{I}.$$

Pour  $\gamma \in C(\mathcal{A}, M) = \mathcal{C}$  nous posons

$$\gamma_{ij} = \Pi_i \cdot \gamma \cdot \Pi_j$$

$$\text{tel que} \quad \gamma = \mathbb{I} \cdot \gamma \cdot \mathbb{I} = \sum_{ij} \gamma_{ij}.$$

Les  $\gamma_{ij}$  sont des homomorphismes de  $M_j$  dans  $M_i$ .

Quand  $\gamma$  varie dans tout  $C(\mathcal{A}, M)$ ,  $\gamma_{ij}$  varie dans tout  $C(\mathcal{A}, M_j \rightarrow M_i)$ , parce que toute somme  $\sum_{ij} \gamma_{ij}$  avec  $\gamma_{ij} \in C(\mathcal{A}, M_j \rightarrow M_i)$  est un élément de  $C(\mathcal{A}, M)$ . La décomposition  $\gamma = \sum_{ij} \gamma_{ij}$  est unique (multiplication de gauche avec  $\Pi_i$  et de droite avec  $\Pi_j$  donne  $\gamma_{ij} = \Pi_i \gamma \Pi_j$ ).

Ici  $C(\mathcal{A}, M_j \rightarrow M_i)$  sont les homomorphismes de  $M_j$  dans  $M_i$  qui commutent avec les représentations de  $\mathcal{A}$  sur  $M_j$  et  $M_i$ .

Pour un produit de deux  $\gamma$  et  $\gamma'$  les  $\gamma_{ij}$  et  $\gamma'_{ij}$  se multiplient comme des matrices :

$$\gamma\gamma' = \sum_{hk} \gamma_{hk} \left( \sum_{ij} \gamma'_{ij} \right) \underbrace{\Pi_k \Pi_i = \delta_{ki} \Pi_k = \delta_{ki} \Pi_k \Pi_k}_{\text{}} \sum_{hj} \left( \sum_k \gamma_{hk} \gamma'_{kj} \right).$$

$$\text{Donc} \quad (\gamma\gamma')_{hj} = \sum_k \gamma_{hk} \gamma'_{kj}.$$

Comme les  $M_j$  sont irréductibles, les  $\gamma_{ij}$  sont soit des isomorphismes, soit nulles (Lemme de Schur, 3.1).

Nous organisons alors les  $M_i$  dans des ensembles

$$(M_1 \dots M_{n_1}) \quad , \quad (M_{n_1+1} \dots M_{n_2}) \quad , \quad \text{etc.}$$

qui sont isomorphes. Dans une base adaptée à cette organisation,  $\gamma$  possède une forme en blocs :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n_1} & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 \\ & \gamma_{n_11} & \cdots & \gamma_{n_1n_1} & \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Nous introduisons des bases isomorphes dans les  $M_i$

$$\begin{aligned} M_1 &: u_{11} \dots u_{1r} \\ &\vdots \\ M_{n_1} &: u_{n_11} \dots u_{n_1r} \end{aligned} \quad \text{etc.}$$

La deuxième partie du lemme de Schur implique que par rapport à ces bases,  $\gamma_{ij} = \lambda_{ij}\mathbb{I}$ ,  $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ .

Pour  $M_1 \oplus \dots \oplus M_{n_1}$  nous avons donc

$$(\gamma u)_{k\ell} = \sum_{ij} (\gamma_{ij} u)_{k\ell} = \sum_{ij} \lambda_{ij} \delta_{kj} u_{i\ell} = \sum_i \lambda_{ik} u_{i\ell}.$$

Les colonnes  $(u_{k\ell})_{k=1}^{n_1}$  se transforment donc toutes de la même façon, indépendamment de  $\ell$  sous  $\mathcal{C}$ .

En plus, comme les  $M_j$  sont irréductibles, les lignes se transforment de façon irréductible sous  $\mathcal{A}$ . Et comme toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I} & \cdots & \lambda_{1n_1}\mathbb{I} & & \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 \\ \lambda_{n_11}\mathbb{I} & \cdots & \lambda_{n_1n_1}\mathbb{I} & & \\ & 0 & & \dots & 0 \\ & 0 & & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

représente un homomorphisme qui appartient à  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  est donné par une somme des algèbres de matrices entières,

$$\mathcal{C} \cong \mathbb{C}^{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^{n_m \times n_m}.$$

Une autre application utile de nos résultats est la suivante :

Soit  $M$  un espace vectoriel qui porte une représentation irréductible du produit direct  $G_1 \times G_2$  des deux groupes  $G_1$  et  $G_2$ . Nous supposons que  $M$  soit complètement réductible par rapport à  $G_1 \cong G_1 \times \mathbb{I}$  (par exemple si  $G_1$  est fini ou compact).

$$\text{Comme } (g_1, 1) \cdot (1, g_2) = (1, g_2) \cdot (g_1, 1) = (g_1, g_2),$$

le groupe  $G_2 \cong \mathbb{I} \times G_2$  fait partie du centralisateur

$$\mathcal{C} = C(G_1, M) \equiv C(\mathcal{A}(G_1), M).$$

Donc  $G_2$  laisse invariants les blocs de sous-espaces qui se transforment de façon équivalente sous  $G_1$ .

Si nous introduisons la même base qu'avant pour  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G_1)$ , toute ligne se transforme irréductiblement et identiquement sous  $G_1$  tandis que les colonnes se transforment irréductiblement et identiquement sous  $G_2$  (ils doivent se transformer irréductiblement sinon la représentation de  $G_1 \times G_2$  sur  $M$  ne serait pas irréductible). Ceci implique que  $M$  est isomorphe à un espace de la forme  $M_1 \otimes M_2$  où  $M_i$  porte une représentation irréductible de  $G_i$

$$x \rightarrow (x_1, x_2) \quad \text{et} \quad (g_1, g_2) \rightarrow (g_1 x_1, g_2 x_2).$$

D'autre part, tout  $M$  de cette forme est irréductible sous  $G_1 \times G_2$ .

## 5.4 Les représentations tensorielles de $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$ et quelques sous-groupes

Nous revenons alors sur la représentation tensorielle  $\varphi^{\otimes f}$  de  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$  sur  $V^{\otimes f}$  où  $V$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  :

$$A \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}), \quad A \rightarrow \varphi^{\otimes f}(A) : V^{\otimes f} \rightarrow V^{\otimes f}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_f \mapsto \varphi(A)v_1 \otimes \dots \otimes \varphi(A)v_f.$$

Comme déjà mentionné au début de ce chapitre, cette représentation commute avec celle de  $\mathcal{S}_f$  :

$$\sigma : v_1 \otimes \dots \otimes v_f \mapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(f)}.$$

Cette équation définit une représentation de l'algèbre  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  sur  $V^{\otimes f}$  et il est évident que

$$\varphi^{\otimes f}(A) \in C(\mathcal{A}(\mathcal{S}_f), V^{\otimes f}) =: \mathcal{C} \quad \forall A \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}).$$

Mais nous voulons montrer que même  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{F}$  où

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi^{\otimes f}(A_i) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, A_i \in \text{Gl}(n, \mathbb{C}), m \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{end}(V^{\otimes f})$$

est "l'algèbre enveloppante" (the envelopping algebra) de

$$\{\varphi^{\otimes f}(A) \mid A \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})\} \subset \text{iso}(V^{\otimes f}).$$

Il est évident que  $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ .

Pour démontrer que  $\mathcal{C} \equiv \mathcal{F}$  nous montrons que tout fonctionnel  $h$  sur  $\mathcal{C}$  qui annule tout  $\mathcal{F}$  est nul aussi sur  $\mathcal{C}$ .

Comme le montre l'argument suivant, ceci nous suffit :

$$\text{Soit } \mathcal{E} := \{\gamma \in \text{end}(V^{\otimes f}); f(\mathcal{F}) \equiv 0 \Rightarrow f(\gamma) = 0\}.$$

Evidemment  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ . Alors  $\mathcal{F}^\perp \supset \mathcal{E}^\perp$ . Mais pour  $\alpha \in \mathcal{F}^\perp$   $\langle \gamma, \alpha \rangle = 0 \forall \gamma \in \mathcal{F}$ , donc le fonctionnel  $\langle \cdot, \alpha \rangle$  est nul aussi sur  $\mathcal{E}$  c'est-à-dire  $\alpha \in \mathcal{E}^\perp$ . Alors  $\mathcal{F}^\perp \subset \mathcal{E}^\perp$ , donc  $\mathcal{F}^{\perp\perp} = \mathcal{F} \supset \mathcal{E}^{\perp\perp} = \mathcal{E}$ . Alors  $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ .

Soit alors  $\gamma \in \mathcal{C}$  donné par ses coefficients  $\gamma(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f)$  définis par

$$\gamma(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_f}) = \sum_{j_1 \dots j_f} \gamma(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_f}.$$

Pour que  $\gamma \in \mathcal{C}$  il faut

$$\gamma(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f) = \gamma(j_{\sigma(1)} \dots j_{\sigma(f)}; i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(f)}) \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_f. \quad (5.4)$$

Un fonctionnel linéaire  $h$  sur  $\mathcal{C}$  est de la forme

$$\gamma \mapsto \sum_{j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f} h(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f) \gamma(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f) \in \mathbb{C}$$

où les coefficients  $h(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f)$  peuvent être choisis tels qu'ils satisfont aussi la condition de symétrie (5.4).

$$\text{Nous posons } \varphi(A)e_i = \sum_{j=1}^n e_j \xi_{ji}.$$

Alors, si  $h$  annule  $\mathcal{F}$  nous avons

$$0 = \sum_{j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f} h(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f) \xi_{j_1 i_1} \dots \xi_{j_f i_f}.$$

Appellons les  $\{\xi_{ij}\} \quad \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}\}$  alors  $h$  est de la forme

$$0 = P(\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}) = \sum_{k_i=0}^f \beta(k_1, \dots, k_{n^2}) \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_{n^2}^{k_{n^2}}$$

où  $k_1 + \dots + k_{n^2} = f$  et

$$\beta(k_1, \dots, k_{n^2}) = \frac{f!}{k_1! \dots k_{n^2}!} h(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f).$$

Ici  $h(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f)$  est un des coefficients où les index  $ij$  avec  $\xi_{ij} = \lambda_1$  apparaissent  $k_1$  fois, etc.

Soit  $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2})$  le polynôme  $\det(\xi_{ij})$ . Comme  $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}) \neq 0$  sur  $Gl(n, \mathbb{C})$  mais  $Q = 0$  sur toutes les matrices  $M \notin Gl(n, \mathbb{C})$ , la condition  $P(\lambda_1 \dots \lambda_{n^2}) = 0$  sur  $Gl(n, \mathbb{C})$  est équivalente à  $P(\lambda_1 \dots \lambda_{n^2})Q(\lambda_1 \dots \lambda_{n^2}) \equiv 0$  sur  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Comme le polynôme  $Q \not\equiv 0$ , ceci implique  $P \equiv 0$  sur  $\mathbb{C}^{n^2}$ , donc tous les  $h(j_1, \dots, j_f; i_1, \dots, i_f) \equiv 0$ .

Nous avons donc démontré le théorème suivant

**Théorème 5.5** *Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n$  et  $\varphi$  une représentation de  $Gl(n, \mathbb{C})$  sur  $V$ . Alors, la représentation tensorielle  $\varphi^{\otimes f}$  sur  $V^{\otimes f}$  est complètement réductible et les sous-espaces irréductibles de  $V^{\otimes f}$  sont obtenus comme suit : soit  $e \in \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  un idem-potent primitif (caractérisé par un diagramme de Young  $D$ ).*

*Alors soit  $eV^{\otimes f} = \{0\}$ , soit  $eV^{\otimes f}$  est un sous-espace irréductible (non-trivial) de  $\varphi^{\otimes f}$ . Tous les sous-espaces irréductibles sont de cette forme. En plus  $eV^{\otimes f}$  et  $e'V^{\otimes f}$  sont isomorphes si et seulement si  $e\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  et  $e'\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  sont des idéaux à droite isomorphes, c'est-à-dire si les diagrammes  $D$  et  $D'$  avec  $e = \hat{e}(D)$  et  $e' = \hat{e}(D')$  sont associés au même tableau  $T$ .*

(Le chapeau  $\hat{\phantom{x}}$  est défini dans l'éq. (5.5) à la page suivante.)

**Lemme 5.6** *(Nous utilisons la notation du théorème précédent)*

*$\mathcal{F}$  est aussi "l'algèbre enveloppante" (the enveloping algebra) de  $SU(n)$ ,  $\mathcal{F}(SU(n))$ .*

**Preuve 57** *(du lemme 5.6)*

*Pour  $U \in U(n)$  nous avons  $(\det U)^{-1/n} \cdot U \in SU(n)$ .*

$$\text{Donc } \mathcal{F}(SU(n)) = \mathcal{F}(U(n)).$$

Soit alors  $U = (\xi_{ij}) \in U(n)$ . Le polynôme  $P$  est défini comme avant, donc  $P(U) = 0$ . Pour  $H$  une matrice hermitéenne  $U(t) = \exp(itH)$  est unitaire et  $P(\exp(itH)) = 0$ . Alors

$$0 = \frac{d}{dt}P(\exp(itH)) = i \sum_{ij} H_{ij} \frac{\partial P(U(t))}{\partial \xi_{ij}}$$

pour toute matrice hermitéenne. Mais comme toute matrice  $(\beta_{kj})$  est la somme d'une matrice hermitéenne plus  $i$  fois la somme d'une autre matrice hermitéenne, il s'ensuit que

$$\sum_{ij} \frac{\partial P}{\partial \xi_{ij}} \beta_{ij} \equiv 0$$

pour toute matrice  $(\beta_{ij})$ . Ceci implique que

$$\frac{\partial P}{\partial \xi_{ij}} \equiv 0,$$

et donc  $P = \text{constant}$ . Mais  $P$  est un polynôme homogène de degré  $f \geq 1$ . Donc il en suit que  $P = 0$ .  $\square$

### Remarque :

Il peut quand-même arriver que des représentations inéquivalentes sous  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})$  deviennent équivalentes sous  $\text{Sl}(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$  ou  $\text{SU}(n)$  (voir exercices).

