

# MÉCANIQUE ANALYTIQUE

Cours pour la deuxième année

**Ruth Durrer**

Département de Physique Théorique de l'Université de Genève  
Quai E. Ansermet 24, 1211 Genève 4, Suisse

rédigé par

**Marc Vonlanthen**

deuxième version 2010



**UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE**

---

**FACULTÉ DES SCIENCES**

Département de physique théorique

# Table des matières

<b>1 Mécanique Lagrangienne</b>	<b>6</b>
1.1 Le principe variationnel de Hamilton . . . . .	6
1.2 Transformations de Legendre et fonction de Hamilton . . . . .	10
1.3 Les équations de Hamilton . . . . .	15
1.4 Le théorème de Liouville . . . . .	20
<b>2 Mécanique Lagrangienne sur des variétés différentiables</b>	<b>26</b>
2.1 Contraintes holonomes . . . . .	26
2.2 Variétés différentiables . . . . .	28
2.3 Systèmes dynamiques lagrangiens . . . . .	35
2.4 Systèmes non autonomes . . . . .	39
2.5 Le théorème de E. Noether . . . . .	41
2.6 Le principe d'Alembert . . . . .	44
2.7 Le théorème d'Ostrogradski (1850) . . . . .	47
<b>3 Oscillation</b>	<b>51</b>
3.1 Linéarisation . . . . .	51
3.2 Petites oscillations . . . . .	54
3.3 Comportement des fréquences caractéristiques . . . . .	58
3.4 Résonance paramétrique . . . . .	61
<b>4 Corps rigide, la toupie.</b>	<b>66</b>
4.1 Mouvement par rapport à un système de coordonnées mobiles	66
4.2 Forces d'inertie . . . . .	71
4.2.1 Systèmes en rotation . . . . .	72
4.2.2 Le pendule de Foucault . . . . .	74
4.3 Corps rigides, la toupie . . . . .	76
4.4 Les équations d'Euler, la description de Poincaré du mouvement d'un corps solide . . . . .	87
4.5 La toupie lourde ou toupie de Lagrange . . . . .	92

<b>5</b>	<b>Mécanique hamiltonienne : transformations canoniques</b>	<b>106</b>
5.1	Crochet de Poisson . . . . .	106
5.2	Un principe variationnel pour les équations canoniques . . . .	109
5.2.1	Principe de Maupertuis . . . . .	112
5.3	Transformations canoniques . . . . .	113
5.3.1	Théorème de Liouville II . . . . .	117
5.3.2	Transformations canoniques comme transformations symplectiques . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Mécanique hamiltonienne II :</b>	<b>121</b>
6.1	La théorie de Hamilton-Jacobi . . . . .	121
6.2	Systèmes intégrables . . . . .	125
6.3	Variables d'angle et d'action . . . . .	128
6.3.1	Construction des variables d'angle et d'action en $k$ dimensions . . . . .	130
6.3.2	Mouvements quasi-périodiques . . . . .	132
6.3.3	Moyennes . . . . .	133
6.4	Théorie des perturbations . . . . .	135
6.4.1	Moyenner les perturbations . . . . .	135
6.4.2	Invariants adiabatiques . . . . .	139

## Préface

La mécanique analytique est la base de la physique théorique. Dans ce cours, vous faites pour la première fois connaissance avec le langage et les méthodes de la physique théorique. Dans la première partie, nous introduisons les concepts centraux de lagrangien et d'action. Ces concepts forment la base de toute théorie physique connue à ce jour. Les théories de champs classiques, telles l'électrodynamique et la relativité générale, mais aussi la mécanique quantique et les théories de champs quantiques, et même la théorie des supercordes sont basées sur une formulation lagrangienne. Comme nous l'expliquerons, ceci permet de définir une fonctionnelle d'énergie, l'hamiltonien. La question si cette fonctionnelle admet une borne inférieure est un premier test de la stabilité de la théorie. En effet, une théorie instable ne peut pas décrire une situation physique pertinente.

Après l'introduction du lagrangien et de l'hamiltonien, nous traitons de la mécanique lagrangienne sur des variétés différentielles. Cette démarche est adéquate pour décrire des systèmes avec des contraintes holonomiques, tels le pendule ou la toupie. Nous allons démontrer le fameux théorème de E. Nöther, lequel établit le lien entre symétries d'une part, et lois de conservation d'autre part. Dans cette partie nous introduisons encore les systèmes de coordonnées en mouvement accéléré, ce qui nous conduit aux forces d'inertie. En guise d'application principale, le corps rigide et la toupie y sont étudiés. Dans la deuxième partie du cours nous discutons la mécanique hamiltonienne sur des variétés sympléctiques, les transformations canoniques, la théorie de Hamilton-Jacobi et nous introduisons la théorie des perturbations.

Ce cours se veut également comme une occasion de constater que des notions mathématiques, qui peuvent apparaître un peu formelles à première vue, permettent en fait souvent de trouver des résultats surprenants, et ceci de façon aisée. Tel est le cas par exemple au début de ce cours avec les théorèmes de Liouville et de Poincaré, démontrés en quelques lignes avec le formalisme lagrangien, alors que de telles preuves à partir des équations de Newton requièrent une large quantité de travail.

Ce cours se base sur le magnifique livre de V.I. Arnold [1]. Ce livre contient clairement beaucoup plus de matériel que celui du cours. Si vous le pouvez et si vous présentez un intérêt particulier pour la physique théorique, alors je vous recommande de vous le procurer. [2] présente un texte plus avancé. Un bon livre disponible en français est [3], et [4] est un très bon texte en allemand. Beaucoup de cours de mécanique se réfèrent à [5], mais je le trouve quelque peu dépassé, ceci surtout au niveau des outils mathématiques présentés.

4

# Chapitre 1

## Mécanique Lagrangienne

### 1.1 Le principe variationnel de Hamilton

Nous considérons un système mécanique de dimension  $d$ . Par exemple  $d/3$  points matériels, mais comme nous le verrons il peut aussi s'agir d'autres coordonnées généralisées. Le nombre  $d$  est appelé le nombre de degrés de liberté du système. Son espace des phases est alors

$$(x_1, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_d) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Le lagrangien du système est une fonction (de Lagrange)

$$L = L(x_1, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_d, t),$$

laquelle dépend de  $(2d + 1)$  variables. Pour une trajectoire différentiable

$$t \mapsto \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^d,$$

nous définissons la fonctionnelle d'action par l'intégrale

$$S[\mathbf{q}, t_1, t_2] := \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (1.1)$$

Le **principe variationnel de Hamilton** peut alors s'énoncer ainsi :

*”Toute trajectoire physique, i.e. toute solution des équations de mouvement, satisfaisant les conditions initiales  $\mathbf{q}(t_1) = \boldsymbol{\alpha}$  et finales  $\mathbf{q}(t_2) = \boldsymbol{\beta}$  est un extremum de la fonctionnelle d'action  $S$ .”*

Nous écrivons habituellement le principe de Hamilton sous la forme

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \quad (1.2)$$

Un système lagrangien est défini par son lagrangien

$$L : \mathbb{R}^{2d+1} \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_d, t) \mapsto L(x_1, \dots, x_d, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_d, t) .$$

Les équations de mouvement sont alors obtenues par le principe variationnel de Hamilton.

**Lemme 1.1** *Si  $\mathbf{q}(t)$  est un extremum de la fonctionnelle  $S$ , alors il satisfait aux équations de Euler-Lagrange :*

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad 1 \leq k \leq d, \quad (1.3)$$

ou de manière plus précise

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_k} \right|_{(x_i=q_i(t), \dot{x}_i=\dot{q}_i(t))} - \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) \right|_{(x_i=q_i(t), \dot{x}_i=\dot{q}_i(t))} = 0.$$

Les équations d'Euler-Lagrange peuvent encore s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$$

ou encore

$$\nabla_{\mathbf{q}} L - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L = 0.$$

**Preuve 1.1** *du lemme 1.1 Ceci est un exemple du calcul variationnel. Nous négligeons les aspects formels et supposons nos fonctions suffisamment différentiables. Soit  $\boldsymbol{\eta}(t)$  une courbe quelconque satisfaisant aux conditions de bord  $\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(t_2) = 0$  et soit  $\mathbf{q}(t)$  une trajectoire physique, et donc selon le principe de Hamilton précédemment énoncé, un extremum de la fonctionnelle d'action  $S$ . Nous posons*

$$\boldsymbol{\zeta}(t, s) = \mathbf{q}(t) + s\boldsymbol{\eta}(t), \quad (1.4)$$

et

$$S[s, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\boldsymbol{\zeta}(t, s), \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t, s), t). \quad (1.5)$$

Le principe de Hamilton implique que

$$\left. \frac{dS}{ds} \right|_{s=0} = 0 \quad (1.6)$$

pour tout choix de  $\boldsymbol{\eta}(t)$ . En employant la règle de dérivation en chaîne et le fait que  $\boldsymbol{\zeta}(s=0, t) = \mathbf{q}(t)$ , nous pouvons écrire (1.6) de la façon suivante

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left. \frac{dL}{ds} \right|_{s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\partial L}{\partial \zeta_k} \frac{\partial \zeta_k}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_k} \frac{\partial \dot{\zeta}_k}{\partial s} \right]_{s=0} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \eta_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{\eta}_k \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

et après intégration par parties du second terme de (1.7), nous obtenons

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^d \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \eta_k.$$

Comme la fonction  $\boldsymbol{\eta}(t)$  est arbitraire, le terme entre crochets est donc nul et le lemme est démontré. Remarquons finalement que la satisfaction des conditions aux bords  $\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(t_2) = 0$  est essentielle pour éviter une contribution des bords.  $\square$

Nous développons maintenant deux exemples permettant de mettre en application les points précédents :

**Exemple 1** Soit le lagrangien

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^d \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - V(\mathbf{q}, t). \quad (1.8)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} (m_k \dot{q}_k) + \frac{\partial V}{\partial q_k} \\ &= m_k \ddot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_k}, \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que l'équation de Newton

$$m_k \ddot{q}_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (1.9)$$



**Exemple 2** Soit  $d = 3$  et  $L$  le lagrangien d'une particule de charge électrique  $e$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{m}{2} |\dot{\mathbf{q}}|^2 - e\phi(\mathbf{q}, t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \quad (1.10)$$

d'une particule chargée dans un champs électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière,  $e$  la charge de la particule,  $\phi(\mathbf{q}, t)$  le potentiel scalaire et  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$  le potentiel vecteur qui satisfont les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \wedge \mathbf{A}. \end{aligned}$$

En guise d'**exercice**, montrez que les équations de Euler-Lagrange donnent

$$m\ddot{\mathbf{q}} = e\mathbf{E}(\mathbf{q}, t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{q}, t). \quad (1.11)$$

Pour la démonstration, il est utile d'employer la formule

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Nous introduisons maintenant le concept central d'**impulsion canonique** :

**Définition 1.1** *Tout système dynamique de deuxième ordre dont les équations de mouvement correspondent aux équations de Euler-Lagrange par rapport à une fonction lagrangienne  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  est appelé système lagrangien.*

**Définition 1.2** *L'impulsion canonique d'un système lagrangien est définie par*

$$\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (1.12)$$

Ainsi, dans l'exemple 1 ci-dessus, nous avons

$$p_k = m_k \dot{q}_k, \quad \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$$

et pour l'exemple 2,

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}.$$

**Définition 1.3** Une variable  $q_i$  est appelée **variable cyclique** si le lagrangien n'en dépend pas,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

**Théorème 1.1** L'impulsion canonique correspondant à une variable cyclique est conservée le long d'une trajectoire physique.

**Preuve 1.2** du théorème 1.1

Des équations d'Euler-Lagrange (1.3), il suit pour une variable cyclique

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad \square$$

## 1.2 Transformations de Legendre et fonction de Hamilton

**Définition 1.4** Soit

$$\begin{aligned} f : I_x &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

une fonction convexe,  $f''(x) > 0, \forall x \in I_x \subset \mathbb{R}$ , ici  $I_x$  est un intervalle. La transformée de Legendre de  $f$  est une nouvelle fonction  $g$  de la variable  $p$  que nous nous proposons de définir dans ce qui suit.

Nous considérons la fonction de deux variables suivante

$$F(p, x) := px - f(x).$$

Pour  $p$  fixé,  $f$  étant convexe (figure 1.1 de la page suivante), la fonction  $F$  possède un maximum en  $x$  que nous appelons  $x(p)$ . La fonction

$$\begin{aligned} g : I_p &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \max_x (px - f(x)) = F(p, x(p)), \quad I_p \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

est la **transformée de Legendre** de  $f$ .

Comme  $f$  est (deux fois) différentiable ceci est aussi vrai pour  $F$  et l'extremum  $x(p)$  satisfait  $0 = \partial_x F(p, x)|_{x(p)}$  donc  $p = f'(x(p))$ . Considérons d'abord quelques exemples.

**Exemple 1**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2}mx^2, & F(p, x) &= px - \frac{1}{2}mx^2 \\
 \frac{\partial F}{\partial x} &= p - mx = 0 \iff x = \frac{p}{m} = x(p) \\
 g(p) &= F(p, x(p)) = \frac{p^2}{2m}
 \end{aligned}$$

**Exemple 2**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\alpha}x^\alpha, \quad \alpha > 1 \\
 g(p) &= \frac{1}{\beta}p^\beta, \quad \text{avec } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.
 \end{aligned}$$

**Exemple 3** Ce dernier exemple est laissé comme **exercice**. Soit  $f(x)$  un polygone convexe. Montrer que  $g(p)$  est alors également un polygone convexe et que les coins de  $f(x)$  correspondent aux arrêtes de  $g(p)$  et vice versa.

(En principe un polygone convexe n'est pas deux fois différentiable en ses coins mais la construction de la transformée de Legendre d'après la figure 1.1 est quand même possible.) Cet exemple est important pour la thermodynamique.

**Théorème 1.2** *La transformation de Legendre est involutive : si  $f$  est convexe et  $\mathcal{L}(f) = g$  est sa transformée de Legendre, alors  $g$  est aussi convexe et*

$$\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(f)) = f, \quad (1.13)$$

ou de manière équivalente

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \text{id}.$$

**Preuve 1.3** *du théorème 1.2*

Vérifions tout d'abord que la transformée de Legendre d'une fonction convexe est elle-même une fonction convexe, et donc que la transformée de Legendre est applicable deux fois. Ceci est nécessaire puisque la convexité fait partie des hypothèses de la définition de  $\mathcal{L}$  :

$$g(p) = (\mathcal{L}f)(p) = F(p, x(p)) = px(p) - f(x(p)),$$

sa dérivée par rapport à la variable  $p$

$$g'(p) = \left( \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dp} \right) \Big|_{(p, x(p))} = \frac{\partial F}{\partial p} = x(p), \quad (1.14)$$

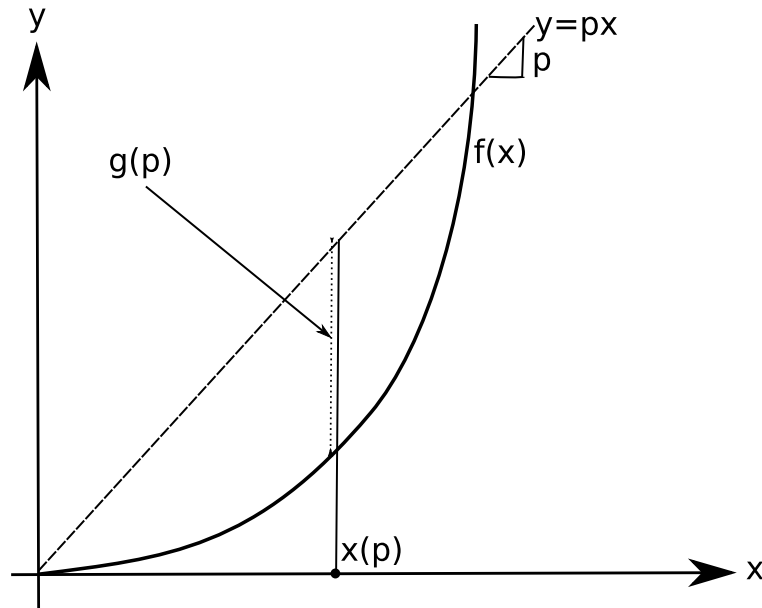


FIG. 1.1 – Nous fixons  $p$  et déterminons la droite d'équation  $y = xp$ . Le point  $x = x(p)$  est le point qui maximise la distance entre la droite et la courbe  $f(x)$ . Pour tout  $p$ , la fonction  $F(p, x) = px - f(x)$  a un maximum par rapport à  $x$  au point  $x = x(p)$ . Ce point est défini par la condition  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  ou  $f'(x) = p$ .

