LES TENSEURS

On considère un espace linéaire (par exemple R^3). Grosso modo un tenseur est un objet associé à cet espace (par exemple une grandeur physique) qui obéit à une certaine loi de transformation lorsqu'on change de système de coordonnées (l'expression de cet objet dans le nouveau système de coordonnées est obtenue à partir de celle dans l'ancien système de coordonnées d'une façon très spécifique). Le terme "tenseur" fut introduit par le physicien W. Voigt; le mot vient du fait que l'on peut représenter les tensions dans un solide par un tenseur.

Du point de vue mathématique, le concept de tenseur est une généralisation de celui de vecteur.

1 Vecteurs

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel réel de dimension n ($n < \infty$)[1]. Nous désignons par $\mathcal{V}^*$ le dual de $\mathcal{V}$: $\mathcal{V}^*$ est l'ensemble des applications linéaires $f : \mathcal{V} \to R$. $\mathcal{V}^*$ est également un espace vectoriel réel de dimension n. Si $f \in \mathcal{V}^*$, nous utilisons la notation $\langle f, v\rangle$ pour la valeur $f(v)$ de f appliqué au vecteur $v \in \mathcal{V}$; donc

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}\rangle \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R}\ . \tag{1}$$

Dans la suite nous utiliserons la notation v^* (plutôt que f) pour les éléments de $\mathcal{V}^*$. Donc

$$\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v}\rangle \equiv \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{R} \qquad \text{si } \boldsymbol{v}^* \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^*,\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}\ . \tag{1'}$$

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de $\mathcal{V}$ nous désignons par $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ la base duale de $\mathcal{V}^*$:

$$\langle e^{*i}, e_j\rangle \equiv e^{*i}(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \ . \tag{2}$$

Nous utilisons des indices inférieurs pour des vecteurs de $\mathcal{V}$ et des indices supérieurs pour des vecteurs de $\mathcal{V}^*$. La raison pour ce choix deviendra plus claire par la suite.

[1] Nous ne considérons ici que des espaces vectoriels sur le corps R, car c'est suffisant pour la plupart des applications en physique; les définitions s'étendent aisément à des espaces vectoriels sur des corps K plus généraux.

L'espace vectoriel $\mathcal{V}$ et son dual $\mathcal{V}^*$ sont isomorphes. Néanmoins, il convient de distinguer entre des vecteurs appartenant à $\mathcal{V}$ et des vecteurs appartenant à $\mathcal{V}^*$. Les premiers sont appelés des vecteurs contravariants, les derniers des vecteurs covariants. Cette terminologie reflète le comportement des composantes des vecteurs dans différentes bases lors du passage d'une base à une autre, comme nous allons l'expliquer maintenant.

1.1 Vecteurs covariants

Les éléments v^* de $\mathcal{V}^*$ sont appelés des **vecteurs covariants**. Donc un vecteur covariant est une application linéaire $v^* : \mathcal{V} \to R$. Pour expliquer la terminologie, regardons comment se transforment leurs composantes dans différentes bases lors du passage entre deux bases. Si $v^* \in \mathcal{V}^*$ et $\{e_j\}$ est une base de $\mathcal{V}$, on peut exprimer v^* comme combinaison linéaire des n vecteurs $e^{*1}, \ldots, e^{*n}$ qui forment une base de $\mathcal{V}^*$:

$$v^* = \sum_{k=1}^{n} v_k e^{*k} \ , \tag{3}$$

où $v_1, \ldots, v_k$ sont des nombres réels appelés les **composantes de v^* par rapport à la base** $\{e_j\}$ (observer que le développement dans (3) est dans la base duale $\{e^{*k}\}$, qui est une base de $\mathcal{V}^*$; la base duale est déterminée de façon univoque par la donnée de la base $\{e_j\}$ de $\mathcal{V}$, donc la terminologie "composantes de v^* par rapport à la base $\{e_j\}$" est raisonnable). En vertu de (2), on a l'expression suivante pour les composantes de v^* :

$$v_k = \langle v^*, e_k \rangle \equiv v^*(e_k) \ .$$

Prenons maintenant une deuxième base $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ de $\mathcal{V}$, et désignons la base duale par $\{\tilde{e}^{*1}, \ldots, \tilde{e}^{*n}\}$ (donc $\langle \tilde{e}^{*i}, \tilde{e}_j \rangle = \delta^i_j$). Chacun des vecteurs $\tilde{e}_j$ est une combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$, nous pouvons donc écrire

$$\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^{n} {\alpha_j}^k e_k \ . \tag{4}$$

Les n^2 nombres ${\alpha_j}^k$ décrivent le changement de base $\{e_j\} \to \{\tilde{e}_j\}$, on peut les considérer comme formant une matrice $n \times n$, $\alpha \equiv \{{\alpha_j}^k\}$ (le premier indice j spécifiant la ligne, le deuxième indice k la colonne de cette matrice; leur emplacement, supérieur ou inférieur, sera expliqué ultérieurement).

De façon similaire, chacun des vecteurs $\tilde{e}^{*j}$ est une combinaison linéaire de $e^{*1}, \ldots, e^{*n}$:

$$\tilde{e}^{*j} = \sum_{k=1}^{n} \beta^j{}_k e^{*k} \ . \tag{5}$$

Comme les bases duales sont déterminées par la donnée des bases de $\mathcal{V}$, il est clair qu'il doit y avoir une relation entre la matrice $\beta \equiv \{\beta^j{}_k\}$ et la matrice $\alpha \equiv \{\alpha_j{}^k\}$.

Exercice 1 :
(a) $\det(\alpha) \neq 0$. (a) Montrer que $\beta\alpha^T = I =$ la matrice identité (donc $\beta = (\alpha^T)^{-1}$ est l'inverse du transposé de la matrice α).
(b) Si v_k désignent les composantes d'un vecteur covariant v^* par rapport à la base $\{e_j\}$ et $\tilde{v}_k$ celles par rapport à la base $\{\tilde{e}_j\}$ (donc $v^* = \sum_{k=1}^{n} v_k e^{*k} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{v}_k \tilde{e}^{*k}$), montrer que

$$\tilde{v}_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_j{}^k v_k \ . \tag{6}$$

Commentaire : La formule (6) montre que les composantes d'un vecteur covariant se transforment de la même façon que les bases de $\mathcal{V}$ (c'est-à-dire avec la matrice α), d'où la terminologie **co**variant (se transformer **co**mme les bases). Il ne faut pas oublier dans ce contexte que les composantes d'un vecteur covariant sont définies par rapport à des bases de $\mathcal{V}^*$, tandis que la matrice α détermine un changement de base dans $\mathcal{V}$.

1.2 Vecteurs contravariants

Les éléments v de $\mathcal{V}$ sont appelés des **vecteurs contravariants**. Ces vecteurs peuvent être développés dans des bases de $\mathcal{V}$. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une telle base, on aura

$$v = \sum_{k=1}^{n} v^k e_k \ ,$$

où $v^1, \ldots, v^n$ sont des nombres réels appelés les **composantes de v par rapport à la base** $\{e_j\}$. Ils sont donnés par $v^k = \langle e^{*k}, v \rangle$. Si on désigne par $\tilde{v}^k$ les composantes de v par rapport à une autre base $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ de $\mathcal{V}$ (donc $v = \sum_{k=1}^{n} v^k e_k = \sum_{k=1}^{n} \tilde{v}^k \tilde{e}_k$), alors

$$\tilde{v}^j = \sum_{k=1}^{n} \beta^j{}_k v^k \ , \tag{7}$$

où $\beta \equiv \{\beta^j{}_k\}$ est la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$.

Exercice 2 : Démontrer la loi de transformation (7).
Commentaire : Le terme "vecteur **contra**variant" s'explique par le fait que ses composantes se transforment **contra**irement aux vecteurs de base (c'est-à-dire comme les vecteurs des bases duales, avec la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$).

2 Tenseurs

2.1 Tenseurs covariants d'ordre 2

Soit v^{*1} et v^{*2} deux vecteurs covariants. On peut leur associer un produit (leur "**produit tensoriel**"), désigné par $v^{*1} \otimes v^{*2}$, de la façon suivante : $v^{*1} \otimes v^{*2}$ est une application de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans R donnée par

$$v^{*1} \otimes v^{*2}(v_1, v_2) = \langle v^{*1}, v_1 \rangle \langle v^{*2}, v_2 \rangle \ , \tag{8}$$

où v_1, v_2 varient sur $\mathcal{V}$ (tandis que v^{*1} et v^{*2} sont fixés). Il est clair que $v^{*1} \otimes v^{*2}$ définit une application bilinéaire (linéaire dans le premier argument v_1 ainsi que dans le deuxième argument v_2) de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ dans R. C'est un cas particulier d'un tenseur covariant d'ordre 2. En général un **tenseur covariant d'ordre 2** est une application bilinéaire $T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$, donc satisfaisant

$$\begin{aligned} T(v_1 + \lambda_1 w_1, v_2 + \lambda_2 w_2) = {} & T(v_1, v_2) + \lambda_2 T(v_1, w_2) + \\ & + \lambda_1 T(w_1, v_2) + \lambda_1 \lambda_2 T(w_1, w_2) \end{aligned} \tag{9}$$

si $v_i, w_i \in \mathcal{V}$ et $\lambda_i \in R$. Nous désignons par $\mathcal{T}_2^0$ l'ensemble des tenseurs covariants d'ordre 2. $\mathcal{T}_2^0$ est un espace vectoriel (on peut additionner des applications bilinéaires, et on peut les multiplier par des constantes). $\mathcal{T}_2^0$ contient des applications autres que les produits de vecteurs covariants[2].