Dans la section 5.2 nous avons déterminé les idem-potents primitifs  $e$ , tel que  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)e$  est un idéal à gauche minimal. Pour les sous-espaces invariants de  $V^{\otimes f}$  sous  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})^{\otimes f}$  nous avons besoin des idem-potents  $\hat{e}$  tels que  $\hat{e}\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  est un idéal minimal à droite. Pour les trouver nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : \mathcal{A}(\mathcal{S}_f) &\rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}_f) : a \mapsto \hat{a} \\ a = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \alpha(\sigma)\sigma &\mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \alpha(\sigma^{-1})\sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \alpha(\sigma)\sigma^{-1} = \hat{a}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Il est évident que  $\hat{\hat{a}} = a$  et  $\hat{a}\hat{b} = \hat{\hat{a}}\hat{b}$ .

En plus, si  $L$  est un idéal à gauche (minimal),  $\hat{L}$  est un idéal à droite (minimal).

Si  $e$  est un idem-potent minimal à gauche,  $\hat{e}$  en est un à droite.

Soit alors

$$e(D) = \sum_{p \in \Sigma(D), q \in \Omega(D)} \delta_q pq$$



un idem-potent minimal à gauche, donc

$$\hat{e}(D) = \sum_{p \in \Sigma(D), q \in \Omega(D)} \delta_q q p \quad (\delta_q = \delta_{q^{-1}})$$

est un idem-potent minimal à droite.

Les sous-espaces invariants de  $V^{\otimes f}$  sous  $\text{Gl}(n, \mathbb{C})^{\otimes f}$  sont alors de la forme

$$\hat{e}(D)V^{\otimes f}$$

pour un diagramme de Young donné. Deux espaces  $\hat{e}(D)V^{\otimes f}$  et  $\hat{e}(D')V^{\otimes f}$  portent des représentations équivalentes si et seulement si les diagrammes  $D$  et  $D'$  sont associés au même tableau.

**Exemple :**

$$f = 3$$

$$D_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad D_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad D_3 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\Sigma_1 = \{(1, 2) \equiv p_1, \text{id}\} \quad \Omega_1 = \{(1, 3) \equiv q_1, \text{id}\}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= -q_1 p_1 - q_1 + p_1 + \text{id} \\ &= -(1, 2, 3) - (1, 3) + (1, 2) + \text{id} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Pour  $t \in V^{\otimes 3}$

$$(\hat{e}_1 t)_{ijk} = t_{ijk} + t_{jik} - t_{kji} - t_{kij}$$

$$\hat{e}_1 V^{\otimes 3} = \{\text{les tenseurs qui sont invariants sous "l'opérateur de symétrie" } \frac{1}{4} \hat{e}_1\}$$

$$\Sigma_2 = \mathcal{S}_3, \quad \Omega_2 = \{\text{id}\}$$

$$\hat{e}_2 V^{\otimes 3} = \{\text{les tenseurs totalement symétriques}\}$$

$$\Sigma_3 = \{\text{id}\}, \quad \Omega_3 = \mathcal{S}_3$$

$$\hat{e}_3 V^{\otimes 3} = \{\text{les tenseurs totalement anti-symétriques}\}$$

## 5.5 Application physique : les termes $(L, S)$ d'un atome

Nous considérons un atome compliqué avec  $f$  électrons. Nous voulons classifier les états propres de l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^f \mathbf{p}_i^2 - \sum_{i=1}^f \frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i < k} \frac{e^2}{r_{ik}}$$

$$r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \quad , \quad r_i = |\mathbf{x}_i|.$$

Nous supposons que le couplage spin-orbit soit négligeable et  $(L, S)$  sont alors des bons nombres quantiques (les opérateurs  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{S}$  commutent avec  $H$ ).

L'espace de Hilbert du système des  $f$  électrons est la partie anti-symétrique de

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{3f}) \otimes (\mathbb{C}^2)^f$$

et le groupe de symétrie est  $O(3) \times \mathcal{S}_f$ . Le sous-espace d'une énergie  $E$  fixe est la partie anti-symétrique de

$$M \otimes (\mathbb{C}^2)^f \quad , \quad M \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{3f})$$

où  $M$  porte une représentation irréductible de  $O(3) \times \mathcal{S}_f$  s'il (comme nous le supposons) n'y a pas de dégénérescence accidentielle (noter que notre hamiltonien ne dépend que de l'orbit).

**Proposition 5.4**  *$M$  possède une parité définie.*

**Preuve 58**  $O(3) = SO(3) \times \{1, P\}$  où  $P : \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  est l'opérateur de parité.

D'après ce que nous avons dit, nous pouvons choisir une base sur  $M$  que nous écrivons en forme de blocs tels que chaque ligne se transforme irréductiblement sous  $SO(3) \otimes \mathcal{S}_f$  et chaque colonne se transforme irréductiblement sous  $\{1, P\}$ . Mais  $M$  est irréductible, donc il ne peut y avoir qu'un seul bloc et  $\{1, P\}$  est abélien donc ce bloc ne peut avoir qu'une seule ligne.  $\square$

Alors  $M$  porte aussi une représentation irréductible de  $SO(3) \otimes \mathcal{S}_f$ . Nous pouvons donc introduire une base de la forme

$$M = M(\Delta, L) : \begin{array}{cccc} \varphi_{-L,1}^L & \varphi_{-L+1,1}^L & \cdots & \varphi_{L,1}^L \\ \varphi_{-L,2}^L & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{-L,r}^L & \varphi_{-L+1,r}^L & \cdots & \varphi_{L,r}^L \end{array}$$

telle que toute ligne se transforme avec la représentation  $D^{(L)}$  de  $SO(3)$  et toute colonne se transforme avec la représentation  $\Delta$  de  $\mathcal{S}_f$  qui est supposée avoir la dimension  $r$  (la représentation  $\Delta$  provient d'un tableau  $T$  donné).

Considérons alors  $(\mathbb{C}^2)^f$ . D'abord, aussi longtemps que nous ne considérons qu'un type de particules nous pouvons choisir la parité = 1 (d'après le lemme de Schur la parité est  $\pm 1$ , mais une phase générique est arbitraire).

La réduction de  $(\mathbb{C}^2)^f$  par rapport à  $SU(2) \otimes \mathcal{S}_f$  donne

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes f} = \bigoplus_{(\Delta', S)} N(\Delta', S).$$

Dans  $N(\Delta', S)$  nous introduisons une base analogue à celle de  $M(\Delta, L)$ .

**Remarques :**

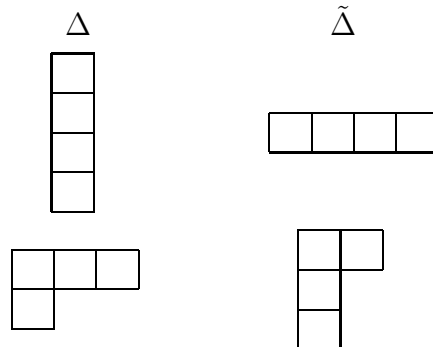
1. Le tableau de Young qui correspond à  $\Delta'$  ne peut contenir que deux lignes parce que la dimension de  $\mathbb{C}^2$  est 2 et une représentation de  $\mathcal{S}_f$  sur  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes f}$  ne peut donc pas être antisymétrique pour plus que deux éléments.
2. D'après nos développements précédents,  $\Delta'$  est uniquement déterminé par  $S$ . Par construction nous avons réuni dans un bloc tous les représentations de  $SU(2)$  qui sont isomorphes et toutes les représentations isomorphes de  $\mathcal{S}_f$ .

Nous avons donc une décomposition de la forme

$$M(\Delta, L) \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes f} = \bigoplus_S M(\Delta, L) \otimes N(\Delta', S).$$

Nous cherchons la partie antisymétrique de cet espace.

Dans l'appendice nous montrons que la représentation antisymétrique est continue dans  $\Delta \otimes \Delta'$  si et seulement si  $\Delta'$  est le tableau de Young obtenu de  $\Delta$  par échange de lignes et de colonnes, et dans ce cas seulement une fois. Nous désignons cette représentation par  $\tilde{\Delta}$ ; évidemment  $\tilde{\tilde{\Delta}} = \Delta$ .





Jusque là nous avons vu que (sans dégénérence accidentielle) une valeur d'énergie possède une parité définie, un  $L$  défini et un  $S$  défini. En plus, la classe de symétrie de l'orbite,  $\Delta$  détermine un unique  $\Delta' = \tilde{\Delta}$  qui lui détermine le spin. Donc la symétrie de l'orbite fixe le spin !

Et  $\Delta$  (classe de symétrie de l'orbite) ne peut pas avoir plus que deux colonnes (deux électrons équivalents). Ceci est l'effet du principe de Pauli :

$$\text{antisym}(M(\Delta, L) \otimes \mathbb{C}^{2f}) \subset M(\Delta, L) \otimes N(\tilde{\Delta}, S).$$

Dans l'appendice nous dérivons aussi que les éléments de matrice de  $\tilde{\Delta}$  sont liés à deux de  $\Delta$  par  $\tilde{\Delta}_{kk'}(\sigma) = \delta_\sigma \bar{\Delta}_{kk'}(\sigma)$ . Pour une base  $\varphi_{m_L, k}^L$  de  $M(\Delta, L)$  et une base  $u_{m_S, k}^S$  de  $N(\tilde{\Delta}, S)$  nous montrons alors que les éléments

$$\Phi_{m_L, m_S}^{(L, S)} := \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=1}^r \varphi_{m_L, k}^L \otimes u_{m_S, k}^S \quad (5.7)$$

$$r = \dim \Delta \quad , \quad -L \leq m_L \leq L \quad , \quad -S \leq m_S \leq S$$

porte la représentation totalement antisymétrique de  $\mathcal{S}_f$ . Ils se transforment sous une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_f$  comme

$$\Phi_{m_L, m_S}^{(L, S)} \xrightarrow{\sigma} \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_k \sum_{k'k''} \Delta_{kk'}(\sigma) \varphi_{m_L, k'}^L \otimes \delta_\sigma \bar{\Delta}_{kk''}(\sigma) \cdot u_{m_S, k''}^S = \delta_\sigma \Phi_{m_L, m_S}^{(L, S)},$$

la dernière égalité vient du fait que  $\Delta$  est unitaire et alors  $\sum_k \Delta_{kk'} \bar{\Delta}_{kk''} = \delta_{k'k''}$ .

Alors les vecteurs  $\Phi_{m_L, m_S}^{(L, S)}$  donnés dans (5.7) forment une base de la partie antisymétrique de  $M(\Delta, L) \otimes N(\tilde{\Delta}, S)$ .

Ceci nous a montré qu'on peut obtenir  $\tilde{\Delta}$  et  $S$  à partir des  $(\Delta, L)$  donnés. Maintenant nous voulons déterminer les  $(\Delta, L)$  possible pour un atome donné. Pour obtenir toutes les valeurs  $(L, S)$  d'un atome compliqué nous commençons avec l'hamiltonien

$$H_o = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^f \mathbf{p}_i^2 + \sum_{i=1}^f V(r_i)$$

où  $V(r_i)$  est le potentiel de Coulomb du noyau qui prend en compte la répulsion des autres électrons par une approximation "meanfield" à symétrie sphérique.

On peut montrer que les différentes couches peuvent être traitées indépendamment.

Nous considérons alors une couche à  $f$  électrons et nous voulons déterminer ses valeurs  $(L, S)$ .

Nous allons résoudre ce problème avec nos outils de la théorie de groupes. On peut aussi le résoudre de façon plus élémentaire, mais le travail à effectuer augmente très rapidement avec le nombre  $f$  d'électrons.

Nous considérons une couche avec base  $\varphi_m^\ell$  (i.e. chaque électron porte la représentation  $D^{(\ell)}$  sous rotations de l'orbite, ou chaque électron a moment cinétique orbital  $\ell$ ). Soit  $V$  l'espace linéaire engendré par cette base,  $(-\ell \leq m \leq \ell)$ . Pour déterminer les valeurs  $(L, S)$  de  $f$  électrons dans cette couche, nous devons réduire  $V^{\otimes f}$  par rapport à la représentation de  $\text{SO}(3) \times \mathcal{S}_f$ . Nous savons que seuls sont admis des représentations de  $\mathcal{S}_f$  qui ne contiennent pas plus que 2 lignes (principe de Pauli).

Comme l'action de  $\text{SO}(3)$  sur  $V^{\otimes f}$  commute avec celle de  $\mathcal{S}_f$ ,  $\text{SO}(3)$  fait partie du centralisateur :

$$\text{SO}(3) \subset \mathcal{C} = C(\mathcal{S}_f, V^{\otimes f}).$$

Du lemme 5.6 nous savons que  $\mathcal{C}$  est générée par  $\text{SU}(2\ell + 1)$ .

Supposons une décomposition de  $V^{\otimes f}$  en blocs de représentations irréductibles de  $\mathcal{S}_f$  et de  $\mathcal{C}$ . Chaque bloc correspond à un tableau de Young  $T$ . Le spin,  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes f}$  se transforme avec le tableau associé  $\tilde{T}$ . Les valeurs possibles de  $L$  sont obtenus en réduisant la représentation tensorielle de  $\text{SU}(2\ell + 1)$  par rapport à  $\text{SO}(3)$ .

L'immersion  $\text{SO}(3) \subset \text{SU}(2\ell + 1)$  est telle que les vecteurs de base  $\varphi_m^\ell$  se transforment avec  $R \in \text{SO}(3) \Rightarrow$

$$\varphi_m^\ell \xrightarrow{R} \varphi_m^\ell = \sum_{m'} D_{mm'}^\ell(R) \varphi_{m'}^\ell$$

(La matrice  $D^\ell(R) \in \text{SU}(2\ell + 1)$ ).