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  au point  $x(p)$ , car  $x(p)$  est un maximum de  $F(x, p)$  pour  $p$  fixé. Pour la dérivée seconde, nous avons alors simplement

$$g''(p) = \frac{dx}{dp}. \quad (1.15)$$

Mais

$$0 = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x(p)} = p - f'(x(p)), \quad (1.16)$$

et donc  $p = f'(x(p))$ . Si alors nous dérivons les deux côtés de cette égalité par rapport à la variable  $p$ , nous trouvons

$$1 = f''(x(p)) \frac{dx}{dp}, \quad (1.17)$$

et nous avons donc

$$g''(p) = \frac{dx}{dp} = \frac{1}{f''(x(p))} > 0, \quad (1.18)$$

ce qui prouve la convexité de  $g$ . Pour déterminer la transformée de Legendre de  $g$ , nous introduisons

$$\begin{aligned} G(x, p) &= xp - g(p) \\ (\mathcal{L}g)(x) &= \max_p G(x, p) = G(x, p(x)) \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec  $p(x)$  un maximum de  $G(p, x)$  comme fonction de  $p$ . Pour  $p$  fixé et  $x = x(p)$ , nous avons

$$G(x(p), p) = x(p)p - (x(p)p - f(x(p))) = f(x(p)), \quad (1.20)$$

et avec (1.16)

$$p = f'(x(p)). \quad (1.21)$$

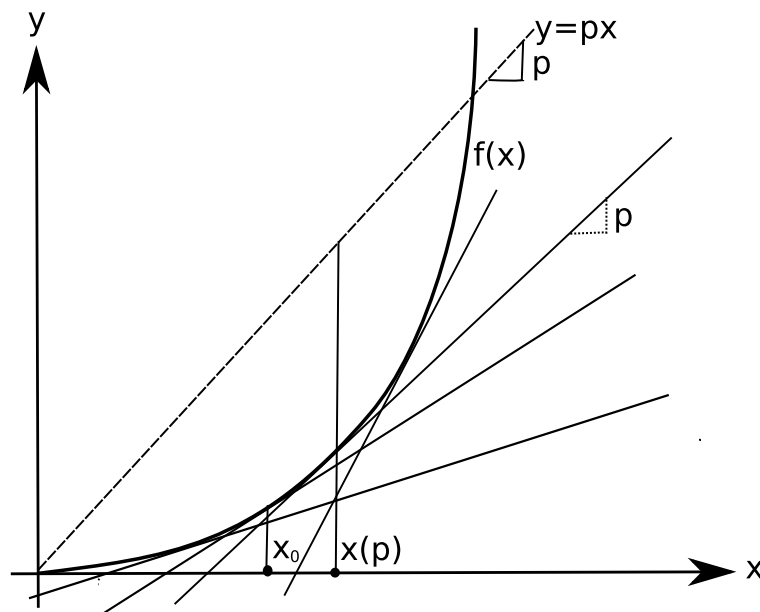


FIG. 1.2 – Transformation de Legendre et preuve du corollaire 1.1.

La fonction  $G(x, p) = xp - g(p)$  peut être comprise de manière géométrique : pour un  $p$  fixé, par exemple  $p = p_0$ ,  $g(p_0)$  est la différence entre la droite d'équation  $y = xp_0$  et la fonction  $f(x)$ . Si nous considérons maintenant la tangente à  $f(x)$  de pente  $p_0$ , avec la relation (1.20), nous constatons alors facilement que  $G(x, p_0) = (x - x(p_0))p_0 + f(x(p_0))$  n'est autre que l'ordonnée du point d'abscisse  $x$  sur cette même tangente.

Nous fixons maintenant  $x = x_0$  et laissons  $p$  varier (voir figure 1.2). Selon l'égalité précédente,  $p$  est la pente de  $f$  en  $x = x(p)$ . Alors  $G(p, x_0)$  est

donnée par l'intersection de la verticale  $x = x_0$  avec la tangente au point  $x(p)$ . Ceci étant toujours en-dessous de  $f(x_0)$ , cette valeur est le maximum (pour  $p$  tel que  $x(p) = x_0$ ) sur tous les points, et donc, nous avons bien  $G(x, p(x)) = f(x)$   $\square$ .

Nous donnons encore une seconde preuve plus formelle du théorème 1.2 :

**Preuve 1.4** du théorème 1.2

Afin de ne produire aucune confusion avec la variable  $x$  de la fonction  $f(x)$ , nous considérons la fonction  $G = G(z, p)$ . Nous voulons alors démontrer que

$$G(z, p(z)) = f(z)$$

où  $p(z)$  est telle que  $G(z, p) = zp - g(p)$  admet un maximum en  $p$  pour un  $z$  fixé,  $g'(p) = z$ . Or, selon l'équation (1.14), nous avons  $g'(p) = x(p)$  et donc,  $z = x(p)$ . Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}g)(z) &= [zp - g(p)]_{p=x^{-1}(z)} \\ &= zx^{-1}(z) - g(x^{-1}(z)) \\ &= zx^{-1}(z) - x(x^{-1}(z))x^{-1}(z) - f(x(x^{-1}(z))) \\ &= zx^{-1}(z) - zx^{-1}(z) + f(z) \\ &= f(z). \quad \square \end{aligned}$$

**Corollaire 1.1** Nous considérons la famille de droites

$$y(x) = px - g(p)$$

avec  $g(p)$  une fonction convexe. Alors son enveloppe est la fonction  $y = f(x)$  où  $f(x)$  est la transformée de Legendre de  $g$ .

**Preuve 1.5** du corollaire 1.1

Voir la figure 1.2.  $\square$

Nous examinons maintenant le cas de plusieurs variables. Une fonction  $f(\mathbf{x})$  de plusieurs variables  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  est appelée convexe si la matrice  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$  est définie positive. La transformée de Legendre d'une telle fonction est alors définie par

$$g(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p})) = \max_{\mathbf{x}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - f(\mathbf{x}))$$

donc

$$\mathbf{p} = \left. \nabla_{\mathbf{x}} f \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{p})}, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n).$$

Les démonstrations précédentes sont faciles à généraliser pour le cas à plusieurs variables.

**Exercice** Soit une forme quadratique

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} x_i x_j,$$

avec  $(f_{ij})$  définie positive.

1. Montrer que sa transformée de Legendre  $g(\mathbf{p})$  est aussi une forme quadratique,

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} p_i p_j$$

et que  $f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = g(\mathbf{p})$  et  $g(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})$ .

2. Etablir la relation mathématique entre les matrices  $(f_{ij})$  et  $(g_{ij})$ .

### 1.3 Les équations de Hamilton

Nous considérons le systèmes des équations d'Euler-Lagrange

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (1.22)$$

pour une fonction lagrangienne

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &\mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \end{aligned}$$

que nous supposons convexe par rapport au second argument  $\dot{\mathbf{q}}$ . Cette fonction sera souvent une forme quadratique définie positive.

**Théorème 1.3** *Les équations de Euler-Lagrange sont équivalentes au système de  $2d$  équations du premier ordre données par*

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1.23)$$

avec la fonction de Hamilton définie par

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (1.24)$$

et

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (1.25)$$

La fonction de Hamilton  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  est donc la transformée de Legendre par rapport à  $\dot{\mathbf{q}}$  de  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ . Dans la définition (1.24) il importe de comprendre la variable  $\dot{\mathbf{q}}$  comme  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  déterminée par la résolution de l'équation (1.25). Comme  $L$  est convexe en  $\dot{\mathbf{q}}$ , le déterminant  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}}\right) \neq 0$  et donc cette inversion est (localement) possible.

**Preuve 1.6** *du théorème 1.3*

*Nous commençons par écrire la différentielle de la fonction de Hamilton*

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (1.26)$$

*Or, si nous considérons la relation (1.24), nous avons également en utilisant (1.22)*

$$\begin{aligned} dH &= \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \dot{\mathbf{p}} d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (1.27)$$

*En comparant les coefficients des membres de droite des deux dernières égalités, la relation (1.23) est démontrée. De plus, la même comparaison pour la variable temporelle fournit*

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.28)$$

*Ceci achève de prouver que les équations de Euler-Lagrange impliquent les équations de Hamilton. L'implication inverse suit la même ligne de démonstration et l'équivalence des systèmes lagrangien et hamiltonien est donc démontrée.  $\square$*



Les équations (1.23) sont appelées les **équations canoniques** du système hamiltonien.

**Lemme 1.2** *Les valeurs d'une forme quadratique  $f(\mathbf{x})$  et de sa transformée de Legendre  $g(\mathbf{p})$  coïncident aux points correspondants :  $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{p}(\mathbf{x}))$  et  $g(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{p}))$ .*

**Exemple** Prenons la forme  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\mathbf{x}^2$ . Nous avons alors

$$\mathbf{p} = f'(\mathbf{x}) = m\mathbf{x}$$

et

$$g(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{1}{2}m\mathbf{x}^2 = f(\mathbf{x}).$$

**Preuve 1.7** *du lemme 1.2.*

*Comme la transformation de Legendre est involutive, il suffit de montrer une des deux égalités du lemme. Pour une forme quadratique, nous avons*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} = 2f(\mathbf{x})$$

*et par conséquent*

$$g(\mathbf{p}(\mathbf{x})) = \left[ \mathbf{p}(\mathbf{x}) \mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \right] \Big|_{\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}} = f(\mathbf{x}). \quad \square$$

**Théorème 1.4** *Si le lagrangien est de la forme (dite 'naturelle')*

$$L = T - U, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad U = U(\mathbf{q}, t), \quad (1.29)$$

*avec  $T$  l'énergie cinétique et  $U$  le potentiel, alors*

$$H = T + U. \quad (1.30)$$

**Preuve 1.8** *du théorème 1.4*

*Selon le même raisonnement que celui employé pour la preuve du lemme précédent et en employant (1.22), nous pouvons écrire*

$$H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} - L = 2T - L = L = T + U. \quad \square$$

Plusieurs corollaires importants peuvent être déduits du théorème 1.3 qui établit l'équivalence des systèmes lagrangien et hamiltonien. Un exemple en est la loi de la conservation de l'énergie qui prend la forme suivante :

**Corollaire 1.2** *Pour un système hamiltonien, nous avons*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.31)$$

*pour toute solution  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  des équations de mouvement. En particulier, si  $H$  ou  $L$  ne dépendent pas explicitement du temps,  $H$  est conservé. Un tel système est appelé autonome.*

**Preuve 1.9** *du corollaire 1.2*

*En considérant la variation de  $H$  sur la trajectoire  $H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t)$  et en employant les équations de Hamilton, nous avons*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}. \quad \square \end{aligned}$$

En connaissant les symétries d'un problème donné, nous pouvons en simplifier la résolution en choisissant un système de coordonnées  $\{\mathbf{q}\}$  de manière telle que la fonction de Hamilton est indépendante de certaines variables.

**Corollaire 1.3** *Pour une variable cyclique  $q_i$ ,*

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Le qualificatif de cyclique provient de la variable angulaire  $\phi$  dans le cas d'un problème à symétrie sphérique.

**Preuve 1.10** *du corollaire 1.3 D'après la définition 1.3, une variable cyclique  $q_i$  satisfait  $\partial_{q_i} L = 0$ . Donc*

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \mathbf{p} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (1.32)$$

*La seconde égalité est dérivée au moyen de la relation  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ .*

Nous définissons encore

**Définition 1.5** *Une fonction  $f(q_1, \dots, q_d, p_1, \dots, p_d, t)$  sur l'espace des phases est appelée "intégrale première" si elle est constante le long d'une trajectoire qui résout les équations de mouvement,*

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t), t) = 0.$$

**Corollaire 1.4** Soit  $q_1$  une variable cyclique. Alors  $p_1$  est une intégrale première et le système se réduit à un système à  $(d - 1)$  coordonnées indépendantes  $\{q_2, \dots, q_d\}$  avec fonction de Hamilton  $H = H(q_2, \dots, q_d, p_2, \dots, p_d, t, c)$ , qui dépend du paramètre  $c = p_1$ .

**Preuve 1.11** du corollaire 1.4

Nous posons d'abord  $\mathbf{p}' = (p_2, \dots, p_d)$  et  $\mathbf{q}' = (q_2, \dots, q_d)$ . Les équations de Hamilton prennent alors la forme suivante

$$\frac{d\mathbf{q}'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}'}, \quad \frac{d\mathbf{p}'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}'} \quad (1.33)$$

et

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial c}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0. \quad (1.34)$$

Selon la dernière égalité, nous avons  $p_1 = c = \text{constante}$ . Lorsque le système (1.33) est résolu pour  $p_1 = c$  nous avons

$$\frac{dq_1}{dt} = f(t) \equiv \frac{\partial}{\partial c} H(\mathbf{q}'(t), \mathbf{p}'(t), t, c),$$

que nous pouvons intégrer

$$q_1(t) = q_1(t_0) + \int_{t_0}^t f(t') dt'. \quad (1.35)$$

Par conséquent,  $q_1$  n'est pas une variable indépendante, et seules  $(d - 1)$  variables le sont.  $\square$

**Corollaire 1.5** Tout système autonome avec deux degrés de liberté ( $d = 2$ ) et une variable cyclique est intégrable, i.e. il peut être résolu par inversion et intégration des fonctions.

**Preuve 1.12** du corollaire 1.5

En se référant au corollaire 1.4, ce système peut être réduit à un système ne possédant plus qu'un seul degré de liberté

$$H = H(q', p', c).$$

Mais à tout système hamiltonien autonome ( $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ) est associée l'intégrale première

$$H(q(t), p(t), c) = E.$$

Dans le cas d'un système autonome avec un degré de liberté, cette équation peut être résolue pour  $p$ ,

$$p = f(q, c, E).$$

Alors l'équation canonique  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$  peut être écrite comme

$$\frac{d}{dt}q = \frac{\partial}{\partial p}H(q, f(q, c, E), c) := g(q, c, E).$$

Ceci peut être intégré

$$t - t_0 = \int_{q_0}^q \frac{dq'}{g(q', c, E)}. \quad (1.36)$$

En inversant cette dernière relation, nous trouvons finalement  $q(t)$  et donc  $p(t) = f(q(t), c, E)$ .  $\square$

## 1.4 Le théorème de Liouville

Le flot d'un système hamiltonien préserve le volume dans l'espace des phases. Il en suit par exemple que des systèmes hamiltoniens ne peuvent pas avoir des points d'équilibres asymptotiquement stables. Un point d'équilibre asymptotiquement stable est défini ainsi :

**Définition 1.6** Un point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  d'un système dynamique

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

est appelé asymptotiquement stable si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = 0$  (condition d'équilibre) et s'il existe un  $R > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{y}$  avec  $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < R$  et la solution  $\mathbf{x}(t)$  avec  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$ , tend vers  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0. \quad (1.37)$$

Par simplicité, nous considérons un système autonome  $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Nous nous attachons maintenant à expliquer la notion de "flot sur l'espace des phases".