La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_2^0$ est n^2. Pour le voir, soit $\{e_1, \ldots e_n\}$ une base de $\mathcal{V}$, $\{e^{*1}, \ldots, e^{*n}\}$ la base duale de $\mathcal{V}^*$. Considérons les n^2 éléments de $\mathcal{T}_2^0$ formés par les tenseurs produits

$$E^{jk} \equiv e^{*j} \otimes e^{*k} \qquad (j, k = 1, \ldots, n) \ , \tag{10}$$

[2]Exemple : si $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathcal{V}$, alors l'application bilinéaire $e^{*1} \otimes e^{*1} + e^{*2} \otimes e^{*2}$ n'est pas un produit; on peut vérifier que l'hypothèse $e^{*1} \otimes e^{*1} + e^{*2} \otimes e^{*2} = v^{*1} \otimes v^{*2}$, pour certains $v^{*1}, v^{*2} \in \mathcal{V}^*$, mène à une contradiction. **Exercice supplémentaire:** Montre ceci.

donc $E^{jk}(v_1, v_2) = \langle e^{*j}, v_1\rangle\langle e^{*k}, v_2\rangle$. Ces n^2 tenseurs $\{E^{jk}\}$ forment une base de $\mathcal{T}_2^0$, comme expliqué dans l'exercice qui suit :

Exercice 3 : (a) Vérifier que les E^{jk} sont linéairement indépendants. Plus précisément : supposer que $T \equiv \sum_{j,k=1}^n \lambda_{jk}E^{jk} = 0$; en calculant $T(e_i, e_\ell)$, on trouve que $\lambda_{i\ell} = 0$.
(b) Si $T \in \mathcal{T}_2^0$ est un tenseur covariant arbitraire d'ordre 2, montrer qu'il existe des constantes T_{jk} telles que

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} T_{jk}E^{jk} \ . \tag{11}$$

Indication : Puisque T et E^{jk} sont bilinéaires, il suffit de vérifier l'identité (11) sur des vecteurs de la base $\{e_j\}$, donc

$$T(e_i, e_\ell) = \sum_{j,k=1}^{n} T_{jk}E^{jk}(e_i, e_\ell) \qquad \forall\, i, \ell = 1, \ldots, n \ . \tag{12}$$

Se convaincre que ceci est satisfait si

$$T_{jk} = T(e_j, e_k) \ . \tag{13}$$

Les n^2 nombres T_{jk} sont appelés les **composantes du tenseur** T par rapport à la base $\{e_j\}$. Par rapport à une autre base $\{\tilde{e}_j\}$ de $\mathcal{V}$, les composantes de T sont les nombres

$$\tilde{T}_{jk} = T(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) \ . \tag{14}$$

Exercice 4 : Soit $\{\alpha_j{}^k\}$ la matrice donnant le changement de base $\{e_j\} \to \{\tilde{e}_j\}$, c'est-à-dire $\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j{}^k e_k$. Vérifier la loi de transformation des composantes de T :

$$\tilde{T}_{jk} = \sum_{i,\ell=1}^{n} \alpha_j{}^i \alpha_k{}^\ell T_{i\ell} \tag{15}$$

(un facteur $\alpha_\bullet{}^\bullet$ pour chacun des deux indices spécifiant les composantes !)

2.2 Tenseurs covariants d'ordre q

Les considérations précédentes s'étendent aisément au concept de tenseur covariant d'ordre général q ($q \in N$). Choisissons q vecteurs covariants, c'est-à-dire q éléments de $\mathcal{V}^*$ désignées par $v^{*1}, \ldots, v^{*q}$. Leur produit tensoriel est l'application de $\underbrace{\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{q \text{ fois}}$ dans R donnée par

$$v^{*1} \otimes \cdots \otimes v^{*q}(v_1, \ldots, v_q) = \langle v^{*1}, v_1 \rangle \langle v^{*2}, v_2 \rangle \cdots \langle v^{*q}, v_q \rangle \ , \tag{16}$$

où les $v_1, \ldots, v_q$ varient sur $\mathcal{V}$. Le produit $v^{*1} \otimes \cdots \otimes v^{*q}$ définit une application multilinéaire (linéaire dans chacun des q arguments) de $\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}$ dans R. Plus généralement, un **tenseur covariant d'ordre** q est défini comme une application multilinéaire

$$T : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{q \text{ fois}} \to R \ ,$$

satisfaisant donc

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, v_{j-1}, v + \lambda w, v_{j+1}, \ldots, v_q) \quad &= \\ T(v_1, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots, v_q) + \lambda T(v_1, &\ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_q) \end{aligned} \tag{17}$$

pour chaque $j = 1, \ldots, q$ ($v, w, v_i \in \mathcal{V}, \lambda \in R$).

Nous désignons par $\mathcal{T}_q^0$ l'ensemble des tenseurs covariants d'ordre q. (Pour $q = 1$ on obtient les vecteurs covariants, donc $\mathcal{T}_1^0 = \mathcal{V}^*$). $\mathcal{T}_q^0$ est un espace vectoriel (on peut additionner des tenseurs covariants du *même* ordre q, et on peut les multiplier par des constantes). On peut introduire une base de $\mathcal{T}_q^0$, en commençant par une base $\{e_j\}$ de $\mathcal{V}$ et en prenant tous les tenseurs qui sont un produit de q vecteurs de la base duale $\{e^{*i}\}$. Plus précisément, soit

$$E^{i_1 \cdots i_q} = e^{*i_1} \otimes \cdots \otimes e^{*i_q} \qquad (i_1, \ldots, i_q = 1, \ldots, n) \tag{18}$$

le produit (au sens tensoriel) des vecteurs $e^{*i_1}, \ldots, e^{*i_q}$ (à noter que le même vecteur de la base duale $\{e^{*j}\}$ peut apparaître plusieurs fois dans (18)). Donc $E^{i_1 \cdots i_q}$ est une application multilinéaire $\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \to R$ donnée par

$$E^{i_1 \cdots i_q}(v_1, \ldots, v_q) = \langle e^{*i_1}, v_1 \rangle \langle e^{*i_2}, v_2 \rangle \cdots \langle e^{*i_q}, v_q \rangle \ . \tag{19}$$

En répétant les arguments de l'Exercice 3 (avec q facteurs au lieu de 2 facteurs), on voit que les n^q tenseurs $\{E^{i_1 \cdots i_q}\}$ forment une base de $\mathcal{T}_q^0$. Donc si

$T \in \mathcal{T}_q^0$ est un tenseur covariant d'ordre q, on peut l'écrire comme combinaison linéaire des $E^{i_1 \cdots i_q}$:

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_q = 1}^{n} T_{i_1 \cdots i_q} E^{i_1 \cdots i_q} \ , \tag{20}$$

les nombres $T_{i_1 \cdots i_q}$ étant donnés par

$$T_{i_1 \cdots i_q} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}) \ . \tag{21}$$

Ce sont les **composantes du tenseur** T par rapport à la base $\{e_i\}$.

Exercice 5 : Déterminer la loi de transformation des composantes d'un tenseur T covariant. Plus précisément : soit $\{\tilde{e}_j\}$ une deuxième base de $\mathcal{V}$ ($\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n \alpha_j{}^k e_k$), et soit $\tilde{T}_{i_1 \cdots i_q}$ les composantes de T par rapport à cette base :

$$\tilde{T}_{i_1 \cdots i_q} = T(\tilde{e}_{i_1}, \ldots, \tilde{e}_{i_q}) \ . \tag{22}$$

Etablir la relation entre les $\tilde{T}_{i_1 \cdots i_q}$ et les $T_{i_1 \cdots i_q}$.

Dans (8) et (16) nous avons introduit la multiplication de vecteurs covariants. De façon similaire on peut définir la **multiplication (tensorielle) de tenseurs** covariants arbitraires (pas nécessairement du même ordre). Si $S \in \mathcal{T}_q^0$ et $T \in \mathcal{T}_s^0$, alors le **produit** $S \otimes T$ est un tenseur covariant d'ordre $q+s$ (c'est-à-dire $S \otimes T \in \mathcal{T}_{q+s}^0$) défini par

$$S \otimes T(v_1, \ldots, v_{q+s}) = S(v_1, \ldots, v_q) T(v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}) \ . \tag{23}$$

Pour $q = s = 1$, (23) est identique avec (8).

Exercice 6 : (a) Vérifier que la formule (23) définit bien un tenseur (c'est-à-dire une application multilinéaire).
(b) Est-ce que la multiplication de tenseurs est commutative ou non ?
(c) Exprimer les composantes du produit $S \otimes T$ en termes des composantes de S et de T.

2.3 Tenseurs contravariants

La théorie des tenseurs contravariants est très similaire à celle des tenseurs covariants, il suffit de remplacer partout l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V}^*$ (et donc $\mathcal{V}^*$ par $(\mathcal{V}^*)^*$). Ici il faut se rappeler qu'on peut identifier $(\mathcal{V}^*)^*$ avec $\mathcal{V}$. En effet, chaque vecteur $v \in \mathcal{V}$ définit une application linéaire $\mathcal{V}^* \to R$ par la formule

$$v(v^*) = \langle v^*, v \rangle \; ; \tag{24}$$

ici v est fixé et v^* varie sur $\mathcal{V}^*$. D'autre part $\dim(\mathcal{V}^*)^* = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V} = n$; donc chaque élément de $(\mathcal{V}^*)^*$ peut être identifié de façon univoque avec un vecteur v de $\mathcal{V}$.

Un vecteur contravariant était défini comme un élément v de $\mathcal{V}$, c'est donc aussi une application linéaire $\mathcal{V}^* \to R$. Un **tenseur contravariant d'ordre** p ($p \in N$) est une application multilinéaire $T : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*}_{p \text{ fois}} \to R$, satisfaisant donc

$$\begin{aligned} T(v^{*1}, \ldots, v^{*j-1}, v^* + \lambda w^*, v^{*j+1}, \ldots, v^{*p}) \quad &= \\ T(v^{*1}, \ldots, v^{*j-1}, v^*, v^{*j+1}, \ldots, v^{*p}) + \lambda T(v^{*1}, &\ldots, v^{*j-1}, w^*, v^{*j+1}, \ldots, v^{*p}) \end{aligned} \tag{25}$$

pour $j = 1, \ldots, p$ ($v^*, w^*, v^{*i} \in \mathcal{V}^*, \lambda \in R$). L'ensemble des tenseurs contravariants d'ordre p est désigné par $\mathcal{T}_0^p$ ($\mathcal{T}_0^1 \equiv \mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs contravariants). $\mathcal{T}_0^p$ est un espace vectoriel; une base de $\mathcal{T}_0^p$ est donnée par les n^p tenseurs

$$E_{j_1 \cdots j_p} = e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p} \qquad (j_1, \ldots, j_p = 1, \ldots, n) \; . \tag{26}$$

$E_{j_1 \cdots j_p}$ est le produit, au sens tensoriel, de p vecteurs d'une base $\{e_j\}$ de $\mathcal{V}$. Ses valeurs sont

$$E_{j_1 \cdots j_p}(v^{*1}, \ldots, v^{*p}) = \langle v^{*1}, e_{j_1} \rangle \langle v^{*2}, e_{j_2} \rangle \cdots \langle v^{*p}, e_{j_p} \rangle \; . \tag{27}$$

Si $T \in \mathcal{T}_0^p$ est un tenseur contravariant d'ordre p, il peut être écrit comme combinaison linéaire des $E_{j_1 \cdots j_p}$:

$$T = \sum_{j_1, \ldots, j_p = 1}^{n} T^{j_1 \cdots j_p} E_{j_1 \cdots j_p} \; , \tag{28}$$

avec

$$T^{j_1 \cdots j_p} = T(e^{*j_1}, \ldots, e^{*j_p}) \; . \tag{29}$$

Les nombres $T^{j_1 \cdots j_p}$ sont appelés les **composantes** du tenseur $T \in \mathcal{T}_0^p$ par rapport à la base $\{e_j\}$ (les indices spécifiant ces composantes sont placés en haut, ce qui distingue les tenseurs contravariants des tenseurs covariants dont les composantes sont écrites avec des indices inférieurs).