Avant une discussion systématique nous allons présenter un exemple :

**Exemple :**

Nous considérons trois électrons  $p$  (c'est-à-dire  $\ell = 1$ ). Les seuls tableaux admis sont (avec max. deux colonnes) :

$$T = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \text{ n'est pas admis} \right)$$

Donc

$$\tilde{T} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

D'après la formule de la dimension (voir théorème 5.6) les dimensions respectives correspondantes aux représentations de SU(2) sur  $\hat{e}(\tilde{T})(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$  sont

$$\dim(\hat{e}(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array})\mathbb{C}^6) = h_1 = f_1 + 1 = 4 \quad (5.8)$$

$$\dim(\hat{e}(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array})\mathbb{C}^6) = \frac{h_1 - h_2}{2 - 1} = f_1 + 1 - f_2 = 2 \quad (5.9)$$

Ce qui correspond à  $S = \frac{3}{2}$  et  $S = \frac{1}{2}$ .

Maintenant nous allons déterminer les représentations de  $\text{SO}(3) \subset \text{SU}(3)$ .

La dimension de  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  est 1, ce qui correspond à  $L = 0$ . La dimension de la représentations de SU(3) correspondante à  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$  est 3 (voir théorème 5.6), donc ce tableau correspond à  $L = 1$ . En plus  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  correspond à la représentation fondamentale de SU(3), sa dimension est aussi 3 donc  $L = 1$ . Mais (voir appendice)

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (5.10)$$

$$D^{(1)} \otimes D^{(1)} = D^{(2)} \oplus D^{(1)} \oplus D^{(0)}. \quad (5.11)$$

Comme  $L = 0$  correspond à  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ ,  $L = 1, 2$  correspondent à  $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ . Cette représentations irréductible de SU(3) se réduit alors sur  $\text{SO}(3) \subset \text{SU}(3)$ .

La notation usuelle de la spectroscopie est  $^{2S+1}X(L)$  où  $X(0) = S$ ,  $X(1) = P$ ,  $X(2) = D$ ,  $X(3) = F$ ,  $X(4) = G$  etc. nous obtenons alors les valeurs suivantes pour 3 électrons  $p$  :

$$^4S, \quad ^2P, \quad ^2D. \quad (5.12)$$

## 5.6 La décomposition d'une représentation tensorielle de SU(2ℓ + 1) en représentations irréductibles de SO(3)

Pour dériver le 'branching' de SO(3) dans SU(2ℓ + 1) nous avons besoin de la formule suivante pour le caractère d'une représentation tensorielle de SU(2ℓ + 1) :

**Théorème 5.6** *Nous considérons la représentation tensorielle de  $SU(2\ell+1)$  correspondante au tableau de Young  $T = [f_1, \dots, f_m]$  sur  $V^{\otimes f}$  avec  $\dim V = 2\ell + 1$  et  $\sum_{i=1}^m f_i = f$ ,  $f_i \geq f_{i+1}$ ,  $m < 2\ell + 1$ . Cette dernière inégalité peut être requise parce que une colonne de longueur  $2\ell + 1$  correspond à un facteur  $\det A$  dans la représentation qui est 1 sur  $SU(2\ell + 1)$ .*

*Pour une classe donnée par la matrice diagonale*

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \epsilon_{2\ell+1} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_i \in U(1) \quad (5.13)$$

le caractère  $\chi_T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1})$  a la forme suivante : posons

$$h_i = f_i + 2\ell + 1 - i \quad \forall \quad 1 \leq i \leq 2\ell + 1$$

(nous définissons  $f_i = 0$  si  $i > m$ , donc  $h_{2\ell+1} = 0$ ). Soient  $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1})$  et

$$|\epsilon^{2\ell}, \dots, \epsilon, 1| := \det \begin{pmatrix} \epsilon_1^{2\ell} & \epsilon_1^{2\ell-1} & \dots & \epsilon_1 & 1 \\ \epsilon_2^{2\ell} & & \dots & \epsilon_2 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \epsilon_{2\ell+1}^{2\ell} & & \dots & \epsilon_{2\ell+1} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

$$|\epsilon^{h_1}, \dots, \epsilon^{h_{2\ell+1}}| := \det \begin{pmatrix} \epsilon_1^{h_1} & \dots & \epsilon_1^{h_{2\ell+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{2\ell+1}^{h_1} & \dots & \epsilon_{2\ell+1}^{h_{2\ell+1}} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Le caractère  $\chi_T$  de la représentation tensorielle de  $SU(2\ell + 1)$  qui correspond au tableau  $T$  est alors donné par

$$\chi_T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1}) = \frac{|\epsilon^{h_1}, \dots, \epsilon^{h_{2\ell+1}}|}{|\epsilon^{2\ell}, \dots, \epsilon, 1|} \quad (5.16)$$

La dimension  $N[f_1, \dots, f_m]$  de la représentations de  $SU(2\ell + 1)$  correspondante au tableau  $T = [f_1, \dots, f_m]$  est

$$N[f_1, \dots, f_m] = \frac{\prod_{i < k} (h_i - h_k)}{\prod_{i < k} (k - i)}, \quad \text{avec } h_i = f_i + 2\ell + 1 - i. \quad (5.17)$$

Nous donnons la preuve de ce théorème dans l'appendice.

Les  $\chi_T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1})$  forment des polynômes homogènes et symétriques de degré

$f$ . Ils sont appelés polynômes de Schur et jouent un rôle important aussi dans d'autres domaines des mathématiques et de la physique.

Nous considérons  $f$  électrons dans la couche  $\ell$ . Soit maintenant  $\chi_T(\epsilon_{-\ell}, \dots, \epsilon_\ell)$  le caractère de la représentation de  $SU(2\ell + 1)$  correspondante au tableau  $T = [f_1, \dots, f_m]$ . Sur le sous-groupe  $SO(3)$ ,  $D^{(\ell)}(R)$  est diagonal si  $R$  est une rotation d'un angle  $\varphi$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_z$ . Dans ce cas il est de la forme

$$D^{(\ell)}(R(\mathbf{e}_z, \varphi)) = \begin{pmatrix} \epsilon^{-\ell} & 0 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon^\ell \end{pmatrix} \equiv D^{(\ell)}(\epsilon), \quad \epsilon = \exp(i\varphi). \quad (5.18)$$

Le caractère de  $D^{(\ell)}(\epsilon)$  est

$$Y(\epsilon) = \chi_T(\epsilon^{-\ell}, \dots, \epsilon^\ell). \quad (5.19)$$

Le caractère de la représentation irréductible  $D^{(L)}$  de  $SO(3)$  est

$$\chi^{(L)}(\epsilon) = \sum_{m=-L}^L \epsilon^m = \frac{\epsilon^{L+1} - \epsilon^{-L}}{\epsilon - 1}, \quad \epsilon \neq 1. \quad (5.20)$$

L'expansion de  $Y$  en caractères primitifs est de la forme

$$Y(\epsilon) = \sum_L a_L \chi^{(L)}(\epsilon), \quad (\epsilon - 1)Y(\epsilon) = \sum_L a_L (\epsilon^{L+1} - \epsilon^{-L}) \quad (5.21)$$

où  $a_L$  est la multiplicité de  $D^{(L)}$  dans la représentation donnée par  $T$ . Si nous écrivons

$$Y(\epsilon) = \sum_m b_m \epsilon^m \quad (5.22)$$

et nous comparons les coefficients avec (5.21) nous trouvons

$$a_L = b_L - b_{L+1} = b_{-L} - b_{-(L+1)}.$$

Nous appliquons cette méthode d'abord à la représentation  $T = \square \square$  qui a  $h_1 = f_1 + 2\ell + 1 - 1 = 2\ell + 2$ ,  $h_i = 2\ell + 1 - i \forall i > 1$ . Avec la formule (5.16) ceci donne

$$\chi_T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1}) = \sum_{i \leq j} \epsilon_i \epsilon_j. \quad (5.23)$$

Ce résultat est obtenu en développant les déterminants dans (5.16) d'après la première colonne qui est la seule qui est différente pour les deux matrices.

Pour  $Y$  ceci donne

$$Y(\epsilon) = \sum_{-\ell \leq m_1 \leq m_2 \leq \ell} \epsilon^{m_1 + m_2}. \quad (5.24)$$



De ceci on conclut aisément

$$L = 2\ell, 2\ell - 2, \dots, 0.$$

Pour  $T = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  on obtient de la même façon

$$\chi_T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1}) = \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j, \quad (5.25)$$

ce qui donne

$$L = 2\ell - 1, 2\ell - 3, \dots, 1.$$

Pour  $T = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  le caractère est

$$\chi_T(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2\ell+1}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_r}. \quad (5.26)$$

La valeur maximal de  $L$  est alors  $L_{\max} = \ell + (\ell - 1) + \dots + (\ell - r + 1) = r\ell - \frac{r(r-1)}{2} = \frac{r}{2}(2\ell + 1 - r)$  avec multiplicité 1. Les formules générales sont compliquées mais dans des cas simples, les valeurs possibles pour  $L$  sont assez faciles à calculer. La dimension de

$$T = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{est} \quad \dim D(T) = \chi_T(1) = \binom{2\ell + 1}{r},$$

ce qui est parfois utile à savoir.

**Exemple :** Trois électrons  $d$  ( $\ell = 2$ ).

Comme nous avons déjà vu, les tableaux admis pour 3 électrons sont

$$T_1 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \text{avec} \quad \tilde{T}_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_2 = T_2.$$

Les représentations de  $SU(2)$  sur  $\mathbb{C}^6$  correspondant à  $\tilde{T}_1$  et  $\tilde{T}_2$  sont  $S = 3/2$  et  $S = 1/2$  respectivement (voir exemple précédent, éqs. (5.8,5.9).)

Pour trouver le 'branching'  $SU(2\ell + 1) = SU(5) \supset SO(3)$ , nous utilisons que la valeur maximal pour  $T_1$  est  $L_{\max} = \frac{3}{2}(5 - 3) = 3$  avec dimension 7. Comme la dimension de  $T_1$  est 10 et  $L = 0$  n'apparaît pas, la seule autre valeur possible est  $L = 1$ . Nous utilisons encore (voir appendice) que

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}. \quad (5.27)$$

La dimension de  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  est 10 avec  $L = 2\ell - 1 = 3$  et  $L = 1$ .  $\square$  est la représentation fondamentale à dimension 5, et  $L = 2$ . Donc  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  contient

$$(D^{(3)} \oplus D^{(1)}) \otimes D^{(2)} = D^{(5)} \oplus D^{(4)} \oplus 2D^{(3)} \oplus 2D^{(2)} \oplus 2D^{(1)}.$$

Avec le résultat pour  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  ceci donne pour

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad L = 5, 4, 3, (2)^2, 1.$$

Finalement, les termes  $(L, S)$  des trois électrons  $d$  sont

$${}^2P, ({}^2D)^2, {}^2F, {}^2G, {}^2H, {}^4P, {}^4F.$$

Ceci sont les représentations de  $SO(3)_{\text{orbit}} \times SU(2)_{\text{spin}}$  que trois électrons  $d$  i.e. avec  $\ell = 2$  peuvent porter. Pour trouver laquelle de ces représentations correspond à l'état fondamental une étude plus approfondie qui prend en compte l'intégrations entre les électrons est nécessaire.

## 5.7 Appendices

Dans les deux sections 5.7.1 et 5.7.2 nous présentons la preuve du théorème 5.6.

### 5.7.1 Les caractères irréductibles pour $U(n)$ et $\mathcal{S}_f$

Comme les matrices de  $U(n)$  peuvent être diagonalisées, toute classe  $\{ASA^{-1} \mid A \in U(n)\}$  d'un élément  $S \in U(n)$  contient une matrice diagonale

$$B = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n \end{pmatrix} \quad \epsilon_j = e^{i\beta_j} \in U(1), \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Les valeurs  $\epsilon_1 \dots \epsilon_n$  sont les valeurs propres de la matrice  $B$ . Ceux-ci sont invariants sous conjugaison et alors déterminées uniquement. Mais toute matrice qui est obtenue de  $B$  par une permutation des valeurs  $(\epsilon_1 \dots \epsilon_n)$  est dans la même classe. Soit

$$D = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_n.$$

Tout élément de  $U(n)$  est conjugué à un élément de  $D$  et une permutation des  $\epsilon_j$  est dans la même classe.

Le caractère  $\chi(\epsilon_1 \dots \epsilon_n)$  est alors une fonction symétrique sur  $D$ . Comme  $D = U(1) \times \dots \times U(1)$  est commutative, la représentation de  $U(n)$  sur un espace vectoriel  $V$  se décompose en des représentations unidimensionnelles de  $D$ .

Soit  $(v_k)_{k=1}^n$  une base adaptée à cette décomposition.

Pour  $A = \text{diag}(e^{i\alpha_1}, \dots, e^{i\alpha_n}) \in D$  et  $B = \text{diag}(e^{i\beta_1}, \dots, e^{i\beta_n}) \in D$  nous avons donc

$$Av_k = f_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)v_k$$

$$Bv_k = f_k(\beta_1, \dots, \beta_n)v_k$$

$$\begin{aligned} \text{Et } ABv_k &= f_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)f_k(\beta_1, \dots, \beta_n)v_k \\ &= f_k(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)v_k. \end{aligned}$$

Comme la représentation peut être choisie **unitaire**  $|f_k| = 1$ .  $f_k$  est un caractère primitif de  $U(1) \times \dots \times U(1)$ .

Nous supposons que la représentation de  $U(n)$  soit continue, alors  $f_k$  est continue.