**Définition 1.7** L'espace de dimension  $2d$  avec le système de coordonnées  $(q_1, \dots, q_d, p_1, \dots, p_d)$  est appelé l'espace de phase. Un système hamiltonien est un système dynamique sur cet espace donné par

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

**Définition 1.8** *Le flot est le groupe des transformations à un paramètre sur l'espace de phase définies par*

$$g^t := (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)), \quad (1.39)$$

où  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  est la solution des équations canoniques aux conditions initiales  $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ . Nous supposons que toutes les solutions peuvent être étendues sur l'entièreté de l'axe temporel  $t \in \mathbb{R}$ . Le groupe

$$\{g^t, t \in \mathbb{R}\} \quad (1.40)$$

est un groupe de transformations sur l'espace des phases dans le sens que

$$(g^t \circ g^s)(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = g^t(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) = (\mathbf{q}(t+s), \mathbf{p}(t+s)) = g^{t+s}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

puisque le système est autonome.

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments pour pouvoir énoncer le théorème de Liouville :

**Théorème 1.5 (de Liouville) :**

*Le flot d'un système hamiltonien préserve le volume dans l'espace des phases. Pour tout ensemble ouvert  $D$ , nous nous proposons de démontrer que*

$$\text{vol}(g^t D) = \text{vol}(D). \quad (1.41)$$

Nous énonçons et démontrons ci-dessous un théorème un peu plus général, dont la preuve implique celle du théorème de Liouville :

**Théorème 1.6** *Soit*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

*un système dynamique (dont les solutions sont définies pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ) et soit  $g^t$  son flot. Si*

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \quad (1.42)$$

*alors  $g^t$  conserve le volume.*

Le théorème de Liouville, 1.5, suit directement de ce théorème puisque selon (1.38), nous avons pour  $\mathbf{f} = \mathbf{X}_H$

$$\nabla \cdot \mathbf{X}_H = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (1.43)$$

Nous appelons  $D(0)$  une région dans l'espace de  $\mathbf{x}$  et  $v(0)$  son volume, alors

$$v(t) = \text{vol}(D(t)) \quad D(t) := g^t D(0).$$

Pour vérifier le théorème, nous démontrons le lemme suivant :

**Lemme 1.3**

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \int_{D(0)} d^d x \nabla \mathbf{f} \quad (1.44)$$

**Preuve 1.13** *du lemme 1.3 et du théorème 1.5*

Pour tout  $t$ , la formule de changement de variables dans une intégrale multiple est

$$v(t) = \int_{D(t)} d^d y = \int_{D(0)} d^d x \det \left( \frac{\partial g^t}{\partial \mathbf{x}} \right).$$

Les transformations induites par le groupe  $g^t$  peuvent être écrites comme

$$g^t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})t + \mathcal{O}(t^2),$$

pour  $t \rightarrow 0$ . Alors,

$$\frac{\partial g^t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbb{1} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} t + \mathcal{O}(t^2),$$

pour  $t \rightarrow 0$ . Nous montrons maintenant que toute matrice  $A$  vérifie la relation suivante

$$\det(\mathbb{1} + At) = 1 + \text{tr}(A)t + \mathcal{O}(t^2). \quad (1.45)$$

Cette relation permet aussi de démontrer la formule utile

$$\det(\exp(At)) = \exp(\text{tr}(A)t).$$

En composantes et en utilisant la formule de Leibniz pour le déterminant d'une matrice carrée

$$\det([\delta_{ij} + A_{ij}t]) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n (\delta_{i\sigma(i)} + tA_{i\sigma(i)}). \quad (1.46)$$

Ici  $S_n$  est le groupe des permutations de  $n$  éléments et  $\nu(\sigma) =$  nombre de transpositions qui génèrent la permutation  $\sigma$ . Dans le produit du côté droit de l'égalité précédente, le terme pour lequel  $\sigma(i) = i$  contient le terme  $(1 + \text{tr}(A)t + \mathcal{O}(t^2))$ , alors que tout autre permutation possède au moins deux valeurs  $i \neq \sigma(i)$ , et ne contient dès lors que des termes d'ordres  $\mathcal{O}(t^2)$  et supérieurs. Ceci démontre (1.45) et nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial g_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) &= 1 + \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) t + \mathcal{O}(t^2) \\ &= 1 + t \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned}$$

Donc

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} v(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \int_{D(0)} d^d x (1 + t \nabla \cdot \mathbf{f}) \right) = \int_{D(0)} d^d x \nabla \cdot \mathbf{f}, \quad (1.47)$$

ce qui prouve le lemme 1.3 et donc le théorème (1.6).  $\square$

Dans le cas général du théorème, nous pouvons écrire

$$\left. \frac{d}{dt} v(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{ds} v(t+s) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{vol}(g^s D(t)) = 0, \quad (1.48)$$

où le lemme a été appliqué sur  $D(t)$ . Donc  $\frac{d}{dt} v(t) = 0 \forall t$ .

Nous énonçons et démontrons maintenant une conséquence du théorème de Liouville applicable aux systèmes dynamiques (1.38), il s'agit du "théorème de récurrence de Poincaré" :

**Théorème 1.7 (de récurrence de Poincaré) :**

Soit  $g$  une bijection continue préservant le volume d'une région bornée  $D$  de l'espace euclidien ( $\mathbb{R}^{2d}$ ) vers elle-même,

$$gD = D.$$

Dans ce cas, dans tout ensemble ouvert  $U$ , il existe un point  $\mathbf{x} \in U$  qui retourne dans  $U$  après un nombre fini d'applications de  $g$ , c'est-à-dire qu'il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $g^n \mathbf{x} \in U$ .

**Preuve 1.14** Nous considérons les images de  $U$  par la bijection  $g$

$$gU, g^2U, g^3U, \dots, g^nU, \dots \quad (1.49)$$

A toutes ces images correspond un volume identique (la bijection  $g$  conserve le volume), tous contenus dans  $D$ . Comme le volume de  $D$  est fini, ces volumes doivent se recouvrir. Il existe alors des entiers  $k, l \in \mathbb{N}$  tels que

$$g^k U \cap g^l U \neq \emptyset.$$

Nous supposons  $k > l$ . Alors,

$$g^{k-l} U \cap U \neq \emptyset.$$

Il existe donc un  $\mathbf{x} \in U$  avec  $\mathbf{y} = g^n \mathbf{x} \in U$ ,  $n = k - l$ .  $\square$

Il est évident qu'ils existent alors un nombre infini de points dans  $U$  qui retourne dans  $U$ , parce que si  $\mathbf{x}$  retourne dans  $U$  alors aussi  $U/\{\mathbf{x}\}$  est un ouvert et contient donc un point  $\mathbf{x}_2$  qui retourne dans  $U/\{\mathbf{x}\}$  et ainsi de suite. Comme  $g$  est continue, il existe même tout un ouvert  $V \subset U$  qui retourne dans  $U$ , c'est-à-dire  $g^n V \subset U$ .

Ce théorème conduit au paradoxe suivant : supposons un récipient constitué de deux parties séparées. La partie 1 est remplie d'un gaz de molécules de l'espèce 1, alors que la partie 2 est pleine de molécules de l'espèce 2. Nous enlevons maintenant la paroi séparant les deux gaz de façon à ce que ceux-ci puissent se mélanger. Selon le théorème de Poincaré que nous venons d'énoncer et de prouver, après un certain temps, toutes les molécules du gaz 1 doivent être retournées dans la partie 1 du récipient, et de même pour les particules de l'espèce 2 et la partie 2. La résolution du paradoxe est que le temps nécessaire à ce que toutes les particules retournent proche de leur position initiale est long, beaucoup plus long que l'âge de l'univers qui est d'environ 13,7 milliards d'années.

Nous passons maintenant à quelques applications du théorème de Poincaré. Dans les exemples qui suivent, la notion d'ensemble "dense" est relevant : Un ensemble  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$  est dense dans  $B$  si tout ouvert  $U \subset B$  a une intersection non-vide avec  $A$ ,  $A \cap U \neq \emptyset$ . En d'autres mots, il y a un point de  $A$  dans tout voisinage de tout point de  $B$ . (Par ex.  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .)

**Exemple 1** Soit  $D$  un cercle et  $g$  une rotation d'angle  $\alpha$ . Si

$$\alpha = 2\pi \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

alors  $g^n$  est l'identité et le théorème de Poincaré est évidemment satisfait. Par contre, si  $\alpha/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$ , alors le théorème de Poincaré implique que les orbites sont denses. Pour démontrer ceci nous prenons un point  $x \in D$  et considérons son orbite définie par

$$O_x = \{g^n x | n \in \mathbb{N}\}.$$

Pour démontrer que  $O_x$  est dense sur  $D$ , il faut montrer que  $O_x \cap U \neq \emptyset$ , pour tout ouvert  $U \subset D$ . Soit  $U \subset D$  l'ouvert qui forme un arc de longueur  $\delta > 0$ . Le théorème de Poincaré veut alors qu'il existe un point  $y \in U$  et un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $|g^k y - y| < \delta$ . Mais  $g^k$  est une rotation fixe, et par conséquent  $|g^k x - x| < \delta, \forall x \in \mathbb{S}^1 = D$ . Soit alors  $|g^k y - y| = \delta_1 < \delta$ . Alors,  $g^k$  est une rotation d'angle  $\delta_1 < \delta$  (et pour tout  $\delta > 0$ , il existe un  $k$  tel que  $g^k$  est une rotation d'un angle inférieur à  $\delta$ ). Comme  $|U| \geq \delta$ , en appliquant la rotation  $g^k$  maintes fois,



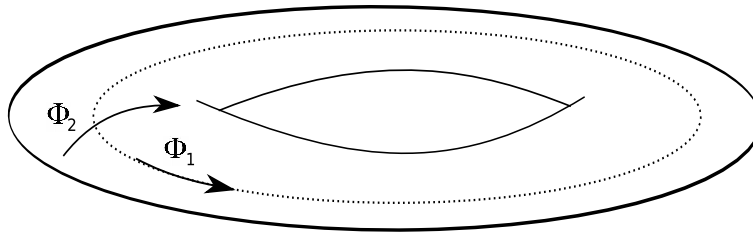
tout point tombera alors dans  $U$  à un moment donné. C'est-à-dire, il existe un  $n$  tel que  $(g^k)^n x = g^{kn}x \in U \forall x \in D$ . Donc tout orbite est dense.

**Exemple 2**

Nous considérons le système dynamique suivant sur le tore.

$$\dot{\phi}_1 = \alpha_1, \quad \dot{\phi}_2 = \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{constantes.}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \nabla \mathbf{f} = 0. \tag{1.50}$$



Le flot de  $\mathbf{f}$  est

$$g^t : (\phi_1, \phi_2) \mapsto (\phi_1 + \alpha_1 t, \phi_2 + \alpha_2 t).$$

Par le théorème de Poincaré, nous trouvons facilement le résultat suivant : si  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \in \mathbb{Q}$ , toute orbite est fermée, sinon toute orbite est dense sur le tore.

**Preuve 1.15** de l'exemple 2.

Si  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  on peut choisir  $T = q\frac{2\pi}{\alpha_2}$ . Alors  $\alpha_1 T = p2\pi$  et  $\alpha_2 T = q2\pi$ , donc  $g^T = \mathbb{1}$ . Donc toute orbite est fermée.

Si  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \notin \mathbb{Q}$ , soit  $\delta > 0$ . Il suffit de montrer que pour tout point  $(\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  et toute condition initiale  $(\phi_1(0), \phi_2(0))$ , il existe un temps  $t_\delta$  tel que  $|\phi_1(t_\delta) - \bar{\phi}_1| < \delta$  et  $|\phi_2(t_\delta) - \bar{\phi}_2| < \delta$ .

Il existe même un temps avec  $|\phi_1(t_\delta) - \bar{\phi}_1| = 0$ . Pour ceci, nous choisissons  $t_1 = \frac{\bar{\phi}_1 - \phi_1(0)}{\alpha_1}$ . Donc,  $\phi_1(t_1) = \bar{\phi}_1$  et  $\phi_1\left(t_1 + \frac{2\pi}{\alpha_1}n\right) = \bar{\phi}_1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Nous définissons

$$g_2 : \phi_2 \mapsto \phi_2 + 2\pi \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

D'après l'exemple 1, les orbites  $\{g_2^n \phi_2 | n \in \mathbb{N}\}$  sont denses sur  $\mathbb{S}_1$  ( $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \notin \mathbb{Q}$ ). Donc il existe un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $|g_2^k \phi_2(t_1) - \bar{\phi}_2| < \delta$ . Choisissons alors  $t_\delta = t_1 + \frac{2\pi}{\alpha_1}k$ . Alors,  $\phi_1(t_\delta) = \bar{\phi}_1$  et  $\phi_2(t_\delta) = \phi_2(t_1) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}2\pi k = g_2^k \phi_2(t_1)$ , et donc,  $|\phi_2(t_\delta) - \bar{\phi}_2| < \delta$ .  $\square$

## Chapitre 2

# Mécanique Lagrangienne sur des variétés différentiables

### 2.1 Contraintes holonomes

Dans cette section, nous allons définir la notion de système de points de masse soumis à des contraintes holonomes.

**Exemple** Soit  $\gamma$  une courbe lisse dans le plan. Si dans le voisinage de  $\gamma$ , une force de grande intensité est dirigée vers la courbe, un point de masse en sera toujours très proche. Dans la limite pour laquelle cette force tend vers l'infini, le point est forcé de bouger le long de  $\gamma$ . Nous appelons un tel système un système avec contrainte.

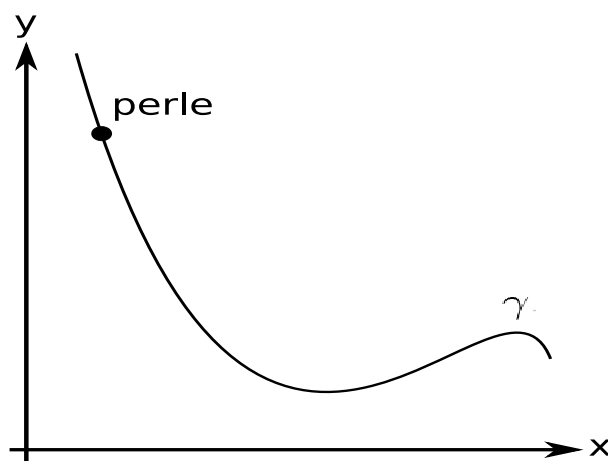


FIG. 2.1 – Perle contrainte

Pour formuler ceci de manière plus précise, nous introduisons des coordonnées généralisés  $q_1(x_1, x_2)$ ,  $q_2(x_1, x_2)$ , telles que le vecteur  $\nabla q_1$  sur  $\gamma$  est en tout point parallèle à la courbe  $\gamma$ , alors que  $\nabla q_2$  lui est perpendiculaire.