Exercice 7 : (a) Soit $T \in \mathcal{T}_0^p$ et $p = 2$. En procédant comme dans l'Exercice 3(b), vérifier (28)-(29) dans ce cas.
(b) Soit $T \in \mathcal{T}_0^p$, $T^{j_1 \cdots j_p}$ ses composantes par rapport à une base $\{e_j\}$ de $\mathcal{V}$ et $\tilde{T}^{j_1 \cdots j_p}$ ses composantes par rapport à une autre base $\{\tilde{e}_j\}$. En utilisant (5), déterminer la loi de transformation de ces composantes (considérer d'abord le cas $p = 2$, puis le cas général).
(c) Donner la formule pour la multiplication tensorielle de tenseurs contravariants (si $S \in \mathcal{T}_0^p$ et $T \in \mathcal{T}_0^r$, alors $S \otimes T$ sera un tenseur contravariant d'ordre $p + r$).

2.4 Tenseurs mixtes

Une combinaison des notions de tenseur covariant et tenseur contravariant donne celle de **tenseur mixte**. Un tenseur p fois contravariant et q fois covariant sur $\mathcal{V}$ est une application multilinéaire (c'est-à-dire linéaire dans chaque argument)

$$\boldsymbol{T} : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*}_{\boldsymbol{p} \text{ fois}} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{\boldsymbol{q} \text{ fois}} \to \boldsymbol{R} \qquad \mathbf{(30)}$$

(donc les p premiers arguments sont des vecteurs de $\mathcal{V}^*$, les q derniers des vecteurs appartenant à $\mathcal{V}$). Nous dirons aussi que T est un tenseur du type (p, q) sur $\mathcal{V}$. Le nombre $p + q$ est appelé le **rang** du tenseur T.

L'ensemble des tenseurs du type (p, q) sera désigné par $\mathcal{T}_q^p$. Si $p = 0$, resp. $q = 0$, on retrouve l'espace $\mathcal{T}_q^0$ des tenseurs covariants d'ordre q, resp. l'espace $\mathcal{T}_0^p$ des tenseurs contravariants d'ordre p. On définit encore (pour $p = q = 0$) les tenseurs de $\mathcal{T}_0^0$ comme étant des constantes; donc un tenseur du type $(0, 0)$ est un nombre réel, et ces tenseurs sont appelés des **scalaires**.

Il est clair que $\mathcal{T}_q^p$ est un espace vectoriel (on peut additionner des tenseurs du *même* type, et on peut les multiplier par des scalaires). On peut aussi multiplier deux tenseurs quelconques : Si $S \in \mathcal{T}_q^p$ et $T \in \mathcal{T}_s^r$, leur **produit** $S \otimes T$ est un tenseur du type $(p + r, q + s)$ donné par

$$\begin{aligned} S \otimes T(v^{*1}, \ldots, v^{*p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) \quad &= \\ S(v^{*1}, \ldots, v^{*p}, v_1, \ldots, v_q) T(v^{*p+1}, \ldots, v^{*p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}) \ . \end{aligned} \qquad (31)$$

Une base de $\mathcal{T}_q^p$ peut être construite en prenant les n^{p+q} produits de p vecteurs d'une base $\{e_j\}$ de $\mathcal{V}$ et q vecteurs de la base duale $\{e^{*j}\}$:

$$E_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_q} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_q} \ . \qquad (32)$$

Donc

$$E^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}(v^{*1},\ldots,v^{*p},v_1,\ldots,v_q) = \langle v^{*1},e_{i_1}\rangle\cdots\langle v^{*p},e_{i_p}\rangle\langle e^{*j_1},v_1\rangle\cdots\langle e^{*j_q},v_q\rangle\ . \tag{33}$$

Le développement d'un tenseur général $T \in \mathcal{T}^p_q$ dans cette base est :

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\ \sum_{j_1,\ldots,j_q=1}^{n} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} E^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}\ , \tag{34}$$

où les coefficients $T^{i_j\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ (des nombres réels) sont donnés par

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T(e^{*i_1},\ldots,e^{*i_p},e_{j_1},\ldots,e_{j_q})\ . \tag{35}$$

Exercice 8 : (a) Soit $S,T \in \mathcal{T}^p_q$. Quelles sont les composantes de la somme $S+T$ en termes de composantes de S et T ?
(b) Soit $S \in \mathcal{T}^p_q$ et $T \in \mathcal{T}^r_s$. Donner les composantes du produit $S\otimes T$ en termes de composantes de S et de T.
(c) Vérifier la loi de transformation des composantes d'un tenseur $T \in \mathcal{T}^p_q$ lors d'un changement de base $\tilde{e}_j = \sum_{k=1}^n {\alpha_j}^k e_k$:

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n}\ \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_q=1}^{n} {\beta^{i_1}}_{k_1}\cdots{\beta^{i_p}}_{k_p}{\alpha_{j_1}}^{\ell_1}\cdots{\alpha_{j_q}}^{\ell_q} T^{k_1\cdots k_p}_{\ell_1\cdots\ell_q}\ . \tag{36}$$

Donc chaque composante contravariante se transforme avec la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$ et chaque composante covariante avec la matrice α.

Attention : Une matrice $n\times n$ est une notation commode pour plusieurs objets mathématiques de nature très différente: a) une collection quelconque de n^2 valeurs, b) la représentation d'une application linéaire $A:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ dans une base donnée de cet espace, c) les composantes d'un tenseur de rang 2 dans une base donnée (notons que cette possibilité d'écriture pour un tenseur est très particulière: dès que le rang de celui-ci est supérieur à 2, l'écriture matricielle n'est plus possible). Les matrices $\alpha = \{{\alpha_j}^k\}$ et $\beta = \{{\beta^j}_k\}$, faisant partie de la catégorie b) ci-dessus, décrivent le passage entre deux bases et n'ont aucun rapport avec un tenseur; les composantes d'un tenseur se réfèrent à une seule base, tandis que les ${\alpha_j}^k$ et ${\beta^j}_k$ sont des objets dépendant de deux bases différentes.

2.5 Convention de sommation d'Einstein

Dorénavant l'équation (36) sera écrite comme suit :

$$\tilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \beta^{i_1}{}_{k_1}\cdots\beta^{i_p}{}_{k_p}\alpha_{j_1}{}^{\ell_1}\cdots\alpha_{j_q}{}^{\ell_q}T^{k_1\cdots k_p}_{\ell_1\cdots\ell_q}\ . \tag{37}$$

Dans (37) nous avons omis d'indiquer les opérations de sommation, en utilisant la convention suivante :

> Si dans une expression un indice apparaît deux fois (une fois en haut, une fois en bas), il est sous-entendu qu'on somme sur les valeurs possibles de cet indice (donc de 1 à n). Un indice de ce type est appelé un **indice muet**.

Un indice apparaissant une seule fois dans une expression est appelé un **indice libre**.

Exemples : (a) Dans (37), $i_1,\ldots,i_p$, $j_1,\ldots,j_q$ sont des indices libres, ils apparaissent une fois dans le membre de gauche et une fois dans celui de droite. $k_1,\ldots,k_p$ et $\ell_1,\ldots,\ell_q$ sont des indices muets (comparer avec (36)).
(b) Soit $n=2$. Si $\{T_{jk}\}$ est une matrice 2×2, $\{S_{ijk}\}$ un ensemble de $2^3=8$ nombres ($i,j,k=1$ ou 2) et $\vec{a}=(a^1,a^2)$ un vecteur, alors la formule

$$T_{jk} = S_{ijk}a^i \tag{38}$$

est une abréviation pour les quatre équations

$$T_{11} = \sum_{i=1}^{2} S_{i11}a^i\ ,\quad T_{12} = \sum_{i=1}^{2} S_{i12}a^i\ ,\quad T_{21} = \sum_{i=1}^{2} S_{i21}a^i\ ,\quad T_{22} = \sum_{i=1}^{2} S_{i22}a^i\ .$$

Dans l'équation (38), i est un indice muet et j,k sont des indices libres.

2.6 Terminologie des physiciens

En physique il est usuel d'utiliser le terme "tenseur" pour les composantes $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ (et non pour l'application multilinéaire T). Ces composantes ont une signification physique (par rapport à une base d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ qui peut être par exemple l'espace R^3 ou l'espace-temps de Minkowski). Donc les physiciens considèrent un tenseur comme un objet avec des indices en haut et/ou en bas (indices contravariants respectivement covariants); plus précisément, les physiciens appellent tenseur du type (p,q) la donnée, *dans* *chaque base* de $\mathcal{V}$, d'un arrangement de n^{p+q} nombres $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ ayant la loi de transformation (37) pour tout changement de base.

Tenseurs et grandeurs avec indices

Etant donné des nombres $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ et une base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $\mathcal{V}$, on peut définir une application $T : \mathcal{V}^p_q \to R$ par la formule (34), donc un tenseur du type (p,q) (comme dans (30), $\mathcal{V}^p_q$ désigne le produit cartésien de p copies de $\mathcal{V}^*$ et q copies de $\mathcal{V}$). D'autre part, étant donné, pour chaque base $\{\tilde{e}_i\}$ de $\mathcal{V}$, un arrangement de n^{p+q} nombres $\tilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$, ceci ne définit en général pas un tenseur : pour chaque base $\{\tilde{e}_i\}$ on obtient bien une application $\tilde{T} : \mathcal{V}^p_q \to R$, mais en général ces applications sont différentes l'une de l'autre (elles sont identiques si et seulement si la loi de transformation (36) est satisfaite pour chaque couple $\{e_i\}$, $\{\tilde{e}_i\}$ de bases). Donc la propriété que les $\tilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ soient un tenseur (plus précisément qu'ils définissent les composantes d'un tenseur dans les différentes bases de $\mathcal{V}$) est une propriété très spéciale.