**Lemme 5.7** Soient  $A_1, \dots, A_n$  des groupes abéliens (topologiques). Alors tout caractère primitif de  $A_1 \times \dots \times A_n$  est de la forme

$$\chi : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{C} : (x_1 \dots x_n) \rightarrow \chi_1(x_1) \cdot \chi_2(x_2) \cdots \chi_n(x_n)$$

où  $\chi_i$  est un caractère primitif de  $A_i$ .

**Preuve 59** Si  $\chi_i$  est un caractère primitif de  $A_i$ ,  $\chi = \chi_1 \cdots \chi_n$  est évidemment un caractère primitif de  $A_1 \times \dots \times A_n$ .

En plus, si  $e_i$  est l'identité sur  $A_i$  et  $\chi$  est un caractère primitif de  $A_1 \times \dots \times A_n$ ,

$$\chi_i(x_i) := \chi(e_1, \dots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$$

est un caractère primitif de  $A_i$  et  $\chi(x_1, \dots, x_n) = \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n)$ .  $\square$

Les caractères primitifs de  $U(1)$  sont

$$\chi(\alpha) = e^{ih\alpha} \quad , \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Alors  $f_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$  est de la forme

$$f_k(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \exp \left( i \sum_{m=1}^n h_m^{(k)} \alpha_m \right) = \prod_{m=1}^n (\epsilon_m)^{h_m^{(k)}}, \quad \epsilon_m = \exp(i\alpha_m).$$

Avec

$$\chi(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = \sum_k f_k(\epsilon_1 \dots \epsilon_n)$$

il s'ensuit que  $\chi$  est un polynôme dans les  $\epsilon_j$  avec des coefficients intégraux et positifs.

Pour continuer nous avons besoin de la mesure de Haar sur  $U(n)$ . Pour les fonctions  $f$  **sur les classes** on trouve ([12] Weyl, “*Classical Groups*”)

$$\int_{U(n)} f(\epsilon_1 \dots \epsilon_n) = C \int_o^{2\pi} d^n \alpha |\Delta|^2 f(\alpha_1 \dots \alpha_n), \quad \epsilon_i = \exp(i\alpha_i)$$

$$\Delta = \prod_{i < k} (\epsilon_i - \epsilon_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon_1^{n-1}, & \dots, & \epsilon_1, & 1 \\ \epsilon_2^{n-1}, & \dots, & \epsilon_2, & 1 \\ \dots & & \dots & \dots \\ \epsilon_n^{n-1}, & \dots, & \epsilon_n, & 1 \end{pmatrix} =: |\epsilon^{n-1}, \dots, \epsilon, 1|$$

est le déterminant de Vandermonde et le facteur  $C$  est fixé par la normalisation

$$1 = C \int d^n \alpha |\Delta|^2.$$

L'expansion du déterminant donne

$$\Delta = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \delta_\sigma \exp[i((n-1)\alpha_{\sigma(1)} + (n-2)\alpha_{\sigma(2)} + \dots + 0 \cdot \alpha_{\sigma(n)})].$$

Soit  $P_{h_1 \dots h_n}$  le polynôme antisymétrique en  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  donné par

$$P_{h_1 \dots h_n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \delta_\sigma e^{i \sum h_k \alpha_{\sigma(k)}} \quad , \quad h_1 > h_2 > \dots > h_n, \quad h_i \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\int_{[0, 2\pi]^n} d^n \alpha \bar{P}_{h_1 \dots h_n} P_{h'_1 \dots h'_n} = \begin{cases} n! [2\pi]^n & \text{si } h_k = h'_k \forall k = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, comme  $\Delta$  est un tel polynôme, nous obtenons  $C = \frac{1}{n!(2\pi)^n}$ .  
Pour  $\chi$  irréductible (primitif) nous avons donc

$$[n!(2\pi)^n]^{-1} \int d^n \alpha \overline{\Delta \cdot \chi} \cdot \Delta \cdot \chi = 1.$$

Nous posons  $\Gamma = \Delta \cdot \chi$ .

$\Gamma$  est un polynôme antisymétrique avec des coefficients intégraux. Il possède donc la forme suivante :

$$\Gamma = \sum_{(h)} \alpha_{h_1 \dots h_n} P_{h_1 \dots h_n} \quad , \quad \alpha_{h_1 \dots h_n} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{et } \sum_{(h)} |\alpha_{h_1 \dots h_n}|^2 = 1.$$

C'est-à-dire  $\Gamma = \pm P_{h_1 \dots h_n}$  pour certains  $h_1 < \dots < h_n$ ,  $h_i \in \mathbb{Z}$ .

Nous voulons montrer que le signe  $-$  est exclu. Pour ceci nous allons considérer le terme "supérieur" du polynôme  $\Gamma$ . Un terme  $\epsilon_1^{k_1} \dots \epsilon_n^{k_n}$  est appelé "supérieur" à  $\epsilon_1^{k'_1} \dots \epsilon_n^{k'_n}$  si le premier  $k_i$  qui diffère de  $k'_i$  est plus élevé que celui-ci.

Le terme supérieur de  $\pm P_{h_1 \dots h_n}$  est  $\pm \epsilon_1^{h_1} \dots \epsilon_n^{h_n}$ .

Le terme supérieur de  $\Delta$  est  $\epsilon_1^{n-1} \dots \epsilon_n^0$  et  $\chi$  n'a que des coefficients positifs. Donc le terme supérieur de  $\Gamma$  a un coefficient positif (en effet  $+1$ ) ce qui exclut le signe  $-$ ,  $\Gamma = P_{h_1 \dots h_n}$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \chi_{h_1 \dots h_n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) &= \Delta^{-1} P_{h_1 \dots h_n}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \\ &= \frac{|\epsilon^{h_1}, \dots, \epsilon^{h_n}|}{|\epsilon^{n-1}, \dots, \epsilon, 1|}, \quad h_1 > h_2 > \dots > h_n, h_i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ceci donne **tous** les caractères irréductibles de  $U(n)$ .

Nous voulons maintenant trouver la représentation irréductible, c'est-à-dire le tableau de Young qui correspond à un caractère  $\chi_{h_1 \dots h_n}$  donné.

Comme pour  $(h_1 \dots h_n) \neq (h'_1 \dots h'_n)$  les caractères  $\chi_{h_1 \dots h_n}$  et  $\chi_{h'_1 \dots h'_n}$  sont des fonctions orthogonaux sur les classes, ils correspondent à des représentations inéquivalentes, c'est-à-dire des tableaux différents.

Nous considérons un tableau  $T = [f_1 \dots f_n]$  donné (les tableaux avec plus de  $n$  lignes correspondent à la représentation  $A \mapsto 0$ ),  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq 0$ .

$$e(T)V^{\otimes f}, \quad f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

est générée par les vecteurs

$$e(T)(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_f}), \quad i_j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

qui ne contient pas plus que  $f_i$  facteurs identiques sinon

$$Q = \sum_{q \in \Omega(T)} \delta_q q$$

donne zéro sur  $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n})$ .

D'autre part, pour

$$x_0 = \underbrace{(e_1 \otimes \dots \otimes e_1)}_{f_1} \otimes \underbrace{(e_2 \otimes \dots \otimes e_2)}_{f_2} \otimes \dots$$

nous avons vu (dans les exercices) que  $e(T)x_0 \neq 0$ .

Le terme supérieur de  $\Gamma = \Delta \cdot \chi$  sur  $e(T)V^f$  est alors

$$\epsilon_1^{f_1} \epsilon_2^{f_2} \dots \epsilon_n^{f_n}$$

et donc

$$h_1 = f_1 + n - 1 \quad , \quad h_2 = f_2 + n - 2, \dots \quad h_n = f_n.$$

De cette façon nous n'obtenons que les suites

$$h_1 > h_2 > \dots > h_n \quad \text{avec} \quad h_n \geq 0.$$

Si nous multiplions la représentation tensorielle donnée par le tableau  $T = [f_1, \dots, f_n]$  par  $(\det A)^{-k}$ ,  $A \in U(n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  nous obtenons  $\chi_{h'_1 \dots h'_n}$  où les  $h'_i$  sont données par  $h'_i = h_i - k$ .

Les représentations irréductibles inéquivalentes sont alors données par

$$A \rightarrow (\det(A))^{-k} A^{\otimes f}$$

sur les espaces  $e(T)V^{\otimes f}$ .

Elles sont alors caractérisées par un nombre non négatif  $k$  et un tableau de Young  $T$  avec au maximum  $n - 1$  ligne parce que la représentation  $A \rightarrow A([f_1, \dots, f_n])$  est isomorphe à

$$A \rightarrow (\det A)^{f_n} A([f_1 - f_n, \dots, f_{n-1} - f_n, 0]) \quad (\text{exercice !})$$

Les représentations tensorielles de  $SU(n)$  sont alors données par

$$A \rightarrow A([f_1, \dots, f_{n-1}]).$$

Elles sont donc caractérisées par  $n - 1$  nombres  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_{n-1} \geq 0$ .

A partir de la formule pour les caractères il est évident que les différents tableaux  $[f_1 \dots f_{n-1}] \neq [f'_1 \dots f'_{n-1}]$  engendrent des représentations inéquivalentes. Les classes de  $SU(n)$  sont données par ceux de  $U(n)$  avec la condition additionnelle  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ , donc  $\alpha_n = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})$ , n'est pas une variable indépendante ( $\epsilon_j = e^{i\alpha_j}$ ).

## 5.7.2 Formule pour la dimension

La dimension de la représentation correspondant au caractère  $\chi_{h_1 \dots h_n}$  est simplement  $\chi_{h_1 \dots h_n}(\mathbb{I})$ . Mais si nous prenons notre formule

$$\chi_{h_1 \dots h_n} = \frac{|\epsilon^{h_1} \dots \epsilon^{h_n}|}{|\epsilon^{n-1}, \epsilon^{n-2}, \dots, 1|}.$$

Ceci nous donne  $\chi(\mathbb{I}) = 0/0$ .

Nous adoptons donc la procédure limite suivante : comme avant nous posons  $\epsilon_j = e^{i\alpha_j}$  et  $\alpha_1 = (n-1)\alpha$ ,  $\alpha_2 = (n-2)\alpha, \dots, \alpha_n = 0$ , et prenons ensuite la limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

$$\text{Donc } \epsilon_j - \epsilon_k \cong i\alpha(k-j) \quad \text{et} \quad e^{ih_k\alpha} - e^{ih_j\alpha} \cong i(h_k - h_j)\alpha$$

$$\text{tel que } |\epsilon^{h_1}, \dots, \epsilon^{h_n}| \cong \prod_{i < k} (h_i - h_k)\alpha$$

$$\text{et } |\epsilon^{n-1}, \dots, \epsilon, 1| \cong \prod_{i < k} (k - i)\alpha.$$

Le rapport devient donc

$$N[h_1 \cdots h_n] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|\epsilon^{h_1} \cdots \epsilon^{h_n}|}{|\epsilon^{h-1}, \dots, \epsilon, 1|} = \frac{\prod_{i < k} (h_i - h_k)}{\prod_{i < k} (k - i)}. \quad (5.28)$$

Ceci est la dimension de la représentation correspondant au tableau  $T = [f_1 \dots f_n]$  avec  $h_i = f_i + n - i$ .

**Exercice :**

Montrer que  $N[h_1 + h, \dots, h_n + h] = N[h_1 \cdots h_n]$ .

La formule (5.28) pour  $N[h_1 \cdots h_n]$  complète la preuve du théorème 5.6.

### 5.7.3 La représentation associée

Soit  $G$  un groupe fini et  $M, M'$  deux représentations irréductibles sur  $V$  et  $V'$  avec caractères  $\chi$  et  $\chi'$ .

Nous considérons la décomposition

$$M \otimes M' = \bigoplus_i m_i N_i \quad \text{sur} \quad V \otimes V'$$

en représentations irréductibles  $N_i$  avec caractères  $\chi_i$  et multiplicités  $m_i$ .

D'après nos résultats du chapitre 3 les multiplicités  $m_i$  sont données par

$$m_i = \frac{1}{n_G} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_i(g) \cdot \chi(g) \cdot \chi'(g)$$

où  $n_G$  est l'ordre du groupe  $G$ .

Nous nous intéressons au groupe  $\mathcal{S}_f$ .

La représentation antisymétrique est définie par

$$(-) : \mathcal{S}_f \rightarrow \{1, -1\} : \sigma \rightarrow \delta_\sigma.$$

Elle est unidimensionnelle avec caractère

$$\chi^{(-)}(\sigma) = \delta_\sigma.$$

Elle est générée par l'idem-potent  $u^{(-)} = \gamma^{-1}e^{(-)}$  avec

$$e^{(-)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \delta_\sigma \sigma \quad \text{associé au tableau} \quad T^{(-)} = \left. \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} f \text{ cases}$$

La multiplicité de la représentation associée à  $T^{(-)}$  dans  $M \otimes M'$  est alors

$$m^{(-)} = \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \delta_\sigma \chi(\sigma) \chi'(\sigma) \quad (5.29)$$

**Définition 5.4** Soit  $\Delta$  une représentation de  $\mathcal{S}_f$ . La représentation associée est définie par

$$\tilde{\Delta} : \mathcal{S}_f \rightarrow \text{Aut}(V) : \sigma \mapsto \delta_\sigma \bar{\Delta}(\sigma). \quad (5.30)$$

$\bar{\Delta}(\sigma)$  denomme la matrice complexe conjuguée de  $\Delta(\sigma)$ .