Nous considérons maintenant l'énergie potentielle

$$U_N = Nq_2^2 + U_0(q_1, q_2),$$

qui dépend du paramètre  $N$  (que nous laisserons tendre vers l'infini). Nous considérons les conditions initiales suivantes sur  $\gamma$  :

$$q_1(0) = q_{10}, \quad \dot{q}_1(0) = \dot{q}_{10}, \quad q_2(0) = \dot{q}_2(0) = 0.$$

Soit  $q_1(t) = \phi(t, N)$ . Il est alors possible de démontrer dans un sens précis que la limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi(t, N) =: \psi(t)$$

existe et qu'elle est une solution des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_\star}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L_\star}{\partial q_1},$$

ou encore

$$L_\star = T \Big|_{q_2=\dot{q}_2=0} - U_0 \Big|_{q_2=0}.$$

Nous ne démontrons pas ce théorème dans le cadre de ces notes, bien que ce soit le moyen de justifier la définition suivante :

**Définition 2.1** Soit  $\mathcal{M}$  une surface de dimension  $m$  dans l'espace de configuration (l'ensemble des positions que le système peut atteindre) de dimension  $3n$  composé de  $n$  points avec positions  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  et de masses  $m_1, \dots, m_n$ . Soient  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$  des coordonnées sur  $\mathcal{M}$  :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}).$$

Le système lagrangien

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

avec

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2(\mathbf{q}) + U(\mathbf{r}(\mathbf{q}))$$

est appelé un système de  $n$  points avec  $(3n - m)$  contraintes holonomes idéales. "Holonome" signifie que le système est contraint à des mouvements dans une sous-variété de l'espace des configurations. Si la surface  $\mathcal{M}$  est donnée par

$$k = 3n - m$$

contraintes indépendantes ( $\text{rang} \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right) = k$ ),

$$f_1(\mathbf{r}) = 0, \dots, f_k(\mathbf{r}) = 0,$$

nous disons alors que le système est contraint par les relations

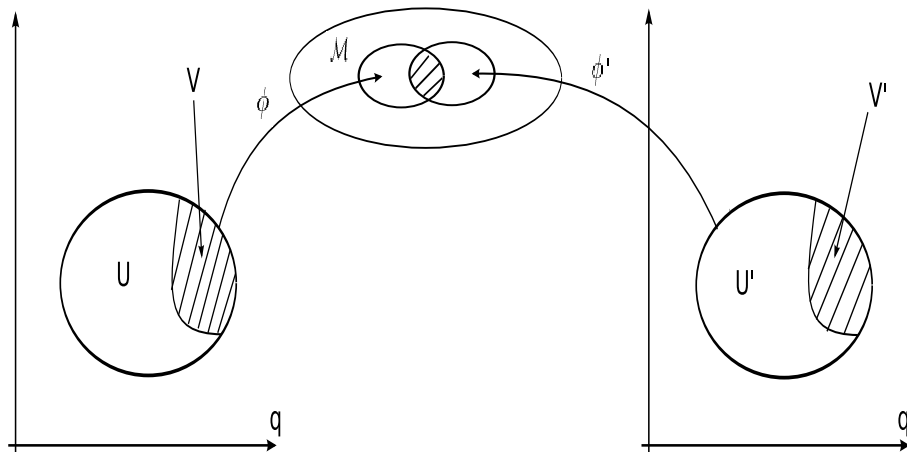
$$f_1 = \dots = f_k = 0.$$

## 2.2 Variétés différentiables

**Définition 2.2** Un espace topologique  $\mathcal{M}$  est une variété différentiable de dimension  $m$  s'il existe une collection (finie ou dénombrable) de cartes telles que tout point dans  $\mathcal{M}$  est représenté dans une carte au moins.

Une carte est un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^m$  muni d'une application bijective continue dans un sous-ensemble de  $\mathcal{M}$ ,

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow \phi(U) \\ \mathbf{q} &\mapsto \phi(\mathbf{q}). \end{aligned}$$



Si des points  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{q}'$  dans deux cartes  $U$  et  $U'$  ont la même image, alors, par continuité, il existe des voisinages  $V$  de  $\mathbf{q}$  et  $V'$  de  $\mathbf{q}'$  tels que

$$\phi'^{-1} \circ \phi : V \rightarrow V'$$

existe. Les cartes  $U$  et  $U'$  sont appelées "compatibles" si

$$\phi'^{-1} \circ \phi : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}'(\mathbf{q})$$

est différentiable ( $\phi'^{-1} \circ \phi \in C^\infty$ ). Un atlas est une réunion de cartes compatibles. Deux atlas sont "équivalents" si leur union constitue également un atlas. Une variété différentiable se note  $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ , où  $\mathcal{A}$  est une classe d'atlas équivalents. Le nombre  $m$  est le même pour toutes les cartes, et est appelé la dimension de la variété.

L'ensemble  $\phi(V)$  est un voisinage d'un point  $\phi(\mathbf{q})$ , avec  $V$  un voisinage de  $\mathbf{q}$ . Nous supposons que des points différents ont des voisinages disjoints.

Un espace de configuration en mécanique est en générale une variété différentiable. La dimension de cette variété est appelée le **nombre de degrés de liberté** du système considéré.

**Exemple 1** Tout ensemble ouvert  $U \subset \mathbb{R}^m$  est une variété différentiable de dimensions  $m$  avec un atlas qui consiste en une seule carte :

$$U \rightarrow U : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}.$$

**Exemple 2** La sphère  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  est une variété différentiable de dimension 2. Nous pouvons choisir comme atlas  $(U_i, \phi_i)$ ,  $U_i = \mathbb{R}^2$  et  $\phi_{1/2}$  la projection stéréographique par le pôle nord/sud. Pour les détails, voir les exercices.

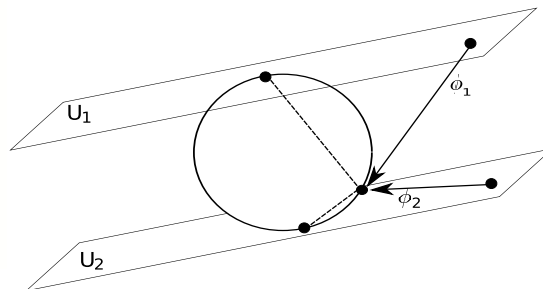


FIG. 2.2 – Exemple 2, un atlas de la sphère.

**Exemple 3** Le pendule planaire. L'espace des configurations est un cercle  $\mathbb{S}^1$ , qui est une variété différentielle de dimension  $d = 1$ . Comme atlas, nous pouvons choisir  $U_1 = (-\pi, \pi)$  et  $U_2 = (0, 2\pi)$ , avec  $\phi_1(q) = \phi_2(q) = \exp(iq)$ .

**Exemple 4** L'espace des configurations du pendule mathématique sphérique est la sphère.

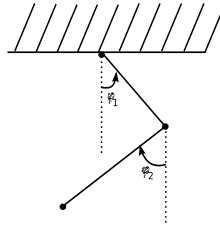


FIG. 2.3 – Exemple 5, le double pendule planaire.

**Exemple 5** L'espace des configurations du double pendule planaire est le tore  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

**Exemple 6** L'espace de configuration du double pendule sphérique est  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ .

**Exemple 7** L'espace de configuration d'un bâton rigide dans le plan  $(q_1, q_2)$  est  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \ni (q_1, q_2, q_3)$ . Il peut être couvert avec deux cartes.

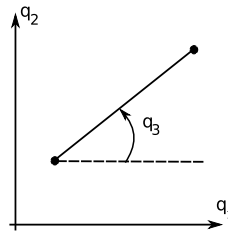


FIG. 2.4 – Exemple 7, bâton rigide dans le plan.

**Exemple 8** Un triangle rectangle rigide  $OAB$  est fixé à l'origine  $O$  (voir fig. 2.5). L'orientation du triangle est déterminée par trois nombres : 2 nombres fixent l'orientation de l'axe  $\vec{OA}$ ,  $\mathbf{e}_1 = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} \in \mathbb{S}^2$ , alors qu'une rotation autour de  $\vec{OA}$  d'angle  $\phi \in \mathbb{S}^1$  détermine la position du point  $B$  ou de manière équivalente, de l'axe  $\vec{OB}$ . La position du triangle définit uniquement un système orthogonal,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = \frac{\vec{OB}}{|\vec{OB}|}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\}$ . L'espace des configurations est donc celui des rotations, pour lequel une configuration est donnée par la rotation qui transforme le système  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  dans la base canonique  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . De telles rotations sont décrites par des matrices orthogonales  $3 \times 3$  avec déterminant égal à 1 :  $R \in SO(3) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 R_{ji}R_{li} = \delta_{jl}$ , c'est-à-dire  $R^T = R^{-1}$ , et  $\det R = 1$ .

**Exemple 9** Un système de  $k \geq 3$  bâtons de longueur  $\ell$  attachés les uns aux autres, de façon à former une chaîne close possède  $3 + 2(k - 2) + 1 = 2k$  degrés de liberté : 3 pour la position du premier point du premier bâton

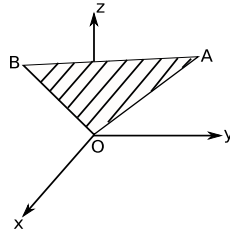


FIG. 2.5 – Exemple 9, triangle rigide.

dans notre espace spatial à trois dimensions, 2 pour son orientation, laquelle fixe la position du second bâton, 2 pour l'orientation du second bâton, laquelle fixe la position du troisième bâton, et ainsi de suite jusqu'au  $(k - 2)$ -ième bâton. L'orientation de l'avant-dernier bâton est restreinte sur un cercle de rayon  $\ell$  autour du premier point et l'orientation du dernier bâton est fixée par la contrainte de jonction entre la position  $k$  et la position 1. Même si les angles du  $(k - 2)$ -ième bâton ne sont par exemple pas entièrement libres, mais ne couvrent qu'une partie de  $\mathbb{S}^2$ , partie déterminée par le fait qu'une des extrémités du  $k - 1$ -ième bâton doit être située à une position telle que le dernier bâton puisse joindre 1, ceci ne change pas le nombre de degrés de liberté. Par contre, une description précise de l'espace des configurations pour cet exemple est compliquée.

**Exemple 10** Une variété immergée. Nous appelons une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $k$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \geq k$ , si  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  et, dans un voisinage  $U \subset \mathbb{R}^n$  de tout point  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  existent des fonctions  $f_1, \dots, f_{n-k}$ ,

$$f_i : U \rightarrow \mathbb{R},$$

telles que l'intersection  $U \cap \mathcal{M}$  est déterminée par les conditions

$$f_1 = \dots = f_{n-k} = 0,$$

et les vecteurs  $\{\nabla f_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{n-k}$  sont linéairement indépendants  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M}$ . Nous pouvons démontrer que toute variété est immergée dans un  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, il est facile d'immerger  $SO(3)$  dans  $\mathbb{R}^9$ . Un **exercice** consiste à déterminer les 6 fonctions  $f_1, \dots, f_6$  qui définissent  $SO(3)$  dans  $\mathbb{R}^9$ .

A l'aide de ce dernier exemple, nous définissons maintenant le concept important d'**espace tangent** :

**Définition 2.3** Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $k$  immergée dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout point  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ , nous pouvons définir un espace tangent  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ . Cet espace est le complément orthogonal à  $\{\nabla f_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla f_{n-k}(\mathbf{x})\}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est-à-dire

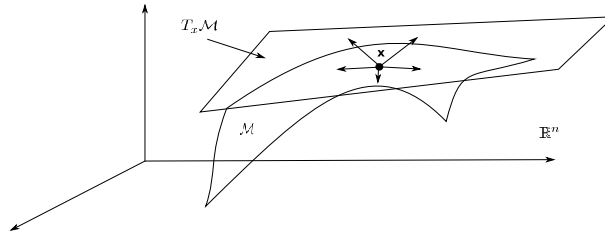
$$T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \cdot \nabla f_j(\mathbf{x}) = 0, 1 \leq j \leq n - k\}.$$

Evidemment, cet espace vectoriel est de dimension  $k$ . Les vecteurs de  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  s'appellent les vecteurs tangents à  $\mathcal{M}$  au point  $\mathbf{x}$ . Ces vecteurs sont également l'ensemble de toutes les vitesses au point  $\mathbf{x}$  des courbes lisses sur  $\mathcal{M}$  qui passent par  $\mathbf{x}$  :

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow \mathcal{M} \\ t &\mapsto \gamma(t), \quad I \subset \mathbb{R}, 0 \in I, \gamma(0) = \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

nous avons alors la vitesse au point  $\mathbf{x}$  dans l'espace tangent. Celle-ci est définie ainsi :

$$\dot{\gamma}(0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}. \quad (2.2)$$



Les courbes vitesse nous donnent la possibilité de définir l'espace tangent de manière intrinsèque sous forme de classes d'équivalence : deux courbes  $\gamma(t)$  et  $\sigma(t)$  dans  $\mathcal{M}$  avec  $\gamma(0) = \sigma(0) = \mathbf{x}$  sont appelées équivalentes en  $\mathbf{x}$  si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t) - \sigma(t)}{t} = 0, \quad \gamma \sim \sigma, \quad \gamma, \sigma \in [\gamma].$$

La limite signifie que les deux courbes ont la même vitesse à  $\mathbf{x}$ , le symbole " $\sim$ " signifie qu'elles sont équivalentes et  $[\gamma]$  est la classe d'équivalence. Un vecteur tangent en  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ , est une classe de courbes qui sont équivalentes en  $\mathbf{x}$ .

Soit  $U$  une carte de  $\mathcal{M}$  avec les coordonnées  $q_1, \dots, q_k$ . Alors les composantes du vecteur tangent à la courbe  $\gamma(t)$  au point  $\mathbf{x} = \gamma(0)$  sont les nombres

$$\xi_i = \left. \frac{d\gamma_i}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.3)$$



**Définition 2.4** Le **fibré tangent**. L'union de tous les espaces tangents  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  est appelé le "fibré tangent"

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}.$$

La dimension  $2k$  du fibré tangent est égale à deux fois la dimension  $k$  de  $\mathcal{M}$ .  
Pour une carte

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow \mathcal{M} \\ \mathbf{q} &\mapsto \phi(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

nous pouvons définir la carte

$$\begin{aligned} \Phi : U \times \mathbb{R}^k &\rightarrow T\mathcal{M} \\ (\mathbf{q}, \boldsymbol{\xi}) &\mapsto (\phi(\mathbf{q}), [\boldsymbol{\gamma}]) \end{aligned}$$

où  $[\boldsymbol{\gamma}]$  est la classe d'équivalence des courbes qui passent par  $\phi(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\gamma}(0)$  de la vitesse

$$\boldsymbol{\xi} = \left. \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \right|_{t=0}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \Pi : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (\mathbf{x}, [\boldsymbol{\gamma}]_{\mathbf{x}}) &\mapsto \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.4)$$

est appelée la projection de  $T\mathcal{M}$  sur  $\mathcal{M}$  et

$$T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} = \Pi^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

**Définition 2.5** **Variété riemannienne.**

Si une variété est immergée dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , la métrique induite par  $\mathbb{R}^n$  nous permet de mesurer les longueurs des courbes, les angles entre les vecteurs, les volumes, etc ... . Toutes ces quantités sont déterminées par une forme quadratique sur l'espace tangent  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  :

$$\begin{aligned} g : T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \times T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &\mapsto g(\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \eta_j = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La matrice symétrique définie positive  $g_{ij}(\mathbf{x})$  dépend du système de coordonnées choisi. Par exemple, la longueur  $l$  d'une courbe  $\gamma(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  est donnée par

$$l(\gamma) := \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)} dt, \quad (2.7)$$

si  $\mathbf{x}_1 = \gamma(t_1)$  et  $\mathbf{x}_2 = \gamma(t_2)$ .

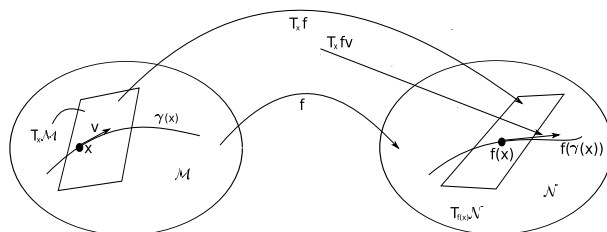
Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application d'une variété  $\mathcal{M}$  dans une autre variété  $\mathcal{N}$ . L'application  $f$  est appelée différentiable si son expression en coordonnées locales est donnée par des fonctions différentiables.