Exercice 9 : Soit $n = 3$.
(a) Dans chaque base de $\mathcal{V}$, on se donne trois nombres comme suit : $T = (0,1,0)$ [donc le même arrangement de trois nombres dans chaque base]. Est-ce que ceci définit un vecteur covariant ou non ?
(b) Dans chaque base de $\mathcal{V}$, on se donne neuf nombres par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Est-ce que ces nombres définissent un tenseur d'ordre 2 covariant (donc $T_{jk} = \delta_{jk}$ dans chaque base) ? Un tenseur d'ordre 2 contravariant (donc $T^{jk} = \delta^{jk}$ dans chaque base) ? Un tenseur d'ordre 2 mixte (donc $T^k_j = \delta^k_j$ dans chaque base) ?

Exercice 10 : Supposons donné dans chaque base d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ un arrangement de n^2 nombres ${b_j}^k$ ayant la propriété suivante : Pour chaque vecteur covariant S, les nombres $T_j = {b_j}^k S_k$ se transforment comme les composantes d'un vecteur covariant. Alors ${b_j}^k$ se transforme nécessairement comme un tenseur.

Ce résultat peut être utile en physique. En mécanique par exemple on a la relation $L_j = {I_j}^k \omega_k$ entre la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ et le moment cinétique $\vec{L}$; comme ce sont deux grandeurs vectorielles, I doit être un tenseur (le tenseur d'inertie.

2.7 L'opération de contraction

La **contraction (simple)** est une application linéaire de $\mathcal{T}^p_q$ dans $\mathcal{T}^{p-1}_{q-1}$ (si $p, q \geq 1$). La définition la plus simple est en termes de composantes. Soit $T \in \mathcal{T}^p_q$. Les composantes $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ de T dans une base $\{e_i\}$ portent p indices libres contravariants $(i_1, \ldots, i_p)$ et q indices libres covariants $(j_1, \ldots, j_q)$. On choisit une paire formée d'un indice contravariant et d'un indice covariant et donne le même nom à ces deux indices; ainsi deux indices libres deviennent muets (et il y a une sommation à effectuer). De cette façon on obtient un arrangement de n^{p+q-2} nombres ($p-1$ indices libres contravariants et $q-1$ indices libres covariants), et il s'agit en effet d'un tenseur du type $(p-1, q-1)$ (en effectuant dans chaque base $\{\tilde{e}_i\}$ la contraction sur la même paire d'indices).

Exemple : Choisissons la paire (i_1, j_q). Les composantes du tenseur contracté seront $T^{k i_2 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_{q-1} k}$ (k étant un indice muet, donc de sommation), ou également $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_{q-1} i_1}$ (i_1 désignant l'indice de sommation).

Exercice 11 : (a) Soit S un vecteur contravariant et T un vecteur covariant. Dans une base $\{e_i\}$ on a $S = S^j e_j$ et $T = T_j e^{*j}$. Les nombres $S^j T_k$ définissent un tenseur du type $(1, 1)$. Après contraction on obtient un scalaire (le "produit scalaire" des vecteurs S et T). Vérifier cela explicitement, c'est-à-dire montrer qu'on a $\tilde{S}^j \tilde{T}_j = S^j T_j$ pour chaque autre base $\{\tilde{e}_i\}$.
(b) Soit $T^{ij}_{k\ell}$ les composantes d'un tenseur du type $(2, 2)$. Vérifier que la loi de transformation de $T^{ij}_{j\ell}$ est bien celle d'un tenseur du type $(1, 1)$. En d'autres termes : si $t^i_\ell = T^{ij}_{j\ell}$ et $\tilde{t}^i_\ell = \tilde{T}^{ij}_{j\ell}$, alors on a bien $\tilde{t}^i_\ell = \beta^i{}_k \alpha_\ell{}^r t^k_r$.

Remarque : On peut itérer l'opération de contraction et définir des **contractions multiples**. Si $m \in N$ et $p, q \geq m$, on peut choisir m paires d'indices différents, chacune formée d'un indice contravariant et d'un indice covariant, et effectuer une contraction sur chacune de ces paires. Le résultat est un tenseur du type $(p-m, q-m)$. Exemple ($m = 2$) : si $T^{ij}_{k\ell r}$ sont les composantes d'un tenseur du type $(2, 3)$, alors T^{ij}_{jir} est un vecteur covariant (r est l'indice libre).

2.8 Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques

Soit $q \geq 2$ et $1 \leq i < j \leq q$. Un tenseur $T \in \mathcal{T}^0_q$ est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) par rapport à la paire (i, j) si ses valeurs ne changent pas (resp. changent de signe) sous permutation du i-ème et j-ième argument, c'est-à-dire si

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_q) = T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_q) \tag{39}$$

resp.

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_q) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_q) \ . \tag{40}$$

T est **complètement symétrique** (resp. **complètement antisymétrique**) si (39) (resp. (40)) est satisfait pour toute paire (i, j).

De façon analogue on définit des propriétés de symétrie ou d'antisymétrie de tenseurs contravariants. Pour un tenseur mixed on ne peut parler de (anti-)symétrie que par rapport a deux indices du même type (covariant ou contravariant).

Exercice 12 : (a) Utiliser (21) pour exprimer la propriété de symétrie ou d'antisymétrie d'un tenseur $T \in \mathcal{T}_q^0$ en termes des composantes de T. Si $q = 2$, les composantes T_{jk} de T peuvent être considérées sous forme de matrice $n \times n$; quelles sont les propriétés spéciales de cette matrice si T est symétrique ou antisymétrique ?
(b) Vérifier que chaque tenseur covariant (ou contravariant) d'ordre 2 possède une décomposition unique en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.
(c) Soit $S \in \mathcal{T}_2^0$ un tenseur symétrique et $T \in \mathcal{T}_0^2$ un tenseur antisymétrique. Montrer que $S_{jk}T^{jk} = 0$.

Rajoutons que l'ensemble des tenseurs complètement symétriques (q fois covariants) est un sous-espace de l'espace vectoriel de $\mathcal{T}_q^0$. Il en est de même pour l'ensemble des tenseurs complètement antisymétriques.

2.9 Pseudotenseurs

Le terme "pseudotenseur" est utilisé pour certaines grandeurs qui ont une loi de transformation tensorielle pour une classe restreinte de changements de base. Des cas particuliers sont souvent rencontrés en physique.

Définition : Une **densité tensorielle** du type (p, q) et de poids N consiste en la donnée, dans chaque base de $\mathcal{V}$, de n^{p+q} nombres $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ se transformant comme suit (comparer avec (36)) :

$$\tilde{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = |\alpha|^N \beta^{i_1}{}_{k_1} \cdots \beta^{i_p}{}_{k_p} \alpha_{j_1}{}^{\ell_1} \cdots \alpha_{j_q}{}^{\ell_q} T^{k_1 \cdots k_p}_{\ell_1 \cdots \ell_q} \ , \tag{41}$$

où $\alpha = \{\alpha_j{}^k\}$ est la matrice qui définit le passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{\tilde{e}_i\}$, $|\alpha| = \det\alpha$ est le déterminant de α, et $\beta = (\alpha^T)^{-1}$.

Sous des changements de base avec $\det\alpha = 1$, (41) coïncide avec la loi de transformation d'un tenseur.

Les densités tensorielles de rang $m = p+q = 0$ sont appelées des **densités scalaires**, celles de rang $m = 1$ des **densités vectorielles** (covariantes ou contravariantes). Parfois on emploie le terme "**capacité tensorielle**" pour des densités tensorielles de poids négatif ($N < 0$).

Un tenseur est simplement une densité tensorielle de poids $N = 0$. Le produit d'une densité tensorielle de rang m_1 et poids N_1 avec une densité tensorielle de rang m_2 et poids N_2 est une densité tensorielle de rang m_1+m_2 et poids $N_1 + N_2$. Si $N_2 = -N_1$, ce produit est un tenseur de rang $m_1 + m_2$.

Exemple : Le produit d'un tenseur de rang m et d'une densité scalaire de poids N est une densité tensorielle de rang m et poids N.

Exercice 13 : **Scalaires et pseudoscalaires**
(a) Mettre en évidence la différence entre un scalaire et une densité scalaire en considérant leur loi de transformation lors du passage d'une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à la base $\{-e_1, \ldots, -e_n\}$ (donc $\tilde{e}_i = -e_i$).
(b) Si T_{jk} sont les composantes d'un tenseur covariant de rang 2, désignons par $|T| = \det\{T_{jk}\}$ le déterminant de la matrice $\{T_{jk}\}$. Est-ce que $|T|$ est un tenseur ? ou une densité tensorielle ? Si oui, indiquer son type et son poids.

Exercice 14 : **Le symbole ε de Levi-Cività**
Soit d'abord $n = 3$. On pose

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3), \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3), \\ \ \ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{42}$$

(a) Ecrire explicitement quelques valeurs de ce symbole (choisir quelques valeurs pour i, j, k et écrire la valeur de ε_{ijk})
(b) A chaque base on associe $3^3 = 27$ nombres ε_{ijk} par la définition ci-dessus (donc la définition de ces 27 nombres est la même dans chaque base : si on désigne par $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ le symbole de Levi-Cività pour une base $\{\tilde{e}_i\}$, on a $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = +1$, -1 ou 0 sous les conditions spécifiées dans (42)).
A montrer : Les ε_{ijk} définissent une densité tensorielle covariante de rang 3 (complètement antisymétrique) de poids $N = -1$ (donc du type capacité),

et les ε^{ijk} une densité tensorielle contravariante de rang 3 et poids $N = +1$.
Indications : Si $A = \{A_j{}^k\}$ est une matrice 3×3 (par exemple $A = \alpha$), posons

$$\tau_{\ell rs} = \varepsilon_{ijk} A_\ell{}^i A_r{}^j A_s{}^k \ . \tag{43}$$

(i) Vérifier que $\tau_{\ell rs}$ est complètement antisymétrique. Par conséquent on doit avoir $\tau_{\ell rs} = \nu \varepsilon_{\ell rs}$ pour un nombre $\nu \in R$.
(ii) Se convaincre que $\tau_{123} = \det A$. En déduire que $\nu = \det A$, donc

$$\tau_{\ell rs} = (\det A) \varepsilon_{\ell rs} \ . \tag{44}$$

(iii) Prendre $A = \alpha$ et déduire de (43) et (44) la loi de transformation de ε_{ijk}.
(c) Montrer que le symbole de Levi-Cività se transforme comme un tenseur pour des changements de base $\{e_j\} \to \{\tilde{e}_j\}$ dans R^3 donnés par des rotations propres. (Rappel : une rotation de R^3 est décrite par une matrice orthogonale O, c'est-à-dire satisfaisant $O^T O = I =$ la matrice identité 3×3. Une rotation est propre si elle préserve l'orientation de la triade de base.)