**Proposition 5.5**

- Si  $\Delta$  est irréductible  $\tilde{\Delta}$  l'est aussi.
- Soit  $\Delta'$  aussi une représentation de  $\mathcal{S}_f$ . Si  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont irréductible, la décomposition du produit tensoriel de  $\Delta$  et  $\Delta'$  contient la représentation anitisymétrique une fois si  $\Delta' = \tilde{\Delta}$  et pas du tout, sinon. C'est-à-dire nous avons

$$m^{(-)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta' = \tilde{\Delta} \quad (\chi' = \tilde{\chi}) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.31)$$

**Preuve 60** Le premier point est évident parce que  $|\tilde{\chi}(\sigma)|^2 = |\chi(\sigma)|^2$  donc

$$\frac{1}{f!} \sum_{\sigma} |\tilde{\chi}(\sigma)|^2 = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{f!} \sum_{\sigma} |\chi(\sigma)|^2$$

Pour le deuxième point nous utilisons la formule

$$m^{(-)} = \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \delta_\sigma \chi(\sigma) \chi'(\sigma) = \frac{1}{f!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_f} \bar{\chi}(\sigma) \chi'(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi' = \tilde{\chi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

**Proposition 5.6** Soit  $T$  le tableau qui correspond à la représentation  $\Delta$ . Alors le tableau  $\tilde{T}$  qui correspond à  $\tilde{\Delta}$  est obtenu de  $T$  par échange des lignes et des colonnes.



**Preuve 61** Nous réalisons  $\Delta$  comme représentation sur l'idéal à gauche  $L = \mathcal{A}(\mathcal{S}_f)e(T)$  ;

$$\Delta(\sigma)a = \sigma \cdot a \quad \forall a \in L.$$

Nous décomposons

$$e(T) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_f} e_\tau \tau, \quad e_\tau \in \mathbb{C}.$$

Nous considérons la projection pour un  $\sigma \in \mathcal{S}_f$

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}_f) \rightarrow L : x \mapsto \sigma x e(T). \quad (5.32)$$

Dans  $L$  ceci est simplement la multiplication à gauche avec  $\sigma$ . Nous choisissons une base de  $\mathcal{A}(\mathcal{S}_f)$  telle que les premiers  $m = \dim L$  éléments fournissent une base de  $L$ . Dans cette base les dernières  $f! - m$  lignes de la matrice correspondante à  $x \mapsto \sigma x e(T)$  sont zéro et sa trace est simplement  $\chi_T(\sigma)$ . Plus détaillé, l'application (5.32) s'écrit

$$x = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_f} x_\tau \tau \mapsto \sum_{\tau, \rho \in \mathcal{S}_f} x_\tau e_\rho \sigma \tau \rho = \sum_{\tau, \alpha \in \mathcal{S}_f} x_\tau e_{\tau^{-1}\sigma^{-1}\alpha} \alpha.$$

Donc

$$(x_\tau) \mapsto (y_\alpha) \quad \text{avec} \quad y_\alpha = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_f} x_\tau e_{\tau^{-1}\sigma^{-1}\alpha}.$$

Le caractère  $\chi_T(\sigma)$  est donc

$$\chi_T(\sigma) = \sum_{\tau} e_{\tau^{-1}\sigma\tau}.$$

L'élément  $e(T)$  est de la forme

$$e(T) = \sum_{p \in \Sigma(T), q \in \Omega(T)} \delta_q p q.$$

Donc  $\chi_T(\sigma)$  est réel.

Soit  $\tilde{T}$  le tableau obtenu de  $T$  par échanges des lignes et des colonnes. Son idem-potent est alors donné par

$$\tilde{e} = \sum_{p \in \Sigma(T), q \in \Omega(T)} \delta_p q p = \sum \delta_p q^{-1} p^{-1} = \sum \delta_p (pq)^{-1}.$$

En posant

$$\tilde{e} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_f} \tilde{e}_\tau \tau$$

nous obtenons donc

$$\tilde{e}_\tau = \delta_\tau e_{\tau^{-1}} \quad , \quad \delta_\tau = \delta_p \delta_q.$$

Le caractère  $\chi_{\tilde{T}}$  de la représentation correspondant à  $\tilde{T}$  est alors

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{T}}(\sigma) &= \sum_{\tau} \tilde{e}_{\tau^{-1}\sigma\tau} = \sum_{\tau} \delta_{\tau^{-1}\sigma\tau} e_{\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau} \\ &= \sum_{\tau} \delta_{\sigma} e_{\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau} = \delta_{\sigma} \chi_T(\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

Mais les éléments  $\sigma$  et  $\sigma^{-1}$  appartiennent à la même classe dans  $\mathcal{S}_f$  (leurs cycles ont la même longueur) donc  $\chi_{\tilde{T}}(\sigma) = \delta_{\sigma} \chi_T(\sigma) = \delta_{\sigma} \bar{\chi}_T(\sigma) = \tilde{\chi}_T(\sigma)$ .  $\square$

### 5.7.4 Réduction du produit tensoriel de deux représentations de $SU(n)$

Nous allons finir cette partie sur les tableaux de Young en donnant une recette pour la réduction du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de  $SU(n)$  (la dérivation de ce résultat est donné dans Robinson, "Representation theory of the symmetric group").

**Recette :**

Soit  $\Delta$  la représentation irréductible de  $SU(n)$  correspondant au tableau  $T$  et  $\Delta'$  celle correspondant au tableau  $T'$ . Les tableaux  $T_1, T_2, \dots, T_m$  correspondent aux représentations  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  qui apparaissent dans la somme

$$\Delta \otimes \Delta' = \Delta_1 \oplus \Delta_2 \oplus \dots \oplus \Delta_m$$

sont obtenus de la façon suivante :

- On dessine d'abord le tableau  $T$ . On attribue ensuite la lettre  $a$  à toutes les cases de la première ligne de  $T'$ , la lettre  $b$  à toutes les cases de la deuxième ligne de  $T'$ , et ainsi de suite.
- On ajoute alors tous les cases " $a$ " au tableau  $T$  telle qu'aucune case  $a$  n'apparaît dans la même colonne et que le tableau obtenu est un tableau de Young.
- On procède de la même façon avec les cases  $b, c, \dots$

Finalement, le tableau obtenu est admissible si et seulement si en lisant la série des  $a, b, c$  de **droite à gauche** et de haut en bas la série obtenue n'a aucun en point plus de " $b$ " que de " $a$ " ou plus de " $c$ " que de " $b$ ", etc.

Par exemple,  $aabacbbacc$  est admissible mais  $aabacc$  n'est pas admis.

**Exemple pour  $SU(3)$  :**



$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot & a & a \\ \cdot & & b & \end{array}$$

Pour ajouter les "a" nous avons les 4 possibilités suivantes :

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot & a & & \cdot & \cdot & a & a \\ \cdot & & a & & \cdot & & & \\ \hline & & i) & & ii) & & & \\ \\ \cdot & \cdot & a & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & a & & \\ \hline a & & & & a & & & \\ & & iii) & & iv) & & & \end{array}$$

De *i)* nous obtenons en ajoutant *b*

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot & a & & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & a & b & & \cdot & a & \\ & & & & b & & \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & a & b \\ \cdot & a & & \end{array} \text{ n'est pas admis} \right)$$

De *ii)* nous obtenons

$$\begin{array}{cc} \cdot & \cdot & a & a & \cdot & \cdot & a & a \\ \cdot & b & & & \cdot & & & \\ & & & & b & & & \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & a & a & b \\ \cdot & & & & \end{array} \text{ n'est pas admis} \right)$$

De *iii)* nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & \\ a & & \end{array}$$

De *iv)* nous obtenons

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \\ \cdot & a & \\ a & b & \end{array}$$

Ici nous avons déjà utilisé le fait que tous les tableaux avec plus que trois lignes donnent zéro sur SU(3). Nous utilisons encore le fait qu'une colonne de

trois cases donne  $\det A \equiv 1$  sur  $SU(3)$ , donc ces colonnes peuvent être biffées. Le dernier diagramme correspond alors à la représentation  $1 : A \rightarrow 1$ . En total nous avons

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \mathbb{I}.$$

**Exercice :**

Retrouver la série de Clebsch-Gordon pour  $SU(2)$  :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square \\ \hline \end{array} \oplus \dots \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \dots & \square \\ \hline \end{array}$$

$n \qquad m \qquad |n-m| \qquad |n-m|+1 \qquad \dots \qquad n+m$

- Pour  $U(n)$  une formule de décomposition similaire existe.
- Pour  $GL(n)$  et  $SL(n)$  les tableaux de Young ne donnent pas toutes les représentations à dimensions finis (pour  $SL(2\mathbb{C})$  voir cours de Mécanique Quantique II), en plus les représentations tensorielles ne sont pas unitaires (ces groupes ne sont pas compacts et n'ont donc pas de représentations unitaires à dimension finie).

### 5.7.5 Partitions

(En anglais)

It is not simple to determine the number of Young tableaux or, equivalently, classes of a given permutation group  $\mathcal{S}_n$ . This agrees with the number of ways to decompose  $n$  into (positive) integer summands without regard to order, which is called the number of (unrestricted) partitions of  $n$  and denoted by  $p(n)$  (Mathematica denotes it `PartitionsP[n]`).

E.g. for  $n = 5$  we have

$$5 = \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 4 + 1 \\ 3 + 2 \\ 3 + 1 + 1 \\ 2 + 2 + 1 \\ 2 + 1 + 1 + 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1. \end{array} \right. \quad (5.33)$$

Hence  $p(5) = 7$ . (Check also that  $p(1) = 1$ ,  $p(2) = 2$ ,  $p(3) = 3$ ,  $p(4) = 5$ ,  $p(6) = 11$ ,  $p(7) = 15$ ,  $p(8) = 22$  and  $p(9) = 30$ .)

Euler has shown (see e.g. Hardy&Wright [3]) that  $p(n)$  has the generating

function

$$\prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^\ell)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}} \right)^{-1}, \quad (5.34)$$

where we set  $p(0) = 1$ .

There exists also an awkward way to write  $p(n)$  in closed form.

From (5.34) one can derive the recurrence relation

$$p(n) = \sum_{1 \leq \frac{3k^2+k}{2} \leq n} (-1)^{k-1} p\left(n - \frac{3k^2+k}{2}\right). \quad (5.35)$$

Check it out!

For large  $n$

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp\left(\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}\right).$$

Compare to Stirling's formula,  $n! \sim \sqrt{2\pi} \exp(n(\ln(n) - 1)) / \sqrt{n}$  which gives the number of elements in  $\mathcal{S}_n$ . These grow much faster than the number of classes.

# Chapitre 6

## Symétries en mécanique quantique

Soit  $G$  un groupe de symétries d'un système physique classique, par exemple le groupe des rotations, des translations, des transformations de Lorentz ou le groupe de Poincaré (le produit semi-direct des translations,  $\mathbb{R}^4$ , et les transformations de Lorentz).

Soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert par lequel notre système quantique est décrit.

Nous définissons  $\hat{\mathcal{H}}$  l'espace projectif de tous les sous-espaces unidimensionnels de  $\mathcal{H}$ ,

$$\hat{\psi} \in \hat{\mathcal{H}} \quad , \quad \hat{\psi} = \{\lambda\psi \mid \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Tout état physique correspond alors à une "raie"  $\hat{\psi}$ . Le produit scalaire  $(\varphi, \psi)$  sur  $\mathcal{H}$  induit une fonction réelle sur  $\hat{\mathcal{H}} \times \hat{\mathcal{H}}$  défini par

$$(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) = \frac{|\langle \varphi, \psi \rangle|^2}{\|\varphi\|^2 \|\psi\|^2}.$$

$(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$  est la "probabilité de transition", c'est-à-dire la probabilité de mesurer l'état  $\hat{\psi}$  si le système est dans l'état  $\hat{\varphi}$  et vice-versa. Cette interprétation du produit  $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$  requiert qu'une symétrie physique soit donné par un **automorphisme**  $T$  sur  $\hat{\mathcal{H}}$  qui respecte  $(\cdot, \cdot)$ .

### Définition 6.1 Automorphisme de Wigner

– Une application bijective

$$T : \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$$

est appelée un automorphisme de Wigner si elle préserve la possibilité de transition. C'est-à-dire

$$(T\hat{\varphi}, T\hat{\psi}) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}).$$

- L'ensemble de tous les automorphismes de Wigner sur  $\hat{\mathcal{H}}$  est désigné par  $\text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$ .

Si  $A$  est une transformation unitaire ou anti-unitaire<sup>1</sup> de  $\mathcal{H}$  il est évident que

$$\hat{A} : \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} : \hat{\varphi} \rightarrow \widehat{A\varphi}$$

est un automorphisme de Wigner.

$$\text{En plus } e^{i\theta} \widehat{A} = \widehat{A} \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

La question est de savoir si l'inverse est aussi vrai.

La réponse est affirmative. Ceci provient du **théorème de Wigner** que nous allons formuler par la suite.

**Théorème 6.1** Soit  $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H})$  les transformations unitaires et anti-unitaires de  $\mathcal{H}$ .

$$\text{Soit } \Pi : \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}) : A \rightarrow \hat{A}.$$

$$\text{Soit } i : \text{U}(1) \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H}) : e^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta}\mathbb{I}$$

l'inclusion de  $\text{U}(1)$  en  $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H})$ .

La séquence suivante est exacte :

$$1 \xrightarrow[\text{inclusion}]{} \text{U}(1) \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi} \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}) \rightarrow 1. \quad (6.1)$$

Une séquence exacte est une suite d'homomorphismes  $\varphi_n$  du groupe  $G_n$  dans le groupe  $G_{n+1}$

$$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} G_3 \xrightarrow{\varphi_3} G_4 \cdots$$

tels que  $\varphi_n(G_n) = \varphi_{n+1}^{-1}(\mathbb{I})$ , l'image de  $\varphi_n$  est le noyau de  $\varphi_{n+1}$ .

La séquence exacte (6.1) implique alors que

$$\Pi(\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{H})) = \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}),$$

donc tout automorphisme de Wigner sur  $\hat{\mathcal{H}}$  est de la forme  $\hat{A}$  pour un opérateur  $A$  unitaire ou anti-unitaire.

En plus,  $\Pi^{-1}(\mathbb{I}) = e^{i\theta}\mathbb{I}$ , donc  $\hat{A} = \hat{B}$  si et seulement si  $A = e^{i\theta}B$ .

La preuve de ce théorème se trouve dans [13]E. P. Wigner, "Group theory", Academic Press, 1959.