**Définition 2.6** La dérivée d'une application différentiable  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  à un point  $\mathbf{x}$  est l'application linéaire

$$T_{\mathbf{x}}f : T_{\mathbf{x}}\mathcal{M} \rightarrow T_{f(\mathbf{x})}\mathcal{N} \quad (2.8)$$

définie comme suit. Soit  $\gamma(t)$  une courbe dans  $\mathcal{M}$  avec  $\gamma(0) = \mathbf{x}$  et  $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$ . Alors,  $(T_{\mathbf{x}}f)\mathbf{v}$  est la vitesse au point  $f(\mathbf{x}) = f(\gamma(0))$  de la courbe  $f(\gamma(t))$ . Alors,

$$(T_{\mathbf{x}}f)\mathbf{v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)). \quad (2.9)$$



Soient  $(x_1, \dots, x_m)$  des coordonnées dans un voisinage de  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  des coordonnées dans un voisinage de  $f(\mathbf{x})$  dans  $\mathcal{N}$ . Soient  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  les coordonnées de  $\mathbf{v} = \dot{\gamma}(0)$ . Donc  $\xi_i = \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0}$ , où  $\mathbf{x}(t)$  est  $\gamma(t)$  exprimée dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_m)$ . Soit  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  l'expression de  $f$  dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_m)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$ , et  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  les coordonnées de  $(T_{\mathbf{x}}f)\mathbf{v}$ . Alors,

$$\eta_j = \left. \frac{d}{dt} y_j(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0} = \sum_i \left. \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \xi_i. \quad (2.10)$$

Alors, exprimée en coordonnées locales,  $T_{\mathbf{x}}f$  est donnée par la matrice

$$\left( \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Soient les fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N} \\ g : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{K}, \end{aligned}$$

alors il est possible en **exercice** de démontrer que pour  $h = g \circ f$

$$(T_{\mathbf{x}}h) = (T_{f(\mathbf{x})}g) \cdot (T_{\mathbf{x}}f), \quad \text{avec } h = g \circ f, \quad (2.11)$$

ce qui, dans un système de coordonnées locales est une conséquence de la règle de la chaîne pour des applications d'un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.3 Systèmes dynamiques lagrangiens

Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle,  $T\mathcal{M}$  son fibré tangent et  $L : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable. Un chemin  $\gamma : \mathbf{R} \mapsto \mathcal{M}$  est appelé un **mouvement lagrangien** du système lagrangien sur l'espace des configurations  $\mathcal{M}$  avec la fonction de Lagrange  $L$  si  $\gamma$  est un extremum de l'action

$$S[\gamma, t_0, t_1] := \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma}(t), \gamma(t)) dt, \quad (2.12)$$

où  $\dot{\gamma}$  est la vitesse  $\dot{\gamma} \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ .

**Exemple** Soit  $\mathcal{M}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  avec des coordonnées  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ . La fonction

$$\begin{aligned} L : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &\mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Alors,  $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$  est un mouvement lagrangien s'il satisfait les équations d'Euler-Lagrange. Ceci est aussi vrai pour des variétés différentielles dans un système de coordonnées locales :

**Théorème 2.1** *L'évolution dans coordonnées locales  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$  d'un mouvement lagrangien  $\gamma(t)$  satisfait aux équations d'Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad (2.14)$$

où  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est l'expression de  $L$  en coordonnées locales.

Nous décrivons et définissons maintenant la notion de "système naturel". Soit  $T := \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \in T\mathbf{x}\mathcal{M}$ , une forme quadratique sur  $\mathcal{M}$  appelée l'énergie cinétique, et  $U : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable appelée l'énergie potentielle.

**Définition 2.7** *Un système lagrangien sur une variété riemannienne est appelé "naturel" si  $L$  est de la forme*

$$L = T - U. \quad (2.15)$$

**Exemple** Nous considérons deux points massifs avec masses  $m_1$  et  $m_2$  reliés par une droite de longueur  $l$  dans le plan  $(x, y)$  (fig. 2.6). L'espace des configurations est de dimension 3

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

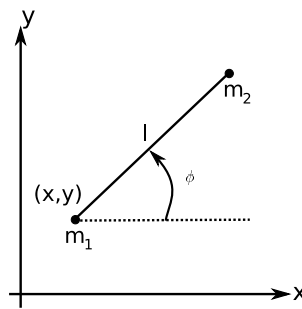


FIG. 2.6 – Segment dans le plan

Nous voulons exprimer l'énergie cinétique

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (2.16)$$

dans les coordonnées  $(x, y, \phi)$  de  $\mathcal{M}$  où  $(x, y)$  fixe la position de  $m_1$  et  $\phi$  est l'angle entre la droite  $l$  et l'axe  $x$ . Alors,

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad y_1 = y, \quad x_2 = x + l \cos(\phi), \quad y_2 = y + l \sin(\phi) \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}, \quad \dot{y}_1 = \dot{y}, \quad \dot{x}_2 = \dot{x} - \dot{\phi} l \sin(\phi), \quad \dot{y}_2 = \dot{y} + \dot{\phi} l \cos(\phi) \\ T &= \frac{m_1 + m_2}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_2}{2} \left( \dot{\phi}^2 l^2 + 2l\dot{\phi} (\dot{y} \cos(\phi) - \dot{x} \sin(\phi)) \right). \end{aligned}$$

Evidemment, comme  $T(x_1, x_2, y_1, y_2)$  est positive, ceci est également vrai pour  $T(x, y, \phi) = T(x, x_2(x, \phi), y, y_2(y, \phi))$ . De plus,  $T(x, y, \phi)$  est une forme quadratique. Donc, le système naturel  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  contraint par la connection  $l$  est aussi un système naturel. La validité de cet argument est générale : un système naturel soumis à des contraintes holonomes est aussi un système naturel.

Nous indiquons maintenant la **procédure à suivre pour résoudre des problèmes avec contraintes** :

1. Déterminer l'espace des configurations et introduire des coordonnées locales  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ .
2. Exprimer l'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$  comme forme quadratique dans les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$ ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.17)$$

3. Construire  $L = T - U(\mathbf{q})$  et résoudre les équations de Euler-Lagrange.

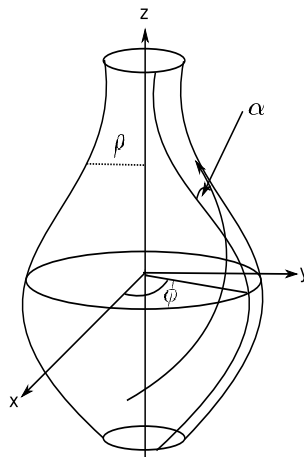


FIG. 2.7 – Surface de révolution

**Exemple** Nous considérons un point massif de masse égale à l'unité. Cette masse est libre et confinée sur une surface de révolution (fig. 2.7). La surface est décrite par une fonction  $\rho = \rho(z)$  en coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] = \frac{1}{2} [(1 + \rho^2) \dot{z}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2] = L, \\ U &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dans cette dernière expression, le prime signifie une dérivée par rapport à la variable  $z$ . Dans ce problème  $\phi$  est une variable cyclique. Par conséquent,

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \rho^2 \dot{\phi}$$

est une quantité conservée. Cette quantité n'est autre que la composante  $z$  du moment cinétique. Comme nous allons le voir dans la section suivante, cette conservation est liée à la symétrie sous rotations autour de l'axe  $z$ . Comme ceci est un système avec 2 degrés de liberté, l'intégrale première  $p_\phi$  suffit pour intégrer complètement le système. Si  $\mathbf{v}$  est la vitesse du point  $\mathbf{q}(t)$ ,  $\rho \dot{\phi} = v_\phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\phi = v \sin(\alpha)$ ,  $v = |\mathbf{v}|$  et  $\alpha$  est l'angle entre la courbe et le méridien qui passe par le point  $\mathbf{q}(t)$ . Comme la grandeur  $H = L = \frac{1}{2}v^2$  est conservée, la conservation de  $p_\phi$  implique  $\rho v \sin(\alpha) = \text{constante}$ , et donc

$$\rho \sin(\alpha) = \text{constante},$$

cette dernière égalité porte le nom de "théorème de Clairaut". Comme  $|\sin(\alpha)| < 1$ , ceci implique que

$$\rho \geq \rho_0 |\sin(\alpha_0)|$$

et plus  $\rho$  décroît, plus  $\alpha$  croît jusqu'à  $\rho_{min} = \rho_0 \sin(\alpha_0)$ . Pour ce minimum, l'orbite est réfléchiée et revient dans les régions de larges valeurs de  $\rho$  (voir figure 2.8).

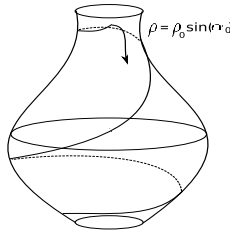


FIG. 2.8 – Géodésique sur la surface de révolution.

Pour intégrer le système nous utilisons que

$$v^2 = (1 + \rho'^2)z^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} = \text{const.} \quad (2.19)$$

et donc

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{v^2 \rho^2 - p_\phi^2}{\rho^2(1 + \rho'^2)}} = f(z), \quad t(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz'}{f(z')}. \quad (2.20)$$

Ici  $z_0$  est la valeur de  $z$  à  $t = 0$ . De même

$$\phi(z) - \phi(z_0) = p_\phi \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\rho^2(z')f(z')}. \quad (2.21)$$

Pour résoudre le problème il faut alors effectuer les intégrales (2.20) et (2.21) et puis inverser la fonction  $t(z)$  pour obtenir  $z(t)$ . (**Exercice** : Trouver un profil  $\rho(z)$  qui permet à résoudre le problème analytiquement, ou choisir un profil et résoudre le problème numériquement, e.g. avec Mathematica.)

## 2.4 Systèmes non autonomes

Si la fonction de Lagrange dépend explicitement du temps,

$$\begin{aligned} L : T\mathcal{M} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) &\mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \end{aligned}$$

le système est appelé non autonome. Ceci arrive souvent pour des systèmes avec contraintes holonomes si les contraintes dépendent du temps. Le procédé pour résoudre un tel système reste toutefois le même que ce qui a été expliqué auparavant.

**Exemple** Nous considérons le mouvement d'une perle le long d'un fil en forme de cercle en rotation avec vitesse angulaire constant  $\omega$  autour de l'axe  $z$ . La perle est soumise au potentiel gravifique  $U = mgz$ .

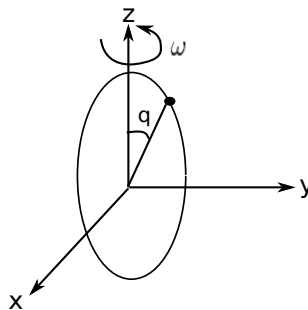


FIG. 2.9 – Perle sur un cercle en rotation.

L'espace de configurations au moment  $t$  est alors donné par l'immersion

$$\begin{aligned} i : \mathcal{M} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (q, t) &\mapsto (r \sin(q) \cos(\omega t), r \sin(q) \sin(\omega t), r \cos(q)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Quant à l'énergie cinétique, son expression est

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 \sin^2(q) + r^2 \dot{q}^2),$$

et l'énergie potentielle

$$U = mgr \cos(q).$$

Ainsi,  $L = T_0 - U_0$ , avec

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} M \dot{q}^2, \quad M = mr^2 \\ U_0 &= A \cos(q) - B \sin^2(q), \quad A = mgr, \quad B = \frac{m}{2} \omega^2 r^2. \end{aligned}$$

La forme du potentiel dépend du rapport entre  $A$  et  $B$ . Si  $2B < A$ , c'est-à-dire si  $\omega^2 r < g$ , la position inférieure  $q = \pi$  reste un minimum stable et le mouvement est quantitativement le même que pour un cercle qui ne serait pas en rotation. Mais si  $2B > A$ ,  $q = \pi$  devient un maximum local et deux minima apparaissent à  $\cos(q_m) = -\frac{A}{2B} = -\frac{g}{r\omega^2}$  (figure 2.10).

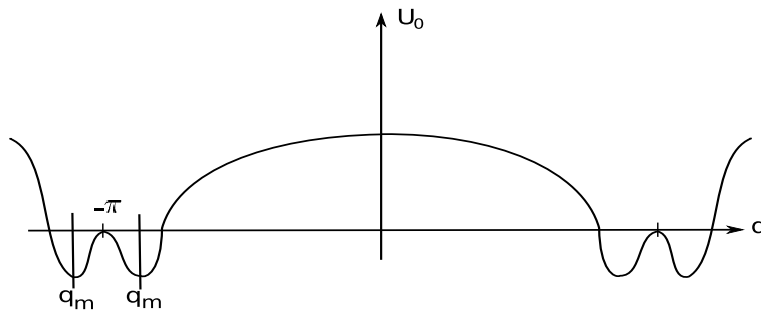


FIG. 2.10 – Energie potentielle effective.

En guise d'**exercice**, il est utile de faire le calcul explicite pour discuter de la nature des extrema de  $U_0$  et de dessiner le diagramme de phases dans le plan  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .



## 2.5 Le théorème de E. Noether

(Emmy Nöther, 1882–1932)

Ce théorème, qui reste valable pour des théories de champs classique et quantiques, met en évidence le lien fondamental entre groupes de symétrie à un paramètre et lois de conservation : à tout groupe de symétrie à un paramètre dans l'espace des configurations correspond une intégrale première, c'est-à-dire une fonction sur  $\mathcal{M}$  qui est conservée sous le mouvement lagrangien.

**Définition 2.8** *Soit*

$$h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$$

*une application différentiable. Nous appelons  $h$  une symétrie du système lagrangien  $(\mathcal{M}, L)$*

$$\begin{aligned} L : T\mathcal{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &\mapsto L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned}$$

*si la transformation  $Th : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  laisse  $L$  invariant, c'est-à-dire*

$$L(h(\mathbf{q}), T_{\mathbf{q}}h(\dot{\mathbf{q}})) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

**Exemple** Nous considérons la variété  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  et le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - U(x_2, x_3).$$

Ce lagrangien est invariant sous translation en direction de  $x_1$  :

$$\begin{aligned} h_c : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + c, x_2, x_3). \end{aligned}$$

**Définition 2.9** *Un ensemble de difféomorphismes sur  $\mathcal{M}$   $\{h_s \mid s \in \mathbb{R}\}$  est appelé un groupe à un paramètre si  $h_{s_1} \circ h_{s_2} = h_{s_1+s_2}$ . Donc  $h_0 = \mathbb{I}$  et  $h_{-s} = h_s^{-1}$ .*

**Théorème 2.2** *(de E. Nöther)*

*Si le système  $(\mathcal{M}, L)$  admet un groupe de symétrie à un paramètre*

$$h_s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, s \in \mathbb{R}.$$

*alors le système lagrangien possède une intégrale première*

$$I : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

donnée par

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{dh_s(\mathbf{q})}{ds} \right|_{s=0}. \quad (2.23)$$

**Preuve 2.1** Nous faisons la preuve dans un système de coordonnées locales autour du point  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ , conditions initiales de la solution  $\phi(t)$ . Pour cela, il faut simplement choisir  $t$  et  $s$  assez petits afin que  $h_s(\phi(t))$  puisse être exprimée dans les coordonnées choisies. Nous posons

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M} \\ (s, t) &\mapsto h_s(\phi(t)). \end{aligned}$$

Nous indiquons les dérivées par rapport à  $s$  avec un prime,  $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial s}$  et celles par rapport à  $t$  avec un point,  $\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Comme  $h_s$  est une symétrie, nous pouvons écrire

$$0 = \frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\Phi}'. \quad (2.24)$$

La courbe  $\Phi|_{s=\text{const}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  est une solution des équations d'Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2.25)$$

En substituant le membre de gauche de l'équation (2.25) dans (2.24), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\Phi}' \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Phi' \right) = \frac{d}{dt} I. \end{aligned}$$

□

La valeur de  $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Phi'$  ne dépend pas des coordonnées choisies. En effet,  $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est la variation de  $L$  si  $\dot{\mathbf{q}} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$  change avec la vitesse  $\frac{d}{ds}|_{s=0} h_s(\mathbf{x})$ .