Exercice 15 : Le symbole ε pour la relativité
Le symbole de Levi-Cività peut être considéré en n dimensions pour tout $n \geq 2$. ε portera alors n indices et sera complètement antisymétrique. Nous considérons ici le cas $n = 4$, en adoptant les notations utilisées en relativité (voir le § 3.4) : les indices sont désignés par des lettres grecques et prennent les valeurs $0, 1, 2$ et 3. Donc

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ est une permutation paire de } (0,1,2,3), \\ -1 & \text{si } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ est une permutation impaire de } (0,1,2,3), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme dans l'Exercice 14, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est une densité tensorielle covariante de poids $N = -1$ (de rang 4), et $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ une une densité tensorielle contravariante de poids $N = +1$.

Calculer le scalaire $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

3 Tenseurs sur un espace vectoriel muni d'une métrique

3.1 Tenseur métrique

Soit g une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $\mathcal{V}$. Donc g est une application bilinéaire $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$ (c'est-à-dire un tenseur covariant d'ordre 2) telle que

$$(a) \qquad g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \qquad \forall\, v_1, v_2 \in \mathcal{V}\ , \tag{45}$$

$$(b) \qquad \text{si } v \in \mathcal{V} \text{ est tel que } g(v, w) = 0\ \forall\, w \in \mathcal{V}, \text{ alors } v = 0\ \ . \tag{46}$$

Si $g(v, v) > 0$ pour tout $v \neq 0$, on dit que g est **définie positive**. Si $g(v, v) < 0$ pour tout $v \neq 0$, on dit que g est **définie négative**. Dans les autres cas (si les valeurs de g peuvent être positives ou négatives), on dit que g est **indéfinie**.

Dans une base $\{e_j\}$ de $\mathcal{V}$, les composantes $g_{ij} \equiv g(e_i, e_j)$ de g forment une matrice $n \times n$ symétrique non-dégénérée. Cette matrice peut être diagonalisée (voir le cours d'Algèbre I ou le livre de W. Greub "Linear Algebra"); plus précisément il existent des bases distinguées dans lesquelles la matrice $\{g_{ij}\}$ a la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & O & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & O & & & & & -1 & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\ \ddots\\1\end{matrix}}\right\} n_+ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}-1\\ \ddots\\-1\\-1\end{matrix}}\right\} n_- \end{array} \qquad (n_+ + n_- = n) \tag{47}$$

Le nombre n_+ d'entrées $+1$ s'appelle l'**index** de g, la différence $n_+ - n_-$ est la **signature** de g. g est une forme définie si et seulement si $n_+ = n$ ou $n_- = n$.

En physique on rencontre souvent le cas d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ avec une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée distinguée (ayant une interprétation physique; des exemples seront considérés plus loin). On parle d'un **espace vectoriel muni d'une métrique**, et la forme bilinéaire distinguée g est souvent appelée la **métrique** de $\mathcal{V}$ (parfois on parle de pseudo-métrique dans le cas où g est indéfinie).

Si v_1 est un vecteur fixé de $\mathcal{V}$, alors $g(v_1, v_2)$ est (en tant que fonction de v_2) une application linéaire $\mathcal{V} \to R$, donc un élément de $\mathcal{V}^*$ que nous appelons $\varphi(v_1)$. De cette façon on associe à chaque $v_1 \in \mathcal{V}$ un élément $\varphi(v_1)$ de $\mathcal{V}^*$, avec

$$g(v_1, v_2) = \langle \varphi(v_1), v_2 \rangle \qquad \forall\, v_1, v_2 \in \mathcal{V} \ . \tag{48}$$

L'application $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ est **linéaire** (puisque g est bilinéaire) et **injective** (si $\varphi(v_1) = \varphi(v_1')$, alors $g(v_1 - v_1', v_2) = 0$ pour tout $v_2 \in \mathcal{V}$, et la propriété (46) de la métrique mène à $v_1 - v_1' = 0$, c'est-à-dire $v_1 = v_1'$).

Ainsi la donnée d'une métrique g permet de définir un isomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ satisfaisant (48). Si v^{*1}, v^{*2} sont des vecteurs de $\mathcal{V}^*$, alors $\varphi^{-1}(v^{*1})$ et $\varphi^{-1}(v^{*2})$ appartiennent à $\mathcal{V}$, et on peut définir une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée g^* sur $\mathcal{V}^*$ en posant

$$g^*(v^{*1}, v^{*2}) = g(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2})) \ . \tag{49}$$

Remarque : La forme bilinéaire g^* introduite ci-dessus est un tenseur 2 fois contravariant, entièrement déterminé par g; vice versa, g est entièrement déterminé par la donnée de g^*, car $g(v_1, v_2) = g^*(\varphi(v_1), \varphi(v_2))$. g et g^* peuvent être envisagés comme deux réalisations différentes d'une seule entité. Ainsi un **tenseur métrique** est un tenseur de rang 2 (symétrique et non-dégénéré), g est son expression covariante et g^* son expression contravariante.

Exercice 16 : **Composantes du tenseur métrique**
Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathcal{V}$ et $\{e^{*1}, \ldots, e^{*n}\}$ la base duale. Il est usuel de désigner les composantes covariantes d'un tenseur métrique par g_{jk} et ses composantes contravariantes par g^{jk} :

$$g_{jk} = g(e_j, e_k) \ , \quad g^{jk} = g^*(e^{*j}, e^{*k}) \ . \tag{50}$$

(a) Si e_i est un vecteur de la base de $\mathcal{V}$, alors $\varphi(e_i)$ est élément de $\mathcal{V}^*$, donc de la forme

$$\varphi(e_j) = c_{jk} e^{*k} \qquad \text{(sommation sur } k \text{ !)} \tag{51}$$

pour certains nombres c_{jk}. Vérifier que $c_{jk} = g_{jk}$. Donc

$$\varphi(e_j) = g_{jk} e^{*k} \ . \tag{52}$$

(b) Montrer de même que

$$\varphi^{-1}(e^{*j}) = g^{jk} e_k \ . \tag{53}$$

(c) Déduire de (52) et (53) que

$$g_{jk} g^{k\ell} = \delta_j^\ell \ . \tag{54}$$

En termes matricielles : $\mathcal{G} \equiv \{g_{jk}\}$ et $\mathcal{G}^* = \{g^{jk}\}$ sont des matrices symétriques $n \times n$, et leur produit est la matrice identité.

Remarque : Si $\mathcal{V}$ est muni d'une métrique, chaque base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathcal{V}$ détermine deux bases de $\mathcal{V}^*$, à savoir la base duale $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ et la base $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$. En général ce sont deux bases différentes de $\mathcal{V}^*$. En effet, d'après (52), elles sont identiques (c'est-à-dire on a $\varphi(e_j) = e^{*j}$ pour $j = 1, \dots, n$) si et seulement si $g_{jk} \equiv g(e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

3.2 Covariance, contravariance et métrique

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel muni d'une métrique. Nous avons vu que le tenseur métrique peut être exprimé sous forme covariante (indices en bas pour les composantes) ou sous forme contravariante (indices en haut pour les composantes). Plus généralement, la donnée d'une métrique permet (par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$) d'établir des relations biunivoques entre grandeurs covariantes et grandeurs contravariantes (nous insistons sur le fait que de telles relations ne sont possibles que si $\mathcal{V}$ est muni d'une métrique). *Sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ muni d'une métrique, un tenseur général peut être considéré comme étant une seule entité que l'on peut exprimer sous forme covariante ou sous forme contravariante ou sous forme mixte.* Nous allons expliquer cela en considérant des exemples.

Exemple 1 : Vecteurs
Si $v \in \mathcal{V}$ est un vecteur contravariant, alors $v^* \equiv \varphi(v)$ est son expression covariante. En termes des composantes :

$$\text{si} \quad v = v^j e_j \ , \quad \varphi(v) = v_k^* e^{*k} \ , \tag{55}$$

alors (utiliser (52)) :

$$\varphi(v) = v^j \varphi(e_j) = v^j g_{jk} e^{*k} \ . \tag{56}$$

Comparaison de (55) et (56) donne

$$v^*_k = g_{jk} v^j = g_{kj} v^j \ . \tag{57}$$

En combinant ceci avec (54), on trouve

$$g^{ik} v^*_k = g^{ik} g_{kj} v^j = \delta^i_j v^j = v^i \ ,$$

c'est-à-dire

$$v^i = g^{ik} v^*_k \ . \tag{58}$$

Donc : les composantes covariantes sont obtenues en termes des composantes contravariantes en multipliant par la matrice $\gg = \{g_{jk}\}$. Les composantes contravariantes sont obtenues à partir des composantes covariantes en multipliant par la matrice $\mathcal{G}^* = \{g^{jk}\}$. Autrement dit : la matrice $\{g_{jk}\}$ permet de "baisser" un indice, la matrice $\{g^{jk}\}$ de "monter" un indice. Dans la suite, on utilisera la notation v_k pour v^*_k.

Exercice 17 : Supposons que par rapport à une certaine base $\{e_i\}$ de $\mathcal{V}$, les composantes covariantes d'un certain vecteur v soient les nombres $(1, 0, \ldots, 0)$. Trouver les composantes contravariantes v^j de ce vecteur par rapport à la même base.

Exemple 2 : **Tenseurs de rang 2**
Soit T une application bilinéaire $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$ (un tenseur du type $(0, 2)$). Comme nous l'avons fait pour le tenseur métrique, on peut l'exprimer sous forme contravariante (c'est-à-dire on peut lui associer un tenseur T^* du type $(2, 0)$) en posant

$$T^*(v^{*1}, v^{*2}) = T(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2})) \ . \tag{59}$$

En termes de composantes par rapport à une base $\{e_j\}$:

$$\begin{array}{cccc} \text{si} & T = T_{ij} E^{ij} & \text{avec} & T_{ij} = T(e_i, e_j) \\ \text{et} & T^* = T^{ij} E_{ij} & \text{avec} & T^{ij} = T^*(e^{*i}, e^{*j}) \ , \end{array}$$

alors (utiliser (53)) :

$$\begin{aligned} T^{ij} &= T(\varphi^{-1}(e^{*i}), \varphi^{-1}(e^{*j})) = T(g^{ik} e_k, g^{j\ell} e_\ell) \\ &= g^{ik} g^{j\ell} T(e_k, e_\ell) = g^{ik} g^{j\ell} T_{k\ell} \ . \end{aligned} \tag{60}$$

Les composantes contravariantes du tenseur T s'obtiennent à partir de ses composantes covariantes en montant chaque indice avec une matrice $\{g^{rs}\}$.