---

<sup>1</sup> $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  est anti-unitaire si  $A(\varphi + \psi) = A\varphi + A\psi$ ,  $A(\lambda\varphi) = \bar{\lambda}A\varphi$  et  $(A\varphi, A\psi) = \overline{(\varphi, \psi)}$ .

De (6.1) nous pouvons conclure que aussi la séquence

$$1 \rightarrow \mathbb{U}(1) \xrightarrow{i} \mathcal{U}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}) \rightarrow 1$$

est exacte, où

$$\mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}) = \Pi(\mathcal{U}(\mathcal{H})) = \{\hat{A} \mid A \in \mathcal{U}(\mathcal{H})\}.$$

Nous nous intéressons à des homomorphismes (**représentations projectives**) d'un groupe de Lie dans  $\text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$ .

**Proposition 6.1** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe et  $T : G \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$  un homomorphisme.*

$$\text{Alors } T(G) \subset \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}).$$

**Preuve 62** *Ceci est certainement vrai pour un voisinage  $V$  de l'identité où tout élément est de la forme  $g = e^a = (e^{\frac{a}{2}})^2$  pour un  $a \in \mathcal{G}$ , (= l'algèbre de Lie de  $G$ ). Donc  $g$  est de la forme  $g = g_1^2$  et*

$$T(g) = T(g_1) \cdot T(g_1) = (\hat{A})^2 = \hat{A}^2,$$

*mais le carré d'une transformation anti-unitaire est toujours unitaire donc  $T(g)$  est unitaire.*

*De cela il s'ensuit que  $\{g \in G \mid T(g) \text{ unitaire}\} =: M$  est ouvert, parce que avec  $g$  tous les éléments dans  $g \cdot V$  sont tels que  $T(h)$  est unitaire. Ici  $V$  est un voisinage de  $\mathbb{I}$  avec  $T(V) \subset \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$ .*

*Mais aussi  $N = \{g \in G \mid T(g) \text{ anti-unitaire}\}$  est ouvert parce que si  $T(g)$  est anti-unitaire et  $T(h)$  est unitaire,  $T(g) \cdot T(h)$  est anti-unitaire. Donc avec  $g$  tout le voisinage  $g \cdot V$  possède des images anti-unitaires sous  $T$ .*

*Comme  $M = G \setminus N$  nous pouvons déduire que  $M$  est aussi fermé.*

*Mais  $G$  est connexe et  $M$  n'est pas vide, donc  $M = G$ . □*

**Définition 6.2 Représentation sur  $\hat{\mathcal{H}}$  :**

*Soit  $G$  un groupe. Un homomorphisme*

$$T : G \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$$

*est une représentation projective de  $G$ .*

Si un groupe de Lie connexe,  $G$ , de symétries de la physique classiques est représenté par des automorphismes de Wigner nous pouvons donc certes définir des opérateurs unitaires  $T(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$  tels que

$$\widehat{T(g)\Psi} = T(g)\hat{\Psi}.$$



$\mathcal{T}$  est aussi appelée une représentation projective de  $G$ . En générale

$$\mathcal{T}(g_1)\mathcal{T}(g_2) = \omega(g_1, g_2)\mathcal{T}(g_1g_2)$$

pour une phase non-trivial  $\omega(g_1, g_2) \in U(1)$ . La question est dans quel cas peut-on définir  $\mathcal{T}$  tel que cette phase disparaît et  $\mathcal{T}$  devient une vraie représentation du groupe  $G$ . La réponse est que ceci est toujours possible si  $G$  est simplement connexe ; sinon il n'est en générale pas possible. Mais comme tout groupe de Lie  $G$  a un recouvrement universel (c'est-à-dire un groupe simplement connexe qui est localement isomorphe à  $G$  et qui a donc la même algèbre de Lie) toute représentation projective d'un groupe de Lie  $G$  peut être levée à une représentation ordinaire de son recouvrement universel  $\tilde{G}$ .

Pour ceci nous utilisons que pour tout groupe de Lie  $G$  il existe un groupe de Lie simplement connexe  $\tilde{G}$ , son recouvrement universel, qui est localement isomorphe à  $G$ , donc  $\tilde{G}$  possède la même algèbre de Lie,  $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}}$ . Si  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  est cet "isomorphisme local", alors  $p^{-1}(\mathbb{I}) = K$  est un sous-groupe discret de  $\tilde{G}$ .

### Définition 6.3 Possibilité de "lever" une représentation

Soit  $T : G \rightarrow \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$  une représentation projective. Nous disons  $T$  peut être levée à  $\mathcal{T}$  s'il existe une représentation

$$\mathcal{T} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad \text{avec} \quad T = \Pi \circ \mathcal{T}.$$

Nous nous demandons quand  $T$  peut être levée. Pour un groupe de Lie connexe avec groupe de recouvrement universel  $\tilde{G}$  (simplement connexe) la réponse est comme suit :

**Théorème 6.2** 1. Si  $G$  est simplement connexe ( $\tilde{G} \equiv G$ ),  $T$  peut toujours être levée à la forme  $T = \Pi \circ \mathcal{T}$ .

2. Si  $G$  n'est pas simplement connexe il existe une représentation  $\sigma : \tilde{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  telle que

$$\Pi \circ \sigma = T \circ p$$

où  $p$  désigne la projection canonique de  $\tilde{G}$  dans  $G$ .

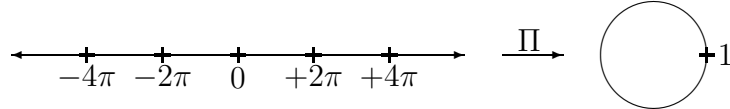
Donc le diagramme suivant est exact et commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xrightarrow{i_1} & K & \xrightarrow{i} & \tilde{G} & \xrightarrow{p} & G & \rightarrow 1 \\ & & & & \downarrow \sigma & & \downarrow T & \\ 1 & \xrightarrow{i_1} & U(1) & \xrightarrow{i} & \mathcal{U}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}) & \rightarrow 1 \end{array}$$

**Exemple d'un recouvrement universel :**

$$G = U(1) \quad , \quad \tilde{G} = \mathbb{R} \quad p : \alpha \rightarrow e^{2\pi i \alpha} \quad , \quad K = \mathbb{Z}.$$

Pour plus de détails, voir [10] J. P. Serre, "*Lie Groups and Lie Algebras*", Benjamin, 1965.



## 6.1 Le groupe $SU(2)$ comme recouvrement universel de $SO(3)$

Dans ce paragraphe, nous montrons que  $SU(2)$  est le recouvrement universel de  $SO(3)$ . C'est pour cette raison que l'on appelle parfois  $SU(2)$  le "groupe de rotation de la mécanique quantique". Ceci est correct dans le sens strict que nous venons d'élaborer.

### a) $\tilde{G} = SU(2)$ est simplement connexe

Soit  $U \in SU(2)$ , i.e.,  $U^* = U^{-1}$  et  $\det U = +1$ . Comme avant, nous écrivons  $U$  sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} , \quad \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1 . \quad (6.2)$$

Nous posons  $a = a_1 + ia_2$  et  $b = b_1 + ib_2$ , où  $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ .  $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{S}^3$ . Donc  $SU(2)$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^3$ ; mais  $\mathbb{S}^3$  est simplement connexe et donc  $SU(2)$  aussi.

### b) Homomorphisme $SU(2) \rightarrow SO(3)$

La correspondance entre le groupe des rotations  $SO(3)$  et le groupe unitaire  $SU(2)$  peut être mise en évidence à l'aide des matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (6.3)$$

On vérifie facilement que

$$[\sigma_j, \sigma_k] \equiv \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l . \quad (6.4)$$

Il est évident que toute matrice  $2 \times 2$  hermitienne ( $X^* = X$ ) et de trace nulle peut être exprimée comme combinaison linéaire réelle des matrices  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Soit la notation  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  et  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ . Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \sim : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2} \\ \mathbf{x} &\mapsto \tilde{x} = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Nous avons donc  $\tilde{x} = \mathbf{x} \cdot \sigma = x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3$ . La matrice  $\tilde{x}$  est hermitienne,  $\tilde{x}^* := \overline{\tilde{x}}^T = \tilde{x}$ , et de trace nulle,  $\text{tr} \tilde{x} = 0$ . De plus, son déterminant est  $\det \tilde{x} = -|\mathbf{x}|^2$ . Or, toute matrice  $X \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  hermitienne et de trace nulle prend la forme  $\tilde{x}$ , avec  $x^1 = \text{Re}(X_{12})$ ,  $x^2 = -\text{Im}(X_{12})$  et  $x^3 = \text{Re}(X_{11}) = X_{11}$ . Soient encore  $\tilde{x}_{ij}$  les coefficients de la matrice  $\tilde{x}$ . En résolvant Eq. (6.5) pour les coordonnées  $x^i$ , nous obtenons

$$x^1 = \frac{1}{2}(\tilde{x}_{21} + \tilde{x}_{12}), \quad x^2 = \frac{1}{2i}(\tilde{x}_{21} - \tilde{x}_{12}), \quad x^3 = \tilde{x}_{11} = -\tilde{x}_{22}. \quad (6.6)$$

Maintenant, nous appliquons une transformation unitaire sur  $\tilde{x}$  de manière à obtenir une nouvelle matrice  $X'$  :

$$X' = U \tilde{x} U^*. \quad (6.7)$$

Pour la transformation unitaire, nous choisissons une matrice  $U \in SU(2)$  quelconque, donnée par Eq. (6.2). Nous avons  $\text{tr} X' = \text{tr} \tilde{x} = 0$ . D'autre part, la matrice  $X'$  est également hermitienne,  $(X')^* = (U \tilde{x} U^*)^* = U \tilde{x}^* U^* = U \tilde{x} U^* = X'$ . En vertu de ce que nous avons dit précédemment, nous pouvons donc écrire

$$X' = \begin{pmatrix} x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & -x'^3 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

pour certains nombres réels  $x'^1, x'^2, x'^3$ . Nous posons  $\mathbf{x}' = (x'^1, x'^2, x'^3) \in \mathbb{R}^3$ . Donc  $X' = \tilde{x}'$ . Alors, Eq. (6.7) implique que  $\det X' = \det \tilde{x}$ , i.e.,  $|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{x}|^2$ . La relation entre  $x^1, x^2, x^3$  et  $x'^1, x'^2, x'^3$  est évidemment linéaire pour une matrice  $U$  donnée. Il existe alors une transformation linéaire orthogonale, i.e.,  $\Pi(U) \in O(3)$  tel que  $\Pi(U) : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \Pi(U)\mathbf{x}$ .

Comme  $SU(2)$  est connexe,  $U$  peut être déformée de façon continue en  $\mathbb{I}_2$ . Or, puisque l'application

$$\begin{aligned} \Pi : SU(2) &\rightarrow O(3) \\ U &\mapsto \Pi(U), \end{aligned} \quad (6.9)$$

est continue,  $\Pi(SU(2))$  est aussi connexe ; en plus  $\Pi(\mathbb{I}_2) = \mathbb{I}_3$ . Donc  $\Pi(U)$  est un élément de la composante de  $O(3)$  qui contient l'identité, ce qui implique  $\Pi(SU(2)) \subset O(3)_0 = SO(3)$ .

Pour illustrer ce propos, nous dérivons explicitement les composantes de  $\Pi(U)$ . Puisque il existe  $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$  avec  $X' = \tilde{x}'$ , nous pouvons re-écrire Eq. (6.7) sous la forme

$$\tilde{x}' = U\tilde{x}U^* = U\tilde{x}U^{-1} \equiv \mathbf{x}' \cdot \sigma . \quad (6.10)$$

La multiplication matricielle (6.10) donne

$$\begin{aligned} x'^1 &= \frac{1}{2} (\tilde{x}'_{21} + \tilde{x}'_{12}) \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2) x^1 + \frac{i}{2} (-a^2 + \bar{a}^2 - b^2 + \bar{b}^2) x^2 - (ab + \bar{a}\bar{b}) x^3 , \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} x'^2 &= \frac{1}{2i} (\tilde{x}'_{21} - \tilde{x}'_{12}) \\ &= \frac{i}{2} (a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) x^1 + \frac{1}{2} (a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2) x^2 + i (\bar{a}\bar{b} - ab) x^3 , \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} x'^3 &= \tilde{x}'_{11} = -\tilde{x}'_{22} \\ &= (\bar{a}b + a\bar{b}) x^1 + i (\bar{a}b - a\bar{b}) x^2 + (a\bar{a} - b\bar{b}) x^3 . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ceci peut être résumé dans la notation matricielle

$$\Pi \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2) & \frac{-i}{2} (a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) & -(ab + \bar{a}\bar{b}) \\ \frac{i}{2} (a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) & \frac{1}{2} (a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2) & i (\bar{a}\bar{b} - ab) \\ (\bar{a}b + a\bar{b}) & i (\bar{a}b - a\bar{b}) & (a\bar{a} - b\bar{b}) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

D'après ces formules, il est évident qu'à chaque matrice  $U \in SU(2)$  est associée une matrice  $\Pi(U)$  qui transforme  $x^1, x^2, x^3$  en  $x'^1, x'^2, x'^3$ , i.e.,  $\mathbf{x}' = \Pi(U)\mathbf{x}$ . Les éléments de  $\Pi(U)$  sont explicitement donnés par éq. (6.14), et il est facile de vérifier que toutes les composantes de  $\Pi(U)$  sont réelles. Comme nous l'avons démontré ci-dessus,  $\Pi(U)$  est même une matrice orthogonale représentant une rotation propre des coordonnées, i.e.,  $\Pi(U) \in SO(3)$ .

Avec éq. (6.14) on vérifie aisément que les matrices unitaires suivantes  $\Pi(U_j(\alpha))$  correspondent bien aux rotations par d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $j$ .