**Exemple 1** Soit

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{x}}_i^2 - U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (2.26)$$

avec

$$\mathbf{x}_i = x_{i1}\mathbf{e}_1 + x_{i2}\mathbf{e}_2 + x_{i3}\mathbf{e}_3,$$

contraint par les conditions  $f_j(\mathbf{x}) = 0$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Nous supposons que  $L$  est invariant sous translation le long de  $\mathbf{e}_1$

$$h_s : \mathbf{x}_i \mapsto \mathbf{x}_i + s\mathbf{e}_1.$$

Comme  $\frac{d}{ds}|_{s=0}h_s(\mathbf{x}_i) = \mathbf{e}_1$ , nous trouvons

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{e}_1 = \sum_i m_i \dot{x}_{i1} =: P_1. \quad (2.27)$$

Par conséquent, l'impulsion en direction de  $\mathbf{e}_1$  est conservée. Le même argument est applicable aux autres directions. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

*Si un système est invariant sous translation dans une direction donnée, l'impulsion dans cette direction est conservée.*

**Exemple 2** De la même façon, nous montrons que, *si un système est invariant sous rotation autour d'un axe donné  $\mathbf{e}_i$ , alors le moment cinétique dans la direction  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}$ , est conservé avec*

$$\mathbf{M} := \mathbf{x} \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}.$$

Pour démontrer ceci nous utilisons le fait qu'une rotation  $R(\mathbf{e}, \alpha)$  autour de l'axe  $\mathbf{e}$  d'angle  $\alpha$  est donnée par

$$\begin{aligned} R(\mathbf{e}, \alpha) \mathbf{x} &= \sin(\alpha)(\mathbf{e} \wedge \mathbf{x}) - \cos(\alpha)\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{x}) + \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) \\ &= h_\alpha(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Donc,  $\frac{d}{d\alpha}|_{\alpha=0}h_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \wedge \mathbf{x}$  et

$$\begin{aligned} I(\mathbf{e}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{e} \cdot \left( \mathbf{x} \wedge \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \\ &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Pour le lagrangien donné en (2.26) nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}_i$$

donc

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i \wedge \dot{\mathbf{x}}_i. \quad (2.29)$$

**Exemple 3** Nous considérons une particule qui bouge dans un potentiel invariant sous la transformation suivante

$$h_\alpha(\mathbf{x}) = R(\mathbf{e}_3, \alpha) \mathbf{x} + c\alpha \mathbf{e}_3, \quad c \in \mathbb{R} \text{ constant.} \quad (2.30)$$

Cette dernière transformation est celle du mouvement hélicoïdal. Nous avons alors

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} h_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{x} + c\mathbf{e}_3, \quad (2.31)$$

et donc

$$I = m\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{x} + c\mathbf{e}_3) = M_3 + cP_3 \quad (2.32)$$

est une grandeur conservée.

## 2.6 Le principe d'Alembert

**Exemple** Considérons le système holonome  $(\mathcal{M}, L)$  où  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  est une surface et

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}).$$

Le point  $\mathbf{x}$  de masse  $m$  est confiné à la surface  $\mathcal{M}$ . Pour un mouvement sur  $\mathcal{M}$  qui satisfait aux équations de Euler-Lagrange correspondant à  $L|_{\mathcal{M}}$ , les équations de Euler-Lagrange sur  $\mathbb{R}^3$  ne sont en général pas satisfaites et nous avons

$$\mathbf{R} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = m\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \neq 0. \quad (2.33)$$

Par définition, la quantité  $\mathbf{R}$  est appelée la "force de contrainte". Pour garder la masse sur  $\mathcal{M}$ , il faut évidemment que

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{R} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.34)$$

donc, la force  $\mathbf{R}$  doit être appliquée, en plus de celle provenant du potentiel  $U$ . La force  $\mathbf{R}$  qui contraint le point  $\mathbf{x}$  sur  $\mathcal{M}$  est normale à  $\mathcal{M}$  dans le sens que pour  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n \ni \mathbf{x}(t)$ , le produit scalaire

$$\mathbf{R}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) = \left( m\ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}(t)} \right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) = 0$$

pour toute solution  $\mathbf{x}(t)$  des équations d'Euler-Lagrange induites dans  $\mathcal{M} \ni \mathbf{x}(t)$  et  $\boldsymbol{\xi}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$ . Nous démontrons cet énoncé plus précisément dans ce qui suit :

**Définition 2.10** La courbe  $\mathbf{x}(t)$  dans  $\mathcal{M}$  est appelée un *extremum conditionnel de l'action*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt$$

si la différentielle  $\delta S = 0$  pour des variations qui consistent en courbes voisines dans  $\mathcal{M}$  avec  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$ . Nous écrivons  $\delta_{\mathcal{M}} S = 0$ .

**Théorème 2.3 (Principe d'Alembert)** Une courbe  $\mathbf{x}(t)$  est un *extremum conditionnel de S* si et seulement si

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} = 0, \forall \boldsymbol{\eta} \in T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}. \quad (2.35)$$

**Lemme 2.1** Soit  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  une variété différentielle de dimension  $k$  et

$$\mathbf{f} : \{t, t_1 \leq t \leq t_2\} \mapsto \mathbb{R}^n$$

une application continue. Si pour tout champs vectoriel  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}(t)) \in T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) dt = 0,$$

alors,  $\mathbf{f}(t)$  est normale à  $T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}$  à chaque point  $\mathbf{x}(t)$ , c'est-à-dire que nous avons  $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{h} = 0, \forall \mathbf{h} \in T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}, \forall t \in (t_1, t_2)$ .

**Preuve 2.2** du lemme 2.1.

A chaque point  $\mathbf{x}(t)$  nous choisissons une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , telle que  $\mathbf{e}_1(t), \dots, \mathbf{e}_k(t)$  forment une base de  $T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}$  et donc  $\mathbf{e}_{k+1}(t), \dots, \mathbf{e}_n(t)$  sont orthogonaux à  $T_{\mathbf{x}(t)} \mathcal{M}$ . Nous exprimons les vecteurs  $\boldsymbol{\xi}(t)$  et  $\mathbf{f}(t)$  dans cette base. Choisissons  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1(t), 0, \dots, 0)$  alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) \xi_1(t) dt. \quad (2.36)$$

La preuve que  $f_1 = 0$  est identique à la preuve qui montre que si

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) g(t) dt = 0,$$

pour toute fonction continue  $g(t)$ , alors  $f_1(t) \equiv 0$ ,  $f_1$  étant supposée continue. De même pour les composantes  $f_i, 2 \leq i \leq k$ .  $\square$

Nous démontrons maintenant le théorème précédent .

**Preuve 2.3** du théorème 2.3.

Soient  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$  deux courbes voisines dans  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ , avec  $\boldsymbol{\xi}(t_1) = \boldsymbol{\xi}(t_2) = 0$ . Au premier ordre en  $\boldsymbol{\xi}$ , la variation de l'action  $S$  est

$$\delta_{\boldsymbol{\xi}} S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\xi} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \right) \cdot \boldsymbol{\xi} dt. \quad (2.37)$$

Comme  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\xi}(t)$  sont dans  $\mathcal{M}$ , il faut que la déviation infinitésimale  $\boldsymbol{\xi}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$ . Pour que  $\delta_{\mathcal{M}} S = 0$ , il faut alors que  $\delta_{\boldsymbol{\xi}} S = 0$ , pour tout champs vectoriel  $\boldsymbol{\xi}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$  le long de la courbe  $\mathbf{x}(t)$ . Le lemme 2.1 implique donc le théorème 2.3.  $\square$

Evidemment, si  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$  sont des coordonnées locales sur  $\mathcal{M}$  et  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := L(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$ ,  $S$  est un extremum conditionnel si  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  satisfait aux équations d'Euler-Lagrange. Ceci démontre l'équivalence des équations d'Euler-Lagrange sur  $\mathcal{M}$  et le principe d'Alembert des "variations virtuelles" (2.37).

**Corollaire 2.1** Un point  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  est un point d'équilibre si et seulement si

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in T_{\mathbf{x}_0}\mathcal{M}.$$

**Définition 2.11**  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$  est un point d'équilibre si  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  et  $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$  résolvent les équations de mouvement  $\delta_{\boldsymbol{\xi}} S = 0 \forall \boldsymbol{\xi}(t) \in T_{\mathbf{x}(t)}\mathcal{M}$ .

Tous les résultats du présent paragraphe sont également valables si les contraintes dépendent du temps.

**Exemple** Nous considérons un anneau qui glisse le long d'un bâton, lequel est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. Ce bâton tourne autour de l'axe  $z$  avec une vitesse angulaire  $\omega$  (voir figure 2.11) telle que  $\mathbf{x} = (q \sin \alpha \cos(\omega t), q \sin \alpha \sin(\omega t), q \cos \alpha)$ .

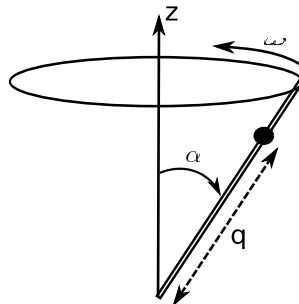


FIG. 2.11 – Anneau en mouvement le long d'un bâton en rotation.

Sans gravitation, nous avons donc

$$L = T = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2 \sin^2(\alpha)).$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient

$$\ddot{q} = \omega^2 q \sin^2(\alpha).$$

La force de contrainte  $\mathbf{R} = m\ddot{\mathbf{x}}$  est à tout point normale à la direction du bâton, mais non à la direction de la trajectoire. (Exercice : calculer la force  $\mathbf{R}$ .)

## 2.7 Le théorème d'Ostrogradski (1850)

Une question intéressante à se poser est la suivante : pourquoi les équations du mouvement sont-elles généralement des équations du deuxième ordre, et non des équations du troisième ou quatrième ordre ?

Une réponse, quoique partielle, à cette question est donnée par le théorème d'Ostrogradski. Pour un lagrangien  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , les équations du mouvement sont données par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0. \quad (2.38)$$

Si le lagrangien n'est pas dégénéré, c'est-à-dire si nous avons

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0,$$

alors les équations d'Euler-Lagrange peuvent être écrites sous la forme  $\ddot{\mathbf{q}} = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , et cette forme admet une solution  $\mathbf{q}(t)$  qui dépend des conditions initiales  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{\mathbf{q}}(0)$ . Comme nous l'avons vu auparavant, dans ce cas nous pouvons définir les coordonnées canoniques

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (2.39)$$

et la fonction de Hamilton

$$\begin{aligned} H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &\equiv \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}} - L \\ &= \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - L(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})). \end{aligned}$$

Les équations canoniques

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} \quad (2.40)$$

sont satisfaites. Cette évolution conserve la fonction  $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  si  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  n'a pas de dépendance explicite du temps.  $H$  est donc la grandeur conservée qui correspond à la symétrie de translation dans le temps (théorème de Noether). Cette grandeur n'est autre que l'énergie.

Si nous couplons le système donné avec de petites perturbations (ce qui est toujours le cas, au moins si nous prenons en compte des effets quantiques), il garde ses caractéristiques si et seulement si  $H$  admet une borne inférieure. Dans le cas contraire, les degrés de liberté  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  perdent toute pertinence et nous n'observons jamais un système décrit par  $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ . Ceci motive la définition suivante :

**Définition 2.12** *Un système lagrangien est appelé stable si la fonction de Hamilton  $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  admet une borne inférieure.*

Nous énonçons maintenant le théorème d'Ostrogradski :

**Théorème 2.4** *Un système lagrangien pour lequel le lagrangien est une fonction  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  ne permet pas d'obtenir un hamiltonien admettant une borne inférieure : par conséquent, un tel système n'est pas stable.*

**Preuve 2.4** *du théorème 2.4*

*Pour simplifier la notation, nous considérons un système à une dimension  $\mathbf{q} = q$ . L'action est*

$$S(q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}) dt,$$

*avec  $q(t)$  un chemin,  $q(t_1) = q_1$ ,  $q(t_2) = q_2$ , et  $\dot{q}(t_1) = \dot{q}_1$ ,  $\dot{q}(t_2) = \dot{q}_2$ . La fonction  $q(t)$  est une solution des équations d'Euler-Lagrange, si l'action est*



un extremum. Considérons une petite variation  $\tilde{q}(t) = q(t) + \epsilon h(t)$ . L'action est un extremum si

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dS}{d\epsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{h} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) h dt, \end{aligned}$$

où nous avons supposé  $h(t_1) = h(t_2) = \dot{h}(t_1) = \dot{h}(t_2) = 0$ . L'équation d'Euler-Lagrange est donc

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = 0, \quad (2.41)$$

qui est une équation du quatrième ordre, justifiant les quatre conditions de bord. Comme pour une équation du premier ordre, une équation différentielle d'ordre impair ne peut pas être obtenue à partir d'un système lagrangien. Ceci est évident pour un système hamiltonien et c'est donc également une conséquence de l'équivalence des systèmes lagrangiens et hamiltoniens.

Si le système (2.41) n'est pas dégénéré,  $\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \neq 0$ , nous pouvons le réécrire sous la forme

$$\ddot{\ddot{q}} = F(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}}). \quad (2.42)$$

Comme cette équation est du quatrième ordre, elle requiert deux paires de variables canoniques. Nous choisissons

$$Q_1 = q, \quad P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \quad (2.43)$$

et

$$Q_2 = \dot{q}, \quad P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}. \quad (2.44)$$

Comme  $L$  n'est pas dégénéré, nous pouvons résoudre (2.44) pour  $\ddot{q} = f(Q_1, Q_2, P_2)$ . L'hamiltonien est alors obtenu par transformation de Legendre dans les variables  $\dot{Q}_1 = \dot{q} = Q_2$  et  $\dot{Q}_2 = \ddot{q} = f(Q_1, Q_2, P_2)$ . Nous obtenons alors

$$H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = P_1 Q_2 + P_2 f(Q_1, Q_2, P_2) - L(Q_1, Q_2, f(Q_1, Q_2, P_2)) \quad (2.45)$$

Comme nous dérivons maintenant, l'équation de mouvement (2.41) est équivalente

aux équations canoniques

$$\begin{aligned}\dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i}, & \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} & \text{donc :} & & (2.46) \\ \dot{Q}_1 &= \dot{q} = Q_2 = \frac{\partial H}{\partial P_1} \\ \dot{Q}_2 &= \ddot{q} = f(Q_1, Q_2, P_2) & \text{mais} & & & & \\ \frac{\partial H}{\partial P_2} &= f(Q_1, Q_2, P_2) + P_2 \frac{\partial f}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial f}{\partial P_2} = f.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial Q_1} &= P_2 \frac{\partial f}{\partial Q_1} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial f}{\partial Q_1} & (2.47) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = -\dot{P}_1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial Q_2} &= P_1 + P_2 \frac{\partial f}{\partial Q_2} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \frac{\partial f}{\partial Q_2} & (2.48) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + P_1 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = -\dot{P}_2.\end{aligned}$$

Les équations canoniques sont donc satisfaites et  $H$  est la grandeur conservée qui correspond à la symétrie de translation dans le temps,  $H(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ , est l'énergie du système. Cependant, dans l'équation (2.45),  $P_1$  entre de manière linéaire, et donc  $H$  ne peut pas admettre de borne inférieure. Par exemple pour  $Q_2 \neq 0$  fixe, et  $Q_2 < 0$ , nous pouvons choisir  $P_1$  très grand, et  $H$  devient alors arbitrairement négative.  $\square$

Cet énoncé ne dépend pas du choix des variables canoniques  $(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ . Comme nous allons le voir dans le chapitre 5, un changement de variables (transformation canonique) laisse l'énergie invariante.