Similairement les composantes covariantes se calculent à partir des composantes contravariantes en baissant chaque indice à l'aide d'une matrice $\{g_{rs}\}$:

Exercice 18 : (a) Montrer que

$$T_{ij} = g_{ik}g_{j\ell}T^{k\ell} \tag{61}$$

(donc $\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{ik}\tilde{g}_{j\ell}\tilde{T}^{k\ell}$ dans une autre base $\{\tilde{e}_j\}$).
(b) **Expression mixte pour** T : un tenseur de rang 2 peut également être exprimé sous forme mixte (on peut associer à $T \in \mathcal{T}_2^0$ un tenseur $\underline{T} \in \mathcal{T}_1^1$) :

$$\underline{T}(v^*, w) = T(\varphi^{-1}(v^*), w) \qquad (v^* \in \mathcal{V}^*, w \in \mathcal{V}) \ . \tag{62}$$

En écrivant

$$\underline{T} = T^i{}_k E_i^k \ , \quad \text{avec } T^i{}_k = \underline{T}(e^{*i}, e_k) \ ,$$

montrer que

$$T^i{}_k = g^{ij}T_{jk} = g_{k\ell}T^{i\ell} \tag{63}$$

(un seul indice à monter ou à baisser, donc une seule matrice $\{g^{rs}\}$ ou $\{g_{rs}\}$).
Egalement :

$$T_{jk} = g_{ji}T^i{}_k \ , \qquad T^{jk} = g^{k\ell}T^j{}_\ell \ . \tag{64}$$

Exemple 3 : **Tenseurs de rang 3**
Soit T une application trilinéaire $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$ (un tenseur du type $(0,3)$). On peut lui associer un tenseur T^* du type $(3,0)$, ainsi qu'un tenseur $\underline{T}$ du type $(1,2)$ et un tenseur $\underset{\sim}{T}$ du type $(2,1)$ par les formules suivantes :

$$\begin{array}{ll} T^*(v^{*1}, v^{*2}, v^{*3}) & = T(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2}), \varphi^{-1}(v^{*3})) \ , \\ \underline{T}(v^*, v_1, v_2) & = T(\varphi^{-1}(v^*), v_1, v_2) \ , \\ \underset{\sim}{T}(v^{*1}, v^{*2}, v) & = T(\varphi^{-1}(v^{*1}), \varphi^{-1}(v^{*2}), v) \ , \end{array}$$

où $v^*, v^{*j} \in \mathcal{V}^*$ et $v, v_j \in \mathcal{V}$.

Exercice 19 : (a) Considérons les composantes T_{ijk} de T et les composantes T^{ijk} de T^* :

$$T_{ijk} = T(e_i, e_j, e_k) \ , \qquad T^{ijk} = T^*(e^{*i}, e^{*j}, e^{*k}) \ .$$

Etablir les relations

$$T^{ijk} = g^{i\ell}g^{jr}g^{ks}T_{\ell rs} \tag{65}$$

et

$$T_{ijk} = g_{i\ell} g_{jr} g_{ks} T^{\ell rs} \ . \qquad (66)$$

(b) Désignons par ${T^i}_{jk}$ resp. ${T^{ij}}_k$ les composantes de $\underline{T}$ resp. $\underset{\sim}{T}$:

$${T^i}_{jk} = \underline{T}(e^{*i}, e_j, e_k) \ , \qquad {T^{ij}}_k = \underset{\sim}{T}(e^{*i}, e^{*j}, e_k) \ .$$

Etablir les relations entre ces nombres et les composantes T_{ijk} de T.

Remarque : Dans le présent contexte, il faut faire attention à bien placer les indices. L'écriture utilisée parfois au chapitre 2, en mettant des indices supérieurs verticalement au-dessus des indices inférieures (par exemple T^i_j, $T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$) n'est plus admissible ici. On devrait écrire par exemple ${T_j}^i$, ${T^{i_1 i_2}}_{j_1 j_2}$; ${{T^{i_1 i_2}}_{j_1}}^k$ est obtenu en montant le dernier indice de ${T^{i_1 i_2}}_{j_1 j_2}$: ${{T^{i_1 i_2}}_{j_1}}^k = g^{k j_2} {T^{i_1 i_2}}_{j_1 j_2}$ (j_2 est un indice muet dans cette équation).

Dans certaines applications la position d'un indice a une interprétation précise. Par exemple, si I est le tenseur d'inertie en mécanique, c'est-à-dire le tenseur de proportionnalité entre le moment cinétique et la vitesse angulaire, alors I_{jk} (pour j, k fixés) donne la composante du moment cinétique dans la direction j pour une vitesse angulaire $\omega_k = 1$ dans la direction k; donc le premier indice est en relation avec le moment cinétique et le deuxième avec la vitesse angulaire.

Exercice 20 : Lors d'une contraction, on peut baisser l'indice de sommation supérieur si l'on monte en même temps l'indice de sommation inférieur. Montrer par exemple que

$${T^{ijk}}_j = {{T^i}_j}^{kj} \ .$$

Exercice 21 : **Contraction sur des indices du même type**
L'existence d'une métrique permet maintenant de définir une opération de $\mathcal{T}^p_q$ dans $\mathcal{T}^{p-2}_q$ ou dans $\mathcal{T}^p_{q-2}$. Pour ceci, il suffit d'abord de descendre, resp. de monter, un des indices. Par exemple, si $T \in \mathcal{T}^0_2$, vérifier que

$$T^i_i = g^{ik} T_{ik}$$

est un scalaire.

3.3 L'espace euclidien 3-dimensionnel R^3

C'est le cas où la matrice (47) est la matrice identité et $n = 3$ (donc $n_+ = n = 3$, $n_- = 0$). Ils existent donc des bases distinguées $\{e_1, e_2, e_3\}$ (appelées "bases canoniques") telles que

$$g_{jk} = g(\underline{e}_j, \underline{e}_k) = \delta_{jk} \ . \tag{67}$$

Cette métrique est définie positive. Si $x = x^k e_k$ et $y = y^k e_k$ sont deux vecteurs (contravariants), on vérifie que le produit scalaire $x \cdot y$ usuel (utilisé depuis le collège) correspond bien à un tenseur du type $(0, 0)$, c'est-à-dire à un scalaire. En effet

$$x \cdot y \equiv \sum_{k=1}^{3} x^k y^k = \delta_{jk} x^j y^k = g_{jk} x^j y^k \equiv (x, y) \tag{68}$$

où nous avons utilisé la forme particulière de $\mathcal{G}$ dans une base canonique.

Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de R^3, on trouve alors que

$$g_{jk} = e_j \cdot e_k \ . \tag{69}$$

Deux vecteurs x, y sont **orthogonaux** si $x \cdot y = 0$. Une base **orthonormée** $\{e_1, e_2, e_3\}$ est formée de 3 vecteurs e_1, e_2, e_3 de norme 1 et deux à deux orthogonaux : $e_j \cdot e_k = \delta_{jk}$ $(j, k = 1, 2, 3)$.

Exercice 22 : (a) Une base canonique $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ est une base orthonormée de R^3. Montrer que la base duale $\{\underline{e}^{*j}\}$ est identique avec les vecteurs de $\mathcal{V}^*$ obtenus en agissant avec φ sur les vecteurs de la base canonique :

$$\varphi(\underline{e}_j) = \underline{e}^{*j} \qquad (j = 1, 2, 3) \ . \tag{70}$$

(b) Ecrire la matrice $\{g_{jk}\}$ du tenseur métrique (i) dans une base orthonormée arbitraire, (ii) dans la base $e_1 = (2, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, 3)$.
(c) Dans une base orthonormée, vérifier que les composantes covariantes d'un vecteur x sont identiques avec ses composantes contravariantes.
(d) Déterminer la matrice $\{g^{jk}\}$ donnant les composantes contravariantes du tenseur métrique (i) dans une base orthonormée, (ii) dans la base introduite sous (b,ii).
(e) Interpréter le tenseur $T_{ik} = x_i y_k - y_i x_k$ (x, y étant des vecteurs covariants).

(f) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ les composantes covariantes d'un tenseur T de rang 2 dans une base orthonormée. Déterminer les composantes contravariantes de T par rapport à la même base.

3.4 L'espace de Minkowski $\mathcal{M}$

On prend $n = 4$ et choisit pour la matrice dans (47) la matrice suivante ($n_+ = 3$, $n_- = 1$) :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{71}$$

(Certains auteurs préfèrent le négatif de cette matrice). Il est usuel de désigner les indices par des lettres grecques et les quatre composantes d'un vecteur par $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Un espace vectoriel 4-dimensionnel muni de cette (pseudo-)métrique est appelé **espace de Minkowski** ou **espace-temps**. On interprète les composantes contravariantes x^μ d'un vecteur x comme $x^0 = ct$, $(x^1, x^2, x^3) =$ les coordonnées spatiales d'un événement ($c =$ vitesse de la lumière, $t =$ temps).

Dans l'espace euclidien, les bases orthonormées forment une classe de bases distinguées. L'analogue ici sont les **bases de Minkowski**, c'est-à-dire les bases $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ dans lesquelles le tenseur métrique prend la forme (71) :

$$g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2 \text{ ou } 3, \\ -1 & \text{si } \mu = \nu = 0. \end{cases}$$

Dans une base de Minkowski, le produit scalaire de deux vecteurs x, y s'écrit

$$(x, y) = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 . \tag{72}$$

Exercice 23 : (a) Soit $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ une base de Minkowski. Exprimer les éléments de la base $\{\varphi(e_\mu)\}$ en terme de la base duale $\{e^{*\nu}\}$ et calculer les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique. Etablir la relation

entre les composantes contravariantes x^μ et les composantes covariantes x_μ d'un vecteur x dans une telle base.
(b) Soit $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ et $\{\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ deux bases de Minkowski. Désignons par $\Lambda = \{\Lambda_\mu{}^\nu\}$ la matrice reliant ces deux bases, donc $\tilde{e}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu e_\nu$ et par conséquent $\tilde{x}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Si g est la matrice (71) :

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que

$$\Lambda g \Lambda^T = g \ , \qquad \text{ou } \Lambda_\rho{}^\mu \Lambda_\sigma{}^\nu g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \ . \tag{73}$$

Les matrices Λ satisfaisant (73) sont les **transformations de Lorentz**.
A chaque $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ on peut associer un vecteur Λx en posant $(\Lambda x)_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$. Il est clair que $(\Lambda x)_\mu \equiv \tilde{x}_\mu$ sont les composantes covariantes du vecteur x dans la base $\{\tilde{e}_\nu\}$; en particulier on a $\tilde{x}_\mu \tilde{y}^\mu = x_\mu y^\mu$.
Montrer que les trnasformations de Lorentz forment un sous-groupe de $GL(4, R)$. Celui s'appelle le groupe de Lorentz, $\mathcal{L}$.