- Si nous choisissons la matrice  $U$  diagonale, sa forme la plus générale est

$$U_3(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} . \quad (6.15)$$

En utilisant les formules générales (6.11)–(6.13), nous obtenons alors

$$\Pi(U_3(\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

ce qui correspond à la matrice de rotation de coordonnées d'un angle  $\varphi$  autour de l'axe 3.

- Si nous choisissons la matrice  $U$  réelle, sa forme la plus générale est

$$U_2(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

En utilisant les formules générales (6.11)–(6.13), nous obtenons alors

$$\Pi(U_2(\beta)) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

ce qui décrit une rotation de coordonnées d'un angle  $\beta$  autour de l'axe 2.

- Finalement, si nous choisissons la matrice  $U$  telle que

$$U_1(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -i \sin(\alpha/2) \\ -i \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

nous obtenons

$$\Pi(U_1(\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

ce qui décrit une rotation de coordonnées d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe 1.

### c) $\Pi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ est surjective et $\ker \Pi = \{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\}$

Nous venons de vérifier que  $\Pi(U_1(\alpha))$ ,  $\Pi(U_2(\beta))$  et  $\Pi(U_3(\varphi))$  sont bien des rotations autour des axes 1, 2, 3, avec les angles  $\alpha, \beta, \varphi$ , respectivement. Ainsi, à partir de  $\Pi(U_1(\alpha))$ ,  $\Pi(U_2(\beta))$  et  $\Pi(U_3(\varphi))$ , on peut construire toute rotation et  $\Pi$  est alors surjective. Il est évident que  $U \mapsto \Pi(U)$  est un homomorphisme de groupe, c'est-à-dire  $\Pi(UV) = \Pi(U)\Pi(V)$  pour  $U, V \in SU(2)$ . Nous voulons trouver le noyau de cet homomorphisme :

$$\ker \Pi = \{U \in SU(2) \mid U\tilde{x}U^* = \tilde{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (6.21)$$

On voit immédiatement que  $\{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\} \subset \ker \Pi$ , ce qui indique que deux éléments  $U$  et  $-U$  de  $SU(2)$  sont associés à chaque  $S \in SO(3)$ . Nous devons encore montrer qu'il n'existe pas d'autres éléments de  $SU(2)$  qui sont appliqués sur  $\mathbb{I}_3$ , i.e. que,

$$\ker \Pi = \{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\} . \quad (6.22)$$

Une matrice  $X \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  quelconque peut être représentée sous la forme

$$X = \alpha \mathbb{I}_2 + \tilde{x} + i(\beta \mathbb{I}_2 + \tilde{y}) . \quad (6.23)$$

Pour  $U \in \ker \Pi$ , on a donc  $UXU^* = X$  ou  $UX = XU$  pour toute matrice  $X \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Or, d'après le Lemme de Schur, les seules matrices qui commutent avec toutes les autres sont les multiples de l'unité,  $U = \lambda \mathbb{I}_2$ . Ainsi, on a bien  $\ker \Pi \equiv \{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\}$ , ce qui implique que  $SO(3) \cong SU(2)/\{\mathbb{I}_2, -\mathbb{I}_2\}$ .

Ensembles, les points **a**), **b**) et **c**) démontrent que  $SU(2)$  est le recouvrement universel de  $SO(3)$ , ce que l'on dénote souvent par  $SU(2) = \overline{SO(3)}$ . L'application de recouvrement est

$$\begin{aligned} \Pi : SU(2) &\rightarrow SO(3) \\ U &\mapsto \Pi(U) \equiv \Pi(U) . \end{aligned} \quad (6.24)$$

L'homomorphisme de  $SU(2)$  en  $SO(3)$  est de type 2 : 1, i.e., deux matrices de  $SU(2)$ ,  $U$  et  $-U$ , sont associées à la même rotation,  $\Pi(U) = \Pi(-U)$ . Finalement, comme  $\Pi$  est un isomorphisme local, il induit un isomorphisme des algèbres de Lie,  $\Pi_* : su(2) \rightarrow so(3)$ .

## Algèbre de Lie

Nous voulons maintenant démontrer que

$$\Pi_*(M_j) = I_j \quad \text{avec} \quad M_j = \frac{1}{2i} \sigma_j , \quad j = 1, 2, 3 , \quad (6.25)$$

où  $I_j$  est le générateur des rotations autour l'axe  $j$  donc  $(I_j)_{km} = -\epsilon_{jkm}$  (voir éq. 4.17). Evidemment, les  $M_j$  forment une base de  $su(2)$  (exercice). Soit encore  $U_k(\alpha) = \exp(\alpha M_k)$ , le sous-groupe à un paramètre généré par  $M_k$ . On a alors

$$M_k = \left. \frac{d}{d\alpha} U_k(\alpha) \right|_{\alpha=0} . \quad (6.26)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Pi_* \widetilde{(M_k)} \mathbf{x} &= \left. \frac{d}{d\alpha} \Pi(U_k(\alpha)) \mathbf{x} \right|_{\alpha=0} \\
&= \left. \frac{d}{d\alpha} [U_k(\alpha) \tilde{x} U_k^*(\alpha)] \right|_{\alpha=0} = M_k \tilde{x} + \tilde{x}(-M_k) \\
&= [M_k, \tilde{x}] = \frac{1}{2i} \sum_j [\sigma_k, \sigma_j] x^j = \sum_{j,i} \epsilon_{kji} \sigma_i x^j, \tag{6.27}
\end{aligned}$$

puisque  $\tilde{x} = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  et

$$[\sigma_k, \sigma_j] = 2i \sum_i \epsilon_{kji} \sigma_i. \tag{6.28}$$

D'autre part, le côté gauche de Eq. (6.27) devient

$$\Pi_* \widetilde{(M_k)} \mathbf{x} = \sum_{j,i} (\Pi_* (M_k))_{ij} x^j \sigma_i, \tag{6.29}$$

ce qui implique finalement l'identité  $(\Pi_* (M_k))_{ij} = \epsilon_{kji} = -\epsilon_{kij} = (I_k)_{ij}$ . D'après Eqs. (6.25) et (6.28), les relations de commutation des  $M_k$  sont

$$[M_i, M_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} M_k. \tag{6.30}$$

Elles sont donc identiques à celles des  $I_k$ , ce qui doit être le cas puisque  $\Pi_*$  est un isomorphisme entre les algèbres de Lie  $su(2)$  et  $so(3)$ . En plus, comme  $su(2)$  et  $so(3)$  sont isomorphes, ils ont les mêmes représentations irréductibles : à la représentation  $\mathcal{D}_*^j$  de  $so(3)$  correspond la représentation  $\mathcal{D}_*^j \circ \Pi_*$  de  $su(2)$ . Pour un groupe simplement connexe, on peut montrer qu'à chaque représentation de l'algèbre de Lie correspond une représentation du groupe. Il existe donc aussi des représentations  $\mathcal{D}^j$  de  $SU(2)$  pour des  $j$  demi-entiers. Les particules à spin demi-entier, les fermions, e.g. l'électron, se transforment d'après ces représentations. L'existence des fermions est donc un phénomène purement quantique, qui n'a pas d'analogue en physique classique.

## 6.2 Démonstration du théorème 6.2

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration du point 1. du théorème 6.2.

Si le point 1. est vérifié, 2. suit, parce que  $T \circ p$  est une représentation projective du groupe simplement connexe  $\tilde{G}$  et peut alors être levée,

$$T \circ p = \Pi \circ \sigma.$$

Pour démontrer le point 1., nous avons partiellement besoin d'outils et de résultats que nous n'avons pas développés dans ce cours. La démonstration présentée ici sera donc partielle. Des références seront données pour les parties manquantes.

Pour continuer nous devons choisir une topologie sur les espaces  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$ .

D'abord nous allons choisir les topologies usuelles sur  $\mathcal{H}$  et  $\hat{\mathcal{H}}$ .

Un ensemble  $M \subset \mathcal{H}$  est ouvert si pour tout  $\psi \in M$  il existe un  $\epsilon > 0$  tel que

$$\{\varphi \mid \|\varphi - \psi\| < \epsilon\} \subset M.$$

Un ensemble  $N \subset \hat{\mathcal{H}}$  est ouvert s'il est de la forme  $N = \hat{M} = \{\hat{\psi} \mid \psi \in M\}$  pour un ouvert dans  $\mathcal{H}$ .

Maintenant nous choisissons sur  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  la topologie la plus faible telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}$  l'application

$$\mathcal{U}_\varphi : \mathcal{U}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H} : A \mapsto A\varphi$$

est continue.

De même nous choisissons sur  $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$  la topologie la plus faible telle que pour tout  $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{H}}$  l'application

$$\hat{\mathcal{U}}_{\hat{\varphi}} : \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}) \rightarrow \hat{\mathcal{H}} : \hat{A} \mapsto \hat{A}\hat{\varphi}$$

est continue (cette dernière est égale à la topologie quotient induite sur  $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$  par la surjection  $A \rightarrow \hat{A}$  et la topologie définie sur  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ ).

**Théorème 6.3**  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  est une fibrée principale avec base  $\mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$ , fibre  $U(1)$  et projection  $\Pi$ .

#### Définition 6.4 Fibrée principale

Une fibrée principale est un quadruple  $(F, B, G, \Pi)$  où  $F$  et  $B$  sont des espaces topologiques,  $G$  est un groupe topologique et  $\Pi : F \rightarrow B$  est une application continue telle que  $\Pi^{-1}(b)$  est isomorphe à  $G$  pour tout  $b \in B$ .

En plus, tout point  $b \in B$  possède un voisinage  $W$  tel que  $\Pi^{-1}(W)$  est homomorphe à  $W \times G$ .

Soit  $h_1 : \Pi^{-1}(W_1) \rightarrow W_1 \times G$  et  $h_2 : \Pi^{-1}(W_2) \rightarrow W_2 \times G$  des homomorphismes locaux, avec  $h_1(x) = (b_1, g_1)$ . Alors  $h_2(x) = (b_1, g_2)$  et il existe une application continue  $\varphi : W_1 \cap W_2 \rightarrow G$  avec  $g_2 = \varphi(x) \cdot g_1$ . Ici  $x \in \Pi^{-1}(W_1 \cap W_2)$ .



**Preuve 63** (du théorème 6.3)

$$U(1) \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) : (e^{i\theta}, A) \rightarrow e^{i\theta} A$$

est continue. [Ceci malgré le fait que  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  n'est pas un groupe topologique, la multiplication n'est pas continue! (voir M.A. Naimark, Normed rings, Noordhoff 1964)]

Pour tout  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  non-nuls nous posons

$$V_{\varphi, \psi} = \{A \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \mid \langle A\varphi, \psi \rangle \neq 0\}.$$

Ces ensembles sont ouverts dans  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  et ils recouvrent  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ . De même, les ensembles

$$W_{\varphi, \psi} = \Pi(V_{\varphi, \psi})$$

donnent un recouvrement ouvert de  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ . Pour  $\varphi$  et  $\psi$  non-nuls nous définissons

$$\eta_{\varphi, \psi} : V_{\varphi, \psi} \rightarrow U(1) : A \mapsto \frac{\langle A\varphi, \psi \rangle}{|\langle A\varphi, \psi \rangle|}.$$

Pour  $\lambda \in U(1)$  nous avons  $\eta_{\varphi, \psi}(\lambda A) = \lambda \eta_{\varphi, \psi}(A)$ . Soit

$$h_{\varphi, \psi} : V_{\varphi, \psi} \rightarrow W_{\varphi, \psi} \times U(1) : A \mapsto \left( \hat{A}, \eta_{\varphi, \psi}(A) \right).$$

Cette application continue et son inverse

$$(\hat{A}, e^{i\theta}) \mapsto \frac{e^{i\theta}}{\eta_{\varphi, \psi}(A)} A$$

est aussi continue. Ceci montre que  $\Pi^{-1}(W_{\varphi, \psi}) = V_{\varphi, \psi}$  est homeomorphe à  $W_{\varphi, \psi} \times U(1)$ .

Il faut encore démontrer que le groupe de structure est vraiment  $U(1)$ . Soient  $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$  des vecteurs non-nuls.

Pour  $\Pi A = \hat{A} \in W_{\varphi_1 \psi_1} \cap W_{\varphi_2 \psi_2}$  et  $e^{i\theta} \in U(1)$  nous avons

$$\begin{aligned} h_{\varphi_1 \psi_1} \circ h_{\varphi_2 \psi_2}^{-1}(\Pi A, e^{i\theta}) &= h_{\varphi_1 \psi_1} \left( \frac{e^{i\theta}}{\eta_{\varphi_2 \psi_2}(A)} A \right) \\ &= \left( \Pi A, \frac{e^{i\theta} \eta_{\varphi_1 \psi_1}(A)}{\eta_{\varphi_2 \psi_2}(A)} \right). \end{aligned}$$

Donc la fibre  $e^{i\theta}$  est multipliée avec

$$\frac{\eta_{\varphi_1 \psi_1}(A)}{\eta_{\varphi_2 \psi_2}(A)} \in U(1).$$

En plus, ce changement de "la coordonnée de la fibre"

$$W_{\varphi_1\psi_1} \cap W_{\varphi_2\psi_2} \rightarrow U(1) : \Pi A \mapsto \frac{\eta_{\varphi_1\psi_1}(A)}{\eta_{\varphi_2\psi_2}(A)}$$

est continue. □

**Théorème 6.4** *Toute application continue  $T : G \rightarrow \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$  d'un groupe de Lie **simplement connexe** peut-être levée à une application continue  $\mathcal{T} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  telle que  $T = \Pi \circ \mathcal{T}$ .*

**Preuve 64** *T induit une fibrée principale avec fibre  $U(1)$  par la construction suivante :*

$$\text{Nous définissons } E = \{(g, A) \in G \times \mathcal{U}(\mathcal{H}) \mid T(g) = \Pi(A)\}$$

$$\text{Projection : } \sigma : E \rightarrow G : (g, A) \mapsto g$$

Si nous posons  $\alpha : E \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) : (g, A) \mapsto A$  le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{U}(\mathcal{H}) \\ \sigma \downarrow \uparrow j & & \downarrow \Pi \\ G & \xrightarrow{T} & \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}) \end{array}$$

(pour plus de détails voir Hirzebruch, "Topological methods in algebraic geometry").