Il y a des exceptions importantes à ce théorème, des situations pour lesquelles  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}_j \partial \ddot{q}_i} \right) = 0$  pour des raisons de symétrie ou en raison de contraintes imposées. Le fait d'ajouter des dérivées d'ordre supérieur,  $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}})$  n'améliore pas la situation, puisque pour toute dérivée supplémentaire, il faut ajouter une paire de variables canoniques, et donc, nous obtenons une impulsion additionnelle dans laquelle l'hamiltonien est linéaire. Comme **exercice**, nous proposons de chercher les variables canoniques  $(Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3)$  pour  $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, \ddot{\ddot{q}})$  avec  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}_j \partial \ddot{q}_i} \right) = 0$ , déterminer l'hamiltonien et vérifier les équations canoniques.

# Chapitre 3

## Oscillation

Comme ce sujet a été discuté longuement lors du cours de Mécanique 1, nous allons le traiter de manière plus brève. Le présent chapitre doit donc être considéré comme un complément de la matière dispensée en Mécanique 1.

### 3.1 Linéarisation

**Définition 3.1** Un point  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  est appelé point d'équilibre du système dynamique

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . Alors,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  est une solution de (3.1).

**Définition 3.2** un point d'équilibre  $\mathbf{x}_0$  est appelé **stable** dans le sens de Liapunov si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$  si  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$ .

**Théorème 3.1** Soit  $(\mathcal{M}, L)$ , avec

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\mathbf{q}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}), \quad (3.2)$$

un système lagrangien naturel,  $(a_{ij}(\mathbf{q}))$  une forme quadratique positive définie, avec point d'équilibre  $(\mathbf{q}_0, 0)$ . Si  $\mathbf{q}_0$  est un minimum local de  $U(\mathbf{q})$ , alors  $(\mathbf{q}_0, 0)$  est un point d'équilibre stable.

**Preuve 3.1** du théorème (3.1).

Soit  $U(\mathbf{q}_0) = h$ . Pour de petites valeurs de  $\epsilon$ , l'ensemble

$$\{\mathbf{q} : U(\mathbf{q}) < h + \epsilon\}$$

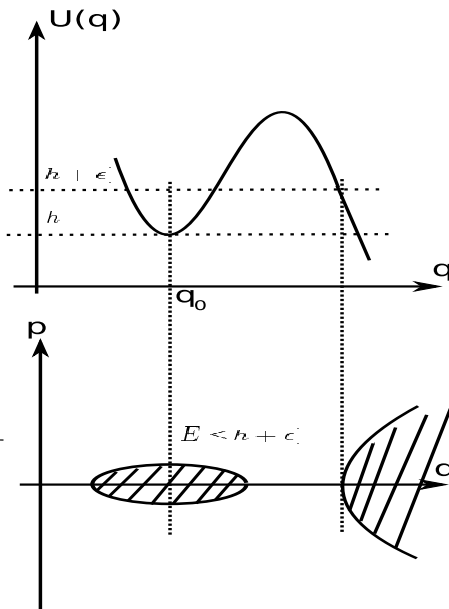
qui contient  $\mathbf{q}_0$  est un voisinage arbitrairement petit de  $\mathbf{q}_0$ . Pour

$$\mathbf{p} := \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}},$$

la région de l'espace de phase définie par

$$\{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : E(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T + U \leq h + \epsilon\}$$

est un petit voisinage du point  $(\mathbf{q}_0, 0)$ . Comme l'énergie est conservée, une trajectoire qui commence dans ce petit voisinage ne le quitte jamais.  $\square$



Nous faisons encore remarquer que comme l'énergie le long d'une trajectoire est conservée, une position d'équilibre ne peut pas être asymptotiquement stable. Il n'y a pas de bassin d'attraction tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  si  $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$ .

Si nous développons maintenant en série de Taylor autour de  $\mathbf{x}_0$  la fonction  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  (3.1), (pour simplifier, nous choisissons  $\mathbf{x}_0 = 0$ , le cas général étant obtenu par translation), nous obtenons

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + R_2(\mathbf{x}),$$

avec

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad R_2(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(\mathbf{x}^2).$$

Le passage du système (3.1) au système

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \quad A_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=0}, \quad \mathbf{y} \in T_0\mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

est appelé la linéarisation du système (3.1) autour du point d'équilibre  $\mathbf{x} = 0$ . La solution du système précédent est

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) \exp(At), \quad (3.4)$$

avec

$$\exp(At) = \mathbb{1} + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n + \dots.$$

Si  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}(0)$  est suffisamment petit, les solutions de (3.1) et de (3.3) restent proches assez longtemps.

**Théorème 3.2** *Pour linéariser le système lagrangien (3.2) autour du point d'équilibre  $\mathbf{q} = 0$ , il suffit de remplacer  $\frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$  par sa valeur à  $\mathbf{q} = 0$ ,*

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(0), \quad (3.5)$$

*et l'énergie potentielle  $U(\mathbf{q})$  par sa partie quadratique*

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=0}. \quad (3.6)$$

**Preuve 3.2** *du théorème (3.2)*

*Nous réduisons le système lagrangien à un système du premier ordre en utilisant les variables canoniques  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$  et  $\mathbf{q}$ . Nous avons alors*

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad H = T + U. \quad (3.7)$$

Comme  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (0, 0)$  est un point d'équilibre, l'expansion en séries de Taylor des équations canoniques ne commence qu'avec des termes linéaires en  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$ . Mais ces termes linéaires, qui déterminent la linéarisation de (3.7) proviennent des termes quadratiques de  $H$

$$H_2 = T_2 + U_2,$$

ce qui correspond, comme nous l'avons vu en discutant les transformations de Legendre, à

$$L_2 = T_2 - U_2, \quad \square.$$

Comme nous l'avons démontré, le point d'équilibre  $\mathbf{q} = 0$  est stable si il est un minimum de  $U$ , i.e. si  $b_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_i}(0)$  est définie positive.

## 3.2 Petites oscillations

Nous considérons un système linéarisé

$$T = \frac{1}{2} (A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}), \quad U = \frac{1}{2} (B\mathbf{q}, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n.$$

$A$  et  $B$  sont des matrices symétriques et  $A$  est définie positive. Nous pouvons trouver une transformation linéaire  $C$  telle que pour  $\mathbf{Q} = C\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{Q}} = C\dot{\mathbf{q}}$ ,

$$T = \frac{1}{2} (A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i \dot{Q}_i^2. \quad (3.8)$$

Il est ensuite possible de diagonaliser la matrice symétrique  $(C^{-1})^T B C^{-1}$  par une transformation orthogonale. Dans les nouvelles coordonnées appelées  $\mathbf{Q}$ , les énergies cinétique et potentielle prennent les formes suivantes

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \dot{Q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i Q_i^2. \quad (3.9)$$

Les nombres  $\lambda_i$  sont appelés les valeurs propres de  $B$  par rapport à  $A$ .

Comme **exercice**, il est possible de montrer que les  $\lambda_i$  sont les solutions de l'équation polynomiale

$$\det(B - \lambda A) = 0. \quad (3.10)$$

Pour la démonstration, il est conseillé de montrer d'abord que  $A = C^T C$ . Alors, les racines du polynôme caractéristique de  $(C^{-1})^T B C^{-1}$  sont égales aux solutions de (3.10).

Dans les coordonnées  $\mathbf{Q}$ , le système lagrangien avec  $L = T - U$  se réduit à  $n$  équations indépendantes,

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i. \quad (3.11)$$

Nous voulons énoncer tout ce qui précède sous forme de théorème :

**Théorème 3.3** *Un système lagrangien linéaire de dimension  $n$  est le produit direct de  $n$  systèmes linéaires à 1 dimension. Dans le cas d'un système à 1 dimension, nous avons les possibilités suivantes :*

1.  $\lambda = \omega^2 > 0$  oscillations,  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$  est un équilibre stable :  
 $Q = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$
2.  $\lambda = 0$ ,  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$  est un équilibre neutre :  
 $Q = C_1 + C_2 t.$
3.  $\lambda = -\omega^2 < 0$ ,  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$  est un équilibre instable :  
 $Q = C_1 \cosh(\omega t) + C_2 \sinh(\omega t).$

**Corollaire 3.1** *Soit  $\lambda_i = \omega^2 > 0$  et  $\boldsymbol{\xi}$  un vecteur propre correspondant à  $\lambda_i$ , i.e.  $B\boldsymbol{\xi} = \lambda_i A\boldsymbol{\xi}$ . Alors,*

$$\mathbf{q}(t) = (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \boldsymbol{\xi}$$

*est une solution du système linéarisé.*

**Preuve 3.3** *du corollaire 3.1.*

*La preuve procède en diagonalisant le système et en choisissant*

$$Q_i = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad Q_j = 0 \forall j \neq i. \quad \square \quad (3.12)$$

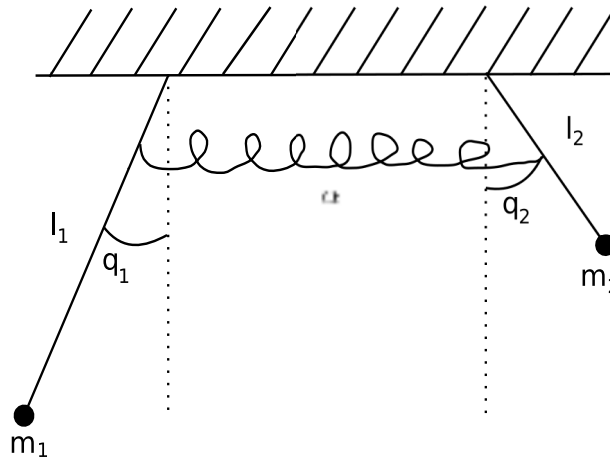
Les nombres  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$  sont appelés les fréquences caractéristiques du système :

1. Un système est stable dans le sens de Liapunov si toutes ses fréquences caractéristiques sont réelles et non-nulles.
2. – Le nombre d'oscillations stables d'un système linéarisé est égale à la dimension du plus grand sous-espace sur lequel l'énergie potentielle  $\frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q})$  est définie positive.

– Le système est stable si  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est définie positive.

**Corollaire 3.2** *Toute oscillation (solution du système linéarisé) est une somme d'oscillations caractéristiques. Même dans le cas d'un système stable, une telle oscillation générique n'est en général pas périodique.*

**Exemple** Nous considérons deux pendules de différentes longueurs couplés. Le ressort est caractérisé par une constante de raideur  $\alpha$ . Ce système oscille avec une faible amplitude.



Nous avons

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2l_2^2,$$

et

$$U_2 = m_1gl_1\frac{q_1^2}{2} + m_2gl_2\frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2,$$

où  $g \simeq 9.8m/s^2$  et l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre. Les matrices  $A$  et  $B$  s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} m_1l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} gm_1l_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & gm_2l_2 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique,  $\det(B - \lambda A) = 0$  donne la relation suivante

$$a\lambda^2 - (b_0 + b_1\alpha)\lambda + (c_0 + c_1\alpha) = 0$$



dont les racines sont

$$\lambda_{2,1} = \frac{b_0 + b_1\alpha \pm \sqrt{(b_0 + b_1\alpha)^2 - 4a(c_0 + c_1\alpha)}}{2a}, \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= m_1 m_2 l_1^2 l_2^2, & b_0 &= g m_1 m_2 l_1 l_2 (l_1 + l_2) \\ c_0 &= g^2 m_1 m_2 l_1 l_2, & b_1 &= m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \\ c_1 &= g m_1 l_1 + g m_2 l_2. \end{aligned}$$

En **exercice**, il est possible de démontrer que

$$\Delta = (b_0 + b_1\alpha)^2 - 4a(c_0 + c_1\alpha) > 0,$$

et par conséquent,  $\lambda_{2,1} \in \mathbb{R}_+$  et  $\omega_{2,1} = \sqrt{\lambda_{2,1}} \in \mathbb{R}_+$  également. Nous définissons  $\lambda_1$  avec le signe  $-$  de la racine et  $\lambda_2$  avec le signe  $+$ . Avec ceci, pour  $\alpha = 0$ , limite dans laquelle l'action du ressort devient nulle et les pendules libres, nous obtenons  $\lambda_1 = \frac{g}{l_1}$  et  $\lambda_2 = \frac{g}{l_2}$ . Alors,  $\omega_{1,2}(\alpha = 0) = \sqrt{\frac{g}{l_{1,2}}}$ . Dans la limite  $\alpha \rightarrow \infty$ , nous avons  $\lambda_2(\alpha) \simeq \alpha(b_1/a) \rightarrow \infty$  (choix du signe positif dans (3.13)). Pour obtenir  $\lambda_1$ , nous développons la racine

$$\begin{aligned} \sqrt{(b_0 + b_1\alpha)^2 - 4a(c_0 + c_1\alpha)} &= \alpha b_1 \sqrt{1 + \frac{2b_0}{b_1\alpha} + \frac{b_0^2}{b_1^2\alpha^2} - \frac{4ac_1}{b_1^2\alpha} - \frac{4ac_0}{b_1^2\alpha^2}} \\ &= \alpha b_1 + b_0 - \frac{2ac_1}{b_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{b_0 + b_1\alpha - \left(b_1\alpha + b_0 - \frac{2ac_1}{b_1}\right)}{2a} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\ &= \frac{c_1}{b_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

que nous écrivons

$$\lambda_1(\infty) = \frac{c_1}{b_1} = g \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \omega_\infty^2. \quad (3.14)$$

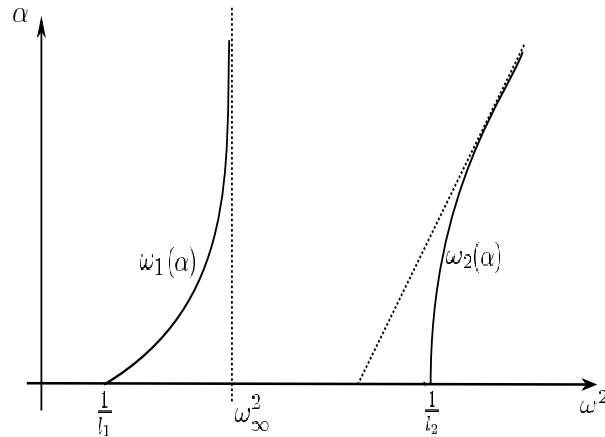


FIG. 3.1 – Comportement de  $\omega_{1,2}$  en fonction de  $\alpha$ . L'asymptote pour  $\omega_2(\alpha)$  a la pente  $\frac{b_1}{a}$ .

### 3.3 Comportement des fréquences caractéristiques

Nous considérons un système stable avec de petites oscillations,

$$T = \frac{1}{2}(A\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0, \quad U = \frac{1}{2}(B\mathbf{q}, \mathbf{q}) > 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \neq 0.$$

**Définition 3.3** Un système avec la même énergie cinétique et avec l'énergie potentielle  $U' = \frac{1}{2}(B'\mathbf{q}, \mathbf{q}) \geq 0$  est dit "plus rigide" que le système avec énergie potentielle  $U$  si  $U' \geq U \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 3.4** Un premier système plus rigide qu'un second possède des fréquences plus élevés que ce dernier. Soient  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$  les fréquences caractéristiques du système  $L = T - U$ , et  $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_n$  celles du système  $L' = T - U'$ . Si  $U'$  est plus rigide, alors  $\omega_1 \leq \omega'_1, \omega_2 \leq \omega'_2, \dots, \omega_n \leq \omega'_n$ .