Attention : Une matrice $\Lambda = \{\Lambda_\mu{}^\nu\}$ décrit le passage entre deux bases et ne définit pas un tenseur (voir page 9).
(c) Soit Λ une transformation de Lorentz. Montrer que

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (\Lambda_0{}^0)^2 \geq 1 \ .$$

Ceci donne une classification des transformations de Lorentz :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_+^\uparrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L} \quad | \quad \det \Lambda = +1 \ , \quad \Lambda_0{}^0 \geq 1\} \\
\mathcal{L}_+^\downarrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L} \quad | \quad \det \Lambda = +1 \ , \quad \Lambda_0{}^0 \leq -1\} \\
\mathcal{L}_-^\uparrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L} \quad | \quad \det \Lambda = -1 \ , \quad \Lambda_0{}^0 \geq 1\} \\
\mathcal{L}_-^\downarrow &= \{\Lambda \in \mathcal{L} \quad | \quad \det \Lambda = -1 \ , \quad \Lambda_0{}^0 \leq -1\}
\end{aligned}$$

Lequels de ces sous-ensembles sont des sous-groupes de $\mathcal{L}$?
Pour chaque classe, donner comme exemple une matrice Λ diagonale (les entrées dans la diagonale étant $+1$ ou -1) et interpréter leur signification dans l'espace-temps.
Déterminer également la classe d'un **boost** en direction e_1 (appelé parfois

une “accélération”)

$$\Lambda(\chi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Ch}\chi & -\operatorname{Sh}\chi & 0 & 0 \\ -\operatorname{Sh}\chi & \operatorname{Ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\chi \in R) \ .$$

Poser $\beta \equiv v/c = \operatorname{Th}\chi$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ et calculer l'action de $\Lambda(\chi)$ sur un quadri-vecteur (x_0, x_1, x_2, x_3).
(d) Indiquer comment $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ (Exercice 15) se transforme sous une transformation de Lorentz. Pour quelles classes de transformations de Lorentz cette loi de transformation coïncide-t-elle avec celle d'un tenseur ?

Classification des vecteurs de l'espace-temps
— vecteurs du genre espace : $x_\mu x^\mu \equiv -(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 > 0$
— vecteurs du genre temps : $x_\mu x^\mu < 0$
— vecteurs du genre lumière : $x_\mu x^\mu = 0$.

Si deux événements, caractérisés par des vecteurs x et y, sont tels que $x - y$ est du genre lumière, on peut les relier par un signal de lumière (si par exemple $x_0 > y_0$, on peut envoyer un signal au point (y_1, y_2, y_3) au temps $t = y_0/c$, et celui-ci sera reçu au point (x_1, x_2, x_3) au temps $\tau = x_0/c$).

4 Champs de tenseurs

On considère un ensemble de points Ω n-dimensionnel (ici Ω sera un sous-ensemble ouvert de R^n, dans des théories plus générales on prend pour Ω une “variété différentiable” de dimension n). Essentiellement un **champ de tenseurs** du type (p, q) consiste en la donnée, en chaque point P de Ω, d'un tenseur $T(P)$ du type (p, q) sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ de la même dimension n [3]. C'est donc une application de Ω dans $\mathcal{T}^p_q$. Nous allons préciser cela à l'aide d'exemples.

Un **système de coordonnées** $\mathcal{K}$ pour Ω est formé d'une origine O et de n vecteurs linéairement indépendants $e_1, \ldots, e_n$ (les représentations graphiques qui suivent sont pour $n = 2$). Les n vecteurs forment une base de l'espace

[3] La condition que Ω et $\mathcal{V}$ doivent avoir la même dimension est nécessaire (sauf pour des champs scalaires) puisqu'on exige une relation entre la loi de transformation tensorielle et les changements de variables entre coordonnées utilisées pour paramétriser les points de Ω.

vectoriel $\mathcal{V} \equiv R^n$. Un point P dans Ω détermine un vecteur $\overrightarrow{OP}$: les coordonnées $x_P^1, \ldots, x_P^n$ de P dans le système de coordonnées $\mathcal{K}$ sont les nombres déterminés par la relation

$$\overrightarrow{OP} = x_P^1 e_1 + x_P^2 e_2 + \cdots + x_P^n e_n = x_P^j e_j \ . \tag{74}$$

Soit $\tilde{\mathcal{K}} = (\tilde{O}, \{\tilde{e}_i\})$ un deuxième système de coordonnées pour Ω (origine $\tilde{O}$, base $\{\tilde{e}_i\}$). Alors

$$\overrightarrow{\tilde{O}P} = \tilde{x}_P^1 \tilde{e}_1 + \cdots + \tilde{x}_P^n \tilde{e}_n = \tilde{x}_P^j \tilde{e}_j \ , \tag{75}$$

les nombres $\tilde{x}_P^1, \ldots, \tilde{x}_P^n$ sont les coordonnées du point P dans le système de coordonnées $\tilde{\mathcal{K}}$.

Figure 1

Nous écrivons $\tilde{b}^i$ pour les coordonnées de l'origine O de $\mathcal{K}$ dans le système $\tilde{\mathcal{K}}$:

$$\overrightarrow{\tilde{O}O} = \tilde{b}^i \tilde{e}_i \ . \tag{76}$$

Nous désignons par α la matrice donnant le changement de base $\{e_j\} \to \{\tilde{e}_j\}$ de $\mathcal{V}$: $\tilde{e}_j = \alpha_j{}^k e_k$.

Calculons la relation entre les nombres x^i_P et les nombres $\tilde{x}^k_P$:

$$\overrightarrow{\tilde{O}P} = \tilde{x}^i_P \tilde{e}_i = \overrightarrow{\tilde{O}O} + \overrightarrow{OP} = \tilde{b}^i \tilde{e}_i + x^k_P e_k \ ,$$

ou

$$(\tilde{x}^i_P - \tilde{b}^i)\alpha_i{}^k e_k = x^k_P e_k \ .$$

Ainsi

$$(\tilde{x}^i_P - \tilde{b}^i)\alpha_i{}^k = x^k_P \tag{77}$$

ou, après multiplication par la matrice $\beta = (\alpha^T)^{-1}$:

$$(\tilde{x}^i_P - \tilde{b}^i)\alpha_i{}^k \beta^j{}_k = \beta^j{}_k x^k_P \ .$$

Donc (puisque $\alpha_i{}^k \beta^j{}_k = \delta^j_i$) :

$$\tilde{x}^j_P = \beta^j{}_k x^k_P + \tilde{b}^j \ . \tag{78}$$

A part la constante $\tilde{b}^j$ (elle ne dépend pas du point P), les coordonnées du point P se transforment comme les composantes contravariantes d'un vecteur !

Un **champ scalaire** sur Ω est une application $F : \Omega \to R$. Si P est un point de Ω, $F(P)$ est la valeur de F en P. Dans un système de coordonnées $\mathcal{K}$ pour Ω, P est décrit par les nombres $x^1_P, \ldots, x^n_P$, et on écrira $F(P) = f(x^1_P, \ldots, x^n_P)$: on peut considérer F comme une fonction f définie sur une partie $\Omega_{\mathcal{K}}$ de R^n, où $\Omega_{\mathcal{K}} = \{x \in R^n \mid x^i e_i \in \Omega\}$. De même, dans un autre système de coordonnées $\tilde{\mathcal{K}}$ pour Ω, on peut considérer F comme une fonction $\tilde{f}$ définie sur $\Omega_{\tilde{\mathcal{K}}} = \{\tilde{x} \in R^n \mid \tilde{x}^i \tilde{e}_i \in \Omega\}$: $F(P) = \tilde{f}(\tilde{x}^1_P, \ldots, \tilde{x}^n_P)$. Il est clair que l'on doit avoir

$$f(x^1_P, \ldots, x^n_P) = \tilde{f}(\tilde{x}^1_P, \ldots, \tilde{x}^n_P) \ , \tag{79}$$

car chaque membre est égal à la valeur $F(P)$ de F en P.

Il est clair que, si x varie sur $\Omega_{\mathcal{K}}$, alors $x^i e_i$ varie sur Ω, c'est-à-dire que chaque $x \in \Omega_{\mathcal{K}}$ décrit un point P de Ω. Il est donc naturel d'écrire simplement x pour les coordonnées $(x^1_P, \ldots, x^n_P)$ de P. Nous adoptons cette convention pour la suite; de même, nous écrirons $\tilde{x}$ ($\tilde{x} \in \Omega_{\tilde{\mathcal{K}}}$) pour $(\tilde{x}^1_P, \ldots, \tilde{x}^n_P)$. Avec cette convention, on aura

$$f(x) = \tilde{f}(\tilde{x}) \ . \tag{80}$$

Dans (80), et dans toutes les équations similaires rencontrées dans la suite, il est sous-entendu que x et $\tilde{x}$ décrivent le *même* point de Ω, c'est-à-dire que (cf. (78)) :

$$\tilde{x}^j = \beta^j{}_k x^k + \tilde{b}^j \ . \tag{81}$$

Un **champ de vecteurs contravariants** sur Ω est décrit par la donnée, dans chaque point P de Ω, d'un élément $T(P)$ de $\mathcal{V}$. Désignons par $T^i(P)$, resp. $\tilde{T}^i(P)$, les composantes de $T(P)$ dans la base $\{e_j\}$, resp. $\{\tilde{e}_j\}$:

$$T(P) = T^i(P)e_i = \tilde{T}^j(P)\tilde{e}_j \ . \tag{82}$$

Pour i fixé, T^i est une fonction $\Omega \to R$ que l'on peut à nouveau considérer comme une fonction définie sur $\Omega_{\mathcal{K}}$; nous désignons cette fonction également par T^i, donc $T^i(P) = T^i(x) \equiv T^i(x^1_P, \ldots, x^n_P)$. De même $\tilde{T}^i(P) = \tilde{T}^i(\tilde{x}) \equiv \tilde{T}^i(\tilde{x}^1_P, \ldots, \tilde{x}^n_P)$, où $\tilde{T}^i$ est une fonction définie sur $\Omega_{\tilde{\mathcal{K}}}$. Si x et $\tilde{x}$ décrivent le même point, comme dans (81), on aura