On peut alors montrer, à l'aide d'une suite de théorèmes assez profondes de la topologie algébrique, qu'il existe une application continue  $j : G \rightarrow E$  telle que  $\sigma \circ j = \text{id}$ .

L'application continue  $\mathcal{T} = \alpha \circ j$  satisfait alors

$$\Pi \circ \mathcal{T} = \Pi \circ \alpha \circ j = T \circ \sigma \circ j = T.$$

□

- Références :** [4] Hirzebruch, "Topological methods in algebraic geometry"  
 [5] Hu, "Homotopy Theory", Academic Press (1959).  
 [2] Eilenberg & Steenrod, "Foundations of algebraic topology."  
 [6] Steenrod, "Topology of fibre bundles".

Nous savons avec ce théorème (que nous ne pouvons pas démontrer) qu'une application continue  $\mathcal{T}$  avec  $\Pi \circ \mathcal{T} = T$  de  $G$  sur  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  existe. Mais nous voulons démontrer plus : si  $T$  est une représentation projective nous pouvons choisir  $\mathcal{T}$  telle qu'elle est une représentation de  $G$ . Pour ceci nous devons introduire des "factor sets" : soient  $G$  et  $K$  des groupes de Lie,  $K$  un

groupe commutatif.  $\omega$  "factor set" pour le couple  $(G, K)$  est une application continue

$$\omega : G \times G \rightarrow K$$

telle que  $\omega(1, 1) = 1$  et

$$\omega(x, y)\omega(xy, z) = \omega(x, yz)\omega(y, z) \quad \forall x, y, z \in G.$$

Soit  $E^\omega$  le groupe topologique  $G \times K$  avec le produit

$$(x_1, k_1)(x_2, k_2) = (x_1x_2, \omega(x_1, x_2)k_1k_2)$$

Avec  $G$  et  $K$  aussi  $E^\omega$  est un groupe topologique et  $K$  est immersé via

$$i : K \rightarrow E^\omega : k \mapsto (1, k).$$

$$\text{Avec } \alpha : E^\omega \rightarrow G : (x, k) \mapsto x$$

nous avons la séquence exacte

$$1 \rightarrow K \xrightarrow{i} E^\omega \xrightarrow{\alpha} G \rightarrow 1.$$

On peut démontrer que  $E^\omega$  est même un groupe de Lie (ce qui n'est pas très surprenant, voir e.g. Montgomery & Zippin, "Topological transformation groups, 1955).

**Définition 6.5** *Factor set*

Soient  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{K}$  les algèbres de Lie de  $G$  et  $K$ . Une application anti-symétrique

$$\theta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K} : (x, y) \rightarrow \theta(x, y)$$

est appelée "factor set" pour le couple  $(\mathcal{G}, \mathcal{K})$  si elle satisfait

$$\theta(x, [y, z]) + \theta(y, [z, x]) + \theta(z, [x, y]) = 0. \quad (6.31)$$

Le "factor set"  $\theta$  est appelé **trivial** s'il existe une application linéaire  $\vartheta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$  telle que

$$\theta(x, y) = \vartheta([x, y]).$$

Dans ce cas l'équation (6.31) est une simple conséquence de l'identité de Jacobi pour  $[, ]$  et de la linéarité de  $\vartheta$ .

L'ensemble de tous les factor sets forme un groupe additif et les factor sets triviaux sont un sous-groupe (abélien, donc normal). Le quotient  $\{\theta\}/\{\vartheta\}$  est appelé le deuxième groupe de co-homologie de  $\mathcal{G}$  avec coefficients dans  $\mathcal{K}$ .

Nous dénommons  $\dot{\alpha}$  l'application sur l'algèbre de Lie  $\mathcal{E}^\omega$  (de  $E^\omega$ ) dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$  induite par  $\alpha$ . C'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathcal{E}^\omega$  il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $\exp(\epsilon x) \in E^\omega$  est tel que  $\alpha(\exp(\epsilon x)) \in V \subset G$  peut être représenté de la forme  $\exp(y)$  pour un  $y \in \mathcal{G}$ .

Nous posons  $\dot{\alpha}(x) = \frac{1}{\epsilon}y \in \mathcal{G}$ . La séquence

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^\omega \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

est exacte. Nous choisissons maintenant une application linéaire  $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}^\omega$  telle que  $\dot{\alpha}\beta = \mathbb{I}$ . Ceci est possible parce que  $\dot{\alpha}$  est surjective ( $\dim \mathcal{E}^\omega = \dim \mathcal{G} + \dim \mathcal{K}$ ).

$$\text{Alors } \theta(x, y) = [\beta(x), \beta(y)] - \beta([x, y]) \quad x, y \in \mathcal{G}$$

est un factor set pour le couple  $\mathcal{G}, \mathcal{K}$  : parce que  $\dot{\alpha}(x, k) = x$  pour  $x \in \mathcal{G}$ ,  $k \in \mathcal{K}$  nous avons  $\beta(x) = (x, k(x))$  donc

$$\begin{aligned} [\beta(x), \beta(y)] - \beta([x, y]) &= ([x, y], [k(x), k(y)]_\omega) - \\ &= ([x, y], k([x, y])) = (0, [k(x), k(y)]_\omega - k([x, y])) \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Si  $\theta$  est trivial,  $\theta(x, y) = \vartheta([x, y])$  pour une application linéaire  $\vartheta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K}$ , alors

$$\mu := \beta + \vartheta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}^\omega ; x \mapsto \beta(x) + \vartheta(x)$$

définit un homomorphisme avec  $\dot{\alpha} \circ \mu = \mathbb{I}$ . En plus,

$$[\mu(x), \mu(y)] - \mu([x, y]) = [\beta(x), \beta(y)] - \beta([x, y]) - \vartheta([x, y]) = 0$$

Donc  $\mu$  est un homomorphisme des algèbres de Lie  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{E}^\omega$ . Le théorème de Lie nous dit que si  $G$  est simplement connexe,  $\mu$  peut être levé à un homomorphisme des groupes,

$$\gamma : G \rightarrow E^\omega \quad \text{tel que} \quad \mu = \dot{\gamma}.$$

Nous avons donc  $\alpha \circ \gamma = \mathbb{I}$ , donc  $\gamma$  doit être de la forme

$$\gamma : G \rightarrow E^\omega : x \rightarrow (x, \lambda(x))$$

où  $\lambda$  est une application continue. Comme  $\gamma$  est un homomorphisme de groupe, nous avons

$$(xy, \lambda(xy)) = (x, \lambda(x)) \circ (y, \lambda(y)) = (xy, \omega(x, y)\lambda(x)\lambda(y)).$$

$$\text{Donc } \omega(x, y) = \frac{\lambda(xy)}{\lambda(x)\lambda(y)} \quad \forall x, y \in G$$

(c'est-à-dire que  $\omega$  est un factor set trivial!). Nous avons donc démontré le théorème suivant :

**Théorème 6.5** Soient  $G$  et  $K$  des groupes de Lie,  $G$  simplement connexe et  $K$  abélien. Soit  $H^2(\mathcal{G}, K) = \{0\}$ . Alors, pour tout factor set  $\omega$  de  $(G, K)$  il existe une application continue  $\lambda : G \rightarrow K$  avec

$$\omega(xy) = \frac{\lambda(x)\lambda(y)}{\lambda(xy)} \quad \forall x, y \in G.$$

Ceci nous met en position de prouver le théorème final :

**Théorème 6.6** (Bargmann) Soit  $G$  un groupe de Lie simplement connexe avec  $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) = \{0\}$ . Alors toute représentation projective  $T : G \rightarrow \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}})$  admet une levée  $\mathcal{T} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  qui est une représentation de  $G$  dans  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ .

**Preuve 6.5** D'après le théorème 6.4 il existe une application continue  $\sigma : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  avec  $\Pi \circ \sigma = T$ . Nous avons alors

$$\begin{array}{ccccccc} & & & G & & & \\ & & & \swarrow & & \searrow & \\ 1 & \rightarrow & U(1) & \rightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{U}(\hat{\mathcal{H}}) \rightarrow 1 \end{array}$$

Nous choisissons  $\sigma$  telle que  $\sigma(1) = 1$ .

Pour  $x, y \in G$  nous avons

$$\Pi(\sigma(x)\sigma(y)) = \Pi(\sigma(x)) \circ \Pi(\sigma(y)) = T(x) \cdot T(y) = T(xy) = \Pi(\sigma(xy)).$$

Donc  $\sigma(x)\sigma(y)$  ne peuvent différer de  $\sigma(xy)$  que par un facteur  $\omega(x, y) \in U(1)$  d'après le diagramme ci-dessus. C'est-à-dire que

$$\sigma(x)\sigma(y) = \omega(x, y)\sigma(x \cdot y).$$

$\omega$  est continue. En effet, pour un vecteur unitaire  $\psi \in \mathcal{H}$  nous avons

$$\begin{aligned} & [\omega(x', y') - \omega(x, y)]\sigma(x'y')\psi = \\ & \omega(x, y)[\sigma(x \cdot y) - \sigma(x' \cdot y')]\psi + \sigma(x')[\sigma(y') - \sigma(y)]\psi + [\sigma(x') - \sigma(x)]\sigma(y)\psi. \end{aligned}$$

En prenant les normes nous trouvons :

$$\begin{aligned} |\omega(x', y') - \omega(x, y)| & \leq \|\sigma(x \cdot y)\psi - \sigma(x' \cdot y')\psi\| + \|(\sigma(y') - \\ & \sigma(y))\psi\| - \|(\sigma(x') - \sigma(x))\psi\|. \end{aligned}$$

Donc la continuité de  $\omega$  suit de celle de  $\sigma$  et des applications

$$(x, y) \rightarrow \sigma(xy)\psi, \sigma(y)\psi, \sigma(x)\psi.$$

En plus,  $\omega$  est un factor set pour le couple  $(G, U(1))$ , parce que

$$\begin{aligned}\omega(x, y) &= \sigma(x)\sigma(y)\sigma(x \cdot y)^{-1} \\ \omega(x, y)\omega(x \cdot y, z) &= \sigma(x)\sigma(y)\sigma(z)\sigma(xyz)^{-1} \\ &= \sigma(x) \underbrace{\sigma(y)\sigma(z)\sigma(yz)^{-1}}_{\omega(y, z) \in U(1)} \sigma(yz)\sigma(xyz)^{-1} \\ &= \underbrace{\sigma(x)\sigma(yz)\sigma(xyz)^{-1}}_{\omega(x, yz)} \omega(y, z).\end{aligned}$$

Comme l'algèbre de Lie de  $U(1)$  est  $\mathbb{R}$  et  $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R}) = \{0\}$  d'après le théorème 6.5 il existe une application  $\lambda : G \rightarrow U(1)$  avec

$$\omega(x, y) = \frac{\lambda(xy)}{\lambda(x)\lambda(y)}.$$

Nous posons alors  $\mathcal{T}(x) = \lambda(x)\sigma(x)$ . Ceci est le lift de  $T$ .

Il est évident que  $\mathcal{T}$  est une représentation. Mais

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(x)\mathcal{T}(y) &= \lambda(x)\lambda(y)\sigma(x)\sigma(y) \\ &= \omega(x, y)\lambda(x)\lambda(y)\sigma(xy) = \lambda(xy)\sigma(xy) = \mathcal{T}(xy).\end{aligned}$$

□

Ce théorème explique pourquoi un groupe de symétrie de la mécanique classique doit être remplacé par son recouvrement universel en mécanique quantique :

$$\begin{aligned}\mathrm{SO}(3) &\rightarrow \mathrm{SU}(2) \\ \mathcal{L}_+^\dagger &\rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \\ \mathcal{P}_4 &= \mathbb{R}^4 \circledast \mathcal{L}_+^\dagger \rightarrow \mathbb{R}^4 \circledast \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})\end{aligned}$$

et ce théorème est donc à la base de l'existence de **fermions** (qui ne se transforment pas d'après une représentation de  $\mathrm{SO}(3)$  sous rotations). Ici  $\circledast$  est le produit semi-direct, c'est-à-dire  $(x, \Lambda_1) \circledast (y, \Lambda_2) = (x + \Lambda_1 y, \Lambda_1 \Lambda_2)$  pour  $(x, \Lambda_1)$  et  $(y, \Lambda_2) \in \mathcal{P}_4$ .

# Bibliographie

- [1] Charles W. Curtis & Irving Reiner , "*Representation theory of finite groups and associative algebras*", AMS Chelsea Publishing (2006).
- [2] Samuel Eilenberg & Norman E. Steenrod, "*Foundations of algebraic topology*", Princeton (1952).
- [3] G.H. Hardy & E.M. Wright, "*An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.*", Clarendon Press, (Oxford, 1979).
- [4] Friedrich Hirzebruch, "*Topological methods in algebraic geometry*", Springer Verlag (1991).
- [5] S.T. Hu, "*Homotopy Theory*", Academic Press (1959).
- [6] Norman E. Steenrod, "*Topology of fibre bundles*" Princeton (1951).
- [7] M. Naïmark et A. Stern "Théorie des Représentations des groupes", Edition Mir (1979).
- [8] L. Pontrjagin "*Topological Groups*", Princeton (1946).
- [9] M. Reed and B. Simon "*Funtional Analysis*" Vol I, Academic Press, New York (1980).
- [10] J. P. Serre, "*Lie Groups and Lie Algebras*", Benjamin, 1965.
- [11] V.S. Varadarajan, "*Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*", Spinger (1974).
- [12] Hermann Weyl, "*The Classical Groups : Their Invariants and Representations*", Princeton (1953).
- [13] E. P. Wigner, "*Group theory*", Academic Press, 1959.