$$T(P) = T^k(x)e_k = \tilde{T}^i(\tilde{x})\tilde{e}_i = \tilde{T}^i(\tilde{x})\alpha_i{}^k e_k \ ,$$

donc

$$T^k(x) = \tilde{T}^i(\tilde{x})\alpha_i{}^k$$

ou, après multiplication par la matrice β :

$$\tilde{T}^j(\tilde{x}) = \beta^j{}_k T^k(x) \ . \tag{83}$$

Similairement, un **champ de vecteurs covariants** sur Ω est, pour chaque $P \in \Omega$, une application linéaire $T(P) : \mathcal{V} \equiv R^n \to R$. Comme ci-dessus, on écrit $T_j(x)$, resp. $\tilde{T}_j(\tilde{x})$, pour ses composantes qui satisfont

$$\tilde{T}_j(\tilde{x}) = \alpha_j{}^k T_k(x) \ . \tag{84}$$

Considérons par exemple encore un **champ de tenseurs covariants d'ordre 2** : pour chaque $P \in \Omega$ on a une application bilinéaire $T(P) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to R$. On désigne par $T_{jk}(P)$, resp. $\tilde{T}_{jk}(P)$, ses composantes dans la base $\{e_j\}$, resp. $\{\tilde{e}_j\}$:

$$T_{jk}(P) = T(P)(e_j, e_k) \ , \qquad \tilde{T}_{jk}(P) = T(P)(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} T(P) &= T_{jk}(P)e^{*j} \otimes e^{*k} = \tilde{T}_{jk}(P)\tilde{e}^{*j} \otimes \tilde{e}^{*k} \\ &= T_{jk}(x)e^{*j} \otimes e^{*k} = \tilde{T}_{jk}(\tilde{x})\tilde{e}^{*j} \otimes \tilde{e}^{*k} \end{aligned} \tag{85}$$

(à nouveau, pour j et k fixé, on a identifié $T_{jk}(P)$ avec une fonction $T_{jk}(x)$ définie sur $\Omega_{\mathcal{K}}$ et $\tilde{T}_{jk}(P)$ avec une fonction $\tilde{T}_{jk}(\tilde{x})$ définie sur $\Omega_{\tilde{\mathcal{K}}}$). Dans ce cas on a la loi de transformation

$$\tilde{T}_{jk}(\tilde{x}) = \alpha_j{}^i \alpha_k{}^\ell T_{i\ell}(x) \tag{86}$$

si x et $\tilde{x}$ décrivent le même point de Ω.

Dorénavant nous supposerons que les composantes des champs de tenseurs soient différentiables (en tant que fonctions de x, resp. $\tilde{x}$). Nous désignons par

$$\partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \text{resp.} \qquad \tilde{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k} \tag{87}$$

les opérations de différentiation partielle agissant sur ses composantes.

Exercice 24 : **Gradient d'un champ scalaire**
(a) Soit F un champ scalaire, donné par la fonction f (resp. $\tilde{f}$) dans le système de coordonnées $\mathcal{K}$ (resp. $\tilde{\mathcal{K}}$).
Montrer que les fonctions $\partial_k f$ se transforment comme les composantes d'un champ de vecteurs covariants, c'est-à-dire que

$$(\tilde{\partial}_j \tilde{f})(\tilde{x}) \equiv \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^j} = \alpha_j{}^k (\partial_k f)(x) \equiv \alpha_j{}^k \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \ . \tag{88}$$

$\Longrightarrow$ Les dérivées $\partial_k f$ définissent, en chaque point P de Ω, un vecteur covariant qui est souvent désigné par $dF(P)$. Donc $dF(P)$ est une application linéaire $\mathcal{V} \to R$ telle que, dans chaque base $\{e_i\}$ de $\mathcal{V}$:

$$\langle dF(P), v \rangle = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} v^k \ , \qquad \text{si } v = v^k e_k$$

et x désigne les coordonnées du point P dans $\mathcal{K}$. $\langle dF(P), v \rangle$ représente la "dérivée de F au point P le long de v". Si par exemple $v = e_i$: $\langle dF(P), e_i \rangle = \partial f(x)/\partial x^i$. Lorsque P varie sur Ω, les applications $dF(P)$ définissent un champ de vecteurs covariants que l'on désigne par dF.
(b) Soit $F = \Psi\Phi$ le produit de deux champs scalaires Ψ, Φ sur Ω. Vérifier la règle du produit pour l'opération d : $\mathcal{T}_0^0(\Omega) \to \mathcal{T}_1^0(\Omega)$ introduite ci-dessus :

$$d(\Psi\Phi) = \Psi \otimes d\Phi + \Phi \otimes d\Psi \tag{89}$$

(produit de tenseurs dans le membre de droite).

Exercice 25 : **Dérivée d'un champ de vecteurs. Divergence**
(a) Soit T un champ de vecteurs contravariants :

$$T(P) = T^i(x)e_i = \tilde{T}^i(\tilde{x})\tilde{e}_i \ .$$

Montrer que les dérivées $S_j{}^k = \partial_j T^k$ définissent un champ de tenseurs du type $(1,1)$ (désigné par dT).
Conséquence : la **divergence** de T, c'est-à-dire le champ donné par la contraction de dT, $\partial_j T^j$, est un champ scalaire.
(b) Si g est un tenseur métrique sur $\mathcal{V} \equiv R^n$, on peut définir l'opération $\Delta = \partial_i \partial^i \equiv g^{ik}\partial_i\partial_k$. Si F est un champ scalaire, décrire les propriétés de ΔF (défini par $\partial_i\partial^i f$ dans le système de coordonnées $\mathcal{K}$).
Attention : Dans les considérations qui précèdent nous nous sommes restreints à des **coordonnées rectilignes** pour Ω : si on fixe les valeurs de $n-1$ coordonnées et varie les valeurs de la coordonnée non-fixée, on obtient l'intersection de Ω avec une ligne droite, donc les **lignes de coordonnées** sont des (morceaux de) droites (voir l'exemple de la droite $x^1 = a$, dans le cas $n = 2$, indiqué dans la Figure 2).

Figure 2

On peut utiliser des coordonnées pour Ω n'ayant pas cette propriété (**coordonnées curvilignes**, certaines – ou toutes – les lignes de coordonnées étant courbes). Comme exemple, considérons dans le cas $n = 2$ des coordonnées polaires (avec origine O). Les courbes $\varphi =$ const. sont toujours des lignes droites, mais les courbes $r =$ const. sont des cercles. Un champ défini sur Ω peut également être considéré comme fonction de coordonnées curvilignes (une fonction de r et φ dans l'exemple précité).

En coordonnées rectilignes, chaque ligne de coordonnées passant par un point P de Ω est une droite parallèle à la direction définie par un des vecteurs de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ choisie. Autrement dit, les directions des vecteurs de base sont déterminées par la direction des lignes de coordonnées en P, et ne dépendent pas du point P. En coordonnées curvilignes, les directions des lignes de coordonnées dépendent du point P (c'est évident dans l'exemple considéré dans la Figure 2) : on peut introduire une **base locale** (une base en chaque P) en prenant des vecteurs $e_1(P), \ldots, e_n(P)$ (dépendant de P) dont les directions sont déterminées par les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées au point P (dans la Figure 2 nous avons indiqué des bases locales correspondant à des coordonnées polaires en deux points P et P').

Le Jacobien ${}^{\partial \tilde{x}^j}\!/_{\partial x^k}$ pour le changement entre deux systèmes de coordonnées rectilignes est constant sur Ω : ${}^{\partial \tilde{x}^j}\!/_{\partial x^k} = \beta^j{}_k$ d'après (81). En coordonnées curvilignes le Jacobien dépendra du point P de Ω, c'est-à-dire les matrices α et β deviennent des fonctions de P. La loi de transformation d'un champ de tenseurs fait alors intervenir, en chaque point P de Ω, les matrices α et β dans ce point; par exemple pour un champ de tenseurs du type $(1, 2)$:

$$\tilde{T}^i{}_{jk}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k} T^\ell{}_{mr}(x) \ , \tag{90}$$

où à nouveau x et $\tilde{x}$ désignent les coordonnées du même point P et les Jacobiens ${}^{\partial \tilde{x}^j}\!/_{\partial x^k}$ et ${}^{\partial x^j}\!/_{\partial \tilde{x}^k}$ pour les changements de coordonnées $x \mapsto \tilde{x}$ (resp. $\tilde{x} \mapsto x$) sont évalués en ce point P.

En coordonnées curvilignes l'opération de différenciation ∂_i n'a plus une loi de transformation tensorielle (parce qu'elle agit également sur les facteurs α et β dans les lois de transformation, et ici les dérivées de ces facteurs ne s'annulent plus). Donc par exemple si T_i sont les composantes d'un champ de vecteurs covariants, alors $\partial_k T_i$ ne se transforme pas comme les composantes d'un tenseur. On peut remédier à cette situation en introduisant une modification de l'opération de différenciation, appelée la **dérivée**

covariante ∇_μ. Nous n'entrons pas dans les détails. Rajoutons par contre qu'un problème similaire apparaît dans un espace vectoriel muni d'une métrique non-constante (donc dépendante de P), comme c'est le cas en relativité générale.

Quelques références

Textes simples

- G. Arfken : Mathematical Methods for Physicists, Chapitre 3.
- J. Hladik : Le calcul tensoriel en physique (Masson 1993).
- A.I. Borisenko et I.E. Tarapov : Vector and Tensor Analysis with Applications.
- W. Flügge : Tensor Analysis and Continuum Mechanics.
- A. Delachet, Calcul vectoriel et tensoriel (Presses universitaires de France 1960).
- A.N. Srivastava : Tensor Calculus, Theory and Problems.
- C. Jeanperrin : Initiation progressive au calcul tensoriel (Ellipses 1987).
- S. Hassani, Mathematical Physics (Chap. 25-26).
- T.L. Chow, Mathematical Methods for Physicists (Chap. 1).
- K.F. Riley et al., Mathematical methods for Physicist and Engineering (Chap. 19).

Textes plus complets ou plus mathématiques

- H.J. Dirschmid : Tensoren und Felder (Springer 1996).
- I.S. Sokolnikoff : Tensor Analysis : Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua.

- L. Brillouin : Les tenseurs en mécanique et en élasticité.
- L. Schwartz : Les tenseurs (Hermann 1975).
- R. Deheuvels : Tenseurs et spineurs (Presses universitaires de France 1993).