**Preuve 3.4** du théorème (3.4)

Nous considérons les ellipsoïdes  $E \subset \mathbb{R}^n$  et  $E' \subset \mathbb{R}^n$  définies par

$$E = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid (B\mathbf{q}, \mathbf{q}) \leq 1\}$$

et

$$E' = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid (B'\mathbf{q}, \mathbf{q}) \leq 1\}.$$

Comme  $U'(\mathbf{q}) > U(\mathbf{q}) \forall \mathbf{q}$ , la relation  $E' \subset E$  est satisfaite. Nous supposons que  $T = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ , i.e.  $A = \mathbb{1}$ , sans restriction de généralité. Alors, les axes

principaux  $\xi_1, \dots, \xi_n$  et  $\xi'_1, \dots, \xi'_n$  des ellipses sont les vecteurs propres de  $B$  et  $B'$  avec  $B\xi_i = \omega_i^2 \xi_i$  et  $B'\xi'_i = \omega_i'^2 \xi'_i$ . Les longueurs  $a_i$  des demi-axes principaux sont données par

$$\omega_i^2 a_i^2 = 1, \rightarrow a_i = \frac{1}{\omega_i}$$

et

$$\omega_i'^2 a_i'^2 = 1, \rightarrow a_i' = \frac{1}{\omega_i'}$$

avec  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  et  $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$ . Mais pour que  $E' \subset E$ , il faut que  $a'_1 \leq a_1, a'_2 \leq a_2, \dots, a'_n \leq a_n$ .

En effet, le plus petit demi-axe d'une ellipse obtenue par l'intersection de  $E$  avec un sous-espace  $A_k$  de dimension  $k$ , est plus petit ou égal à  $a_k$ . De même le plus petit demi-axe d'une ellipse obtenue par l'intersection de  $E'$  avec un sous-espace  $A_k$  de dimension  $k$ , est plus petit ou égal à  $a'_k$ . Ceci est une conséquence des inégalités suivantes :

$$a'_k = \max_{\{A_k \subset \mathbb{R}^n\}} \min_{\mathbf{x} \in A_k \cap \partial E'} \|\mathbf{x}\| \leq \max_{\{A_k\}} \min_{\mathbf{x} \in A_k \cap \partial E} \|\mathbf{x}\| = a_k, \quad (3.15)$$

et donc,  $a'_k \leq a_k$ .  $\square$

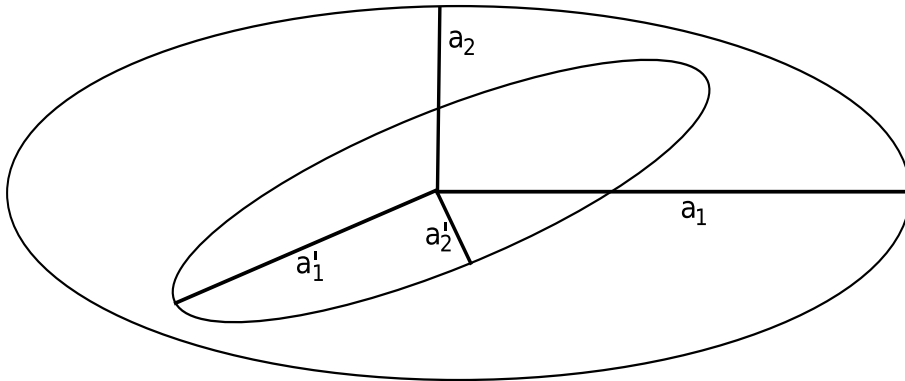


FIG. 3.2 – Les demi-axes de l'ellipse intérieure sont plus petits.

Nous nous intéressons maintenant au comportement des fréquences caractéristiques sous l'imposition de contraintes. Afin qu'un système linéaire reste linéaire sous imposition de certaines contraintes, il faut que les contraintes

soient linéaires. Le système est par conséquent forcé de rester dans un sous-espace linéaire de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  ce sous-espace (une contrainte linéaire) et soient

$$\omega_1 \leq \omega_2 \cdots \leq \omega_n$$

les fréquences caractéristiques du système original et

$$\omega'_1 \leq \omega'_2 \cdots \leq \omega'_{n-1}$$

les fréquences du système contraint.

**Théorème 3.5** *Les fréquences caractéristiques des systèmes original et contraint vérifient la relation suivante :*

$$\omega_1 \leq \omega'_1 \leq \omega_2 \cdots \leq \omega'_2 \cdots \leq \cdots \omega'_{n-1} \leq \omega_n. \quad (3.16)$$

Grâce à l'identification  $\omega_i^2 = \frac{1}{a_i^2}$ , ce théorème est équivalent au théorème suivant.

**Théorème 3.6** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  l'ellipse avec demi-axes principaux  $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$  et  $E'$  son intersection avec un sous-espace linéaire de dimension  $d = (n - 1)$ . Alors,  $E'$  est aussi une ellipse et les demi-axes principaux de  $E'$  appelés  $a'_1 \geq a'_2 \geq \cdots \geq a'_{n-1}$  satisfont les inégalités*

$$a_1 \geq a'_1 \geq a_2 \cdots \geq a'_2 \cdots \geq \cdots a'_{n-1} \geq a_n. \quad (3.17)$$

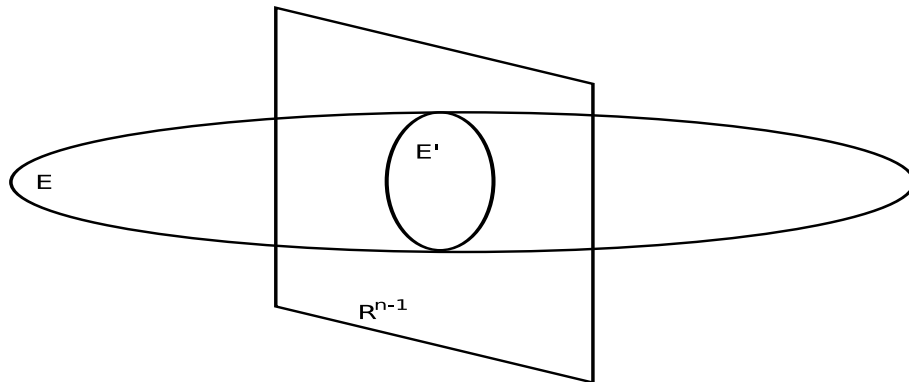


FIG. 3.3 – Contrainte linéaire

**Preuve 3.5** du théorème (3.6).

D'abord  $a'_k \leq a_k$  parce que

$$a_k = \max_{\{A_k \subset \mathbb{R}^n\}} \min_{\mathbf{x} \in A_k \cap \partial E} \|\mathbf{x}\|,$$

tandis que

$$a'_k = \max_{\{A_k \subset \mathbb{R}^{n-1}\}} \min_{\mathbf{x} \in A_k \cap \partial E} \|\mathbf{x}\|.$$

Alors, pour  $a_k$ , le maximum est défini sur un plus grand ensemble de sous-espaces  $A_k$  que ce n'est le cas pour  $a'_k$ . Pour démontrer  $a'_k \geq a_{k+1}$ , nous prenons  $A_{k+1} \subset \mathbb{R}^n$  et posons  $A'_k = A_{k+1} \cap \mathbb{R}^{n-1}$ . La dimension de  $A'_k$  est  $\geq k$ . Donc

donné nous qui devient  $A_k$  sous intersection avec  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Comme  $A_k \subset A_{k+1}$  et donc  $E \cap A_{k+1} \supset E \cap A_k$ , le plus petit demi-axe de l'ellipsoïde  $E \cap A_{k+1}$  est plus grand ou égal à celle de  $E \cap A_k$  :

$$\begin{aligned} a'_k &= \max_{\{A_k \subset \mathbb{R}^{n-1}\}} \min_{\mathbf{x} \in A_k \cap \partial E'} \|\mathbf{x}\| \geq \max_{\{A_{k+1} \subset \mathbb{R}^n\}} \min_{\mathbf{x} \in A'_k \cap \partial E'} \|\mathbf{x}\| \\ &\geq \max_{\{A_{k+1} \subset \mathbb{R}^n\}} \min_{\mathbf{x} \in A_{k+1} \cap \partial E} \|\mathbf{x}\| = a_{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration des équations de la section 3.3. Nous proposons encore l'**exercice** consistant à montrer qu'une augmentation de l'énergie cinétique, pour un potentiel  $U$  fixé, a pour effet de réduire les fréquences caractéristiques. Il s'agit d'un fait bien connu pour le pendule pour lequel nous avons  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ . Si on augmente la masse et réduit la longueur telles que  $ml = \text{constante}$ , l'énergie cinétique est augmentée (comme  $l$ ) mais l'énergie potentielle reste constante. Comme  $\omega \propto 1/l$  est indépendante de la masse, la fréquence augmente aussi.

### 3.4 Résonance paramétrique

Si les paramètres d'un système varient de façon périodique avec le temps, une position d'équilibre qui est stable pour toutes les valeurs fixées des paramètres peut devenir instable. C'est ce phénomène de résonance qui permet à la balançoire de fonctionner si bien.

**Exemple 1** Un enfant sur une balançoire qui étend puis replie ses jambes périodiquement correspond à un pendule mathématique de longueur variable  $l(t + T) = l(t)$ , avec  $T$  la période du système.

**Exemple 2** Un pendule dans un champ gravitationnel qui varie périodiquement, à cause de la présence de la lune par exemple, correspond au système

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2(t) \mathbf{q}, \quad \omega(t+T) = \omega(t),$$

avec  $T$  la période du système.

**Exemple 3** Un pendule avec un point d'attache et qui oscille vericalement satisfait également l'équation précédente.

En général, nous considérons un système dynamique de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad f(\mathbf{x}, t+T) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.18)$$

Soit  $g_t$  le flot de (3.18), c'est-à-dire

$$g_t \mathbf{x} := \gamma_{\mathbf{x}}(t),$$

où  $\gamma_{\mathbf{x}}(t)$  est la solution de (3.18) avec la condition initiale  $\gamma_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$ . Comme  $f(\mathbf{x}, t)$  dépend du temps, les applications  $g_t$  ne forment pas un groupe,  $g_t \circ g_s \neq g_{t+s} \neq g_s \circ g_t$ . Mais il est évident que  $g_T \circ g_s = g_{T+s} = g_s \circ g_T$ , et en particulier,  $(g_T)^n = g_{nT}$ . Par conséquent, les applications  $g_{nT}$  forment un groupe,  $n \in \mathbb{Z}$ .

L'application

$$\begin{aligned} A := g_T : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} = \gamma_{\mathbf{x}}(0) &\mapsto \gamma_{\mathbf{x}}(T) \end{aligned}$$

est appelée application de Poincaré.

**Théorème 3.7** 1. Le point  $\mathbf{x}_0$  est un point fixe de  $A$ ,  $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$  si et seulement si la solution  $\mathbf{x}(t)$  avec condition initiale  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  est périodique de période  $T$ .

2. La solution périodique  $\mathbf{x}(t)$  est stable dans le sens de Liapunov ou asymptotiquement si et seulement si  $A$  est stable dans le sens de Liapunov ou asymptotiquement.

3. Si le système (3.18) est linéaire, alors l'application  $A$  est linéaire.

4. Si le système (3.18) est hamiltonien, l'application  $A$  préserve le volume,  $|\det(T_{\mathbf{x}}A)| = 1$ .

Nous faisons remarquer que la stabilité d'une application  $A$  se réfère à son itération :  $A$  est "Liapunov-stable" si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que pour  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ , la condition  $\|A^n \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$  est satisfaite  $\forall n \geq 0$ .  $A$  est asymptotiquement stable si  $\forall \epsilon > 0, \exists n$  tel que  $\|A^n \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \epsilon, \forall n \geq N$  et  $\mathbf{x}$  dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$ .

Les énoncés du théorème précédent sont de simples conséquences des définitions. Nous n'en donnons par conséquent pas de preuve formelle.

**Corollaire 3.3** *Nous considérons*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1, \quad \omega(t+T) = \omega(t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Le système est linéaire et hamiltonien.  $A$  est donc linéaire et  $\det(A) = 1$ . La solution triviale  $(x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$  de (3.19) est stable si et seulement si  $A$  est stable.

**Théorème 3.8** *Soit  $A$  la matrice d'une application linéaire du plan. Cette application préserve l'aire,  $\det(A) = 1$ . Alors l'application  $A$  est stable si  $|\operatorname{tr}A| \leq 2$  et instable si  $|\operatorname{tr}A| > 2$ .*

**Preuve 3.6** *du théorème (3.8).*

Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ . Alors,

$$\lambda^2 - (\operatorname{tr}A)\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

donc  $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}A$  et  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ . De plus,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\operatorname{tr}A)^2 - 4,$$

donc  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  si  $\Delta \geq 0 \rightarrow |\operatorname{tr}A| \geq 2$ . Si  $\Delta = 0$ , les solutions sont  $\lambda_i = 1$  et  $A = \mathbb{I}$ .

Si  $|\operatorname{tr}A| > 2$ ,  $\lambda_1 < 1$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} > 1$ . L'application  $A$  est donc instable dans la direction du vecteur propre pour  $\lambda_2$ .

Si  $|\operatorname{tr}A| < 2$ , les solutions  $\lambda_{1,2}$  sont conjuguées complexes  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  et  $\lambda_1\bar{\lambda}_1 = 1$ . Donc,  $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\alpha)$ .  $A$  est alors une rotation d'angle  $\alpha$ ,  $\operatorname{tr}A = 2 \cos \alpha$ .

□

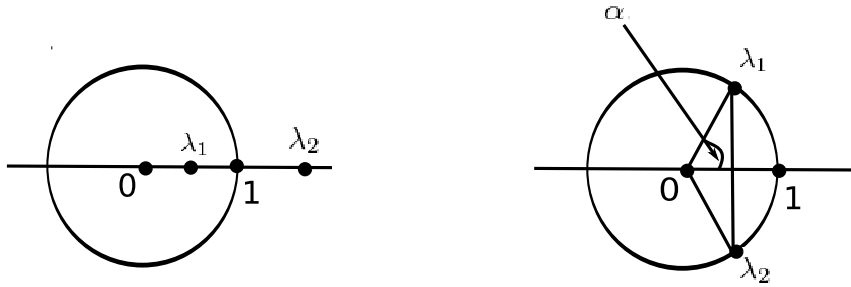


FIG. 3.4 – La figure de gauche illustre le cas  $|\text{tr}A| > 2$  et celle de droite la cas  $|\text{tr}A| < 2$ .

La discussion de la stabilité de la solution triviale de (3.19) est alors réduite au calcul de la trace de  $A$ . En général, ceci doit être fait de façon numérique. Nous définissons maintenant le concept de "stabilité forte".

**Définition 3.4** *La solution triviale d'un système hamiltonien linéaire est appelée "fortement stable", si elle est stable et la solution de tout système hamiltonien suffisamment proche est stable. Ici, nous définissons la distance  $d$  entre deux systèmes de période  $T$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = B_1 \mathbf{x}$  et  $\dot{\mathbf{x}} = B_2 \mathbf{x}$  comme  $d = \max_{t \in [0, T]} \|B_1(t) - B_2(t)\|$ .*

Le théorème précédent implique le corollaire suivant :

**Corollaire 3.4** *Si  $|\text{tr}A| < 2$  pour un système de dimension 2, hamiltonien et linéaire, alors la solution triviale est fortement stable.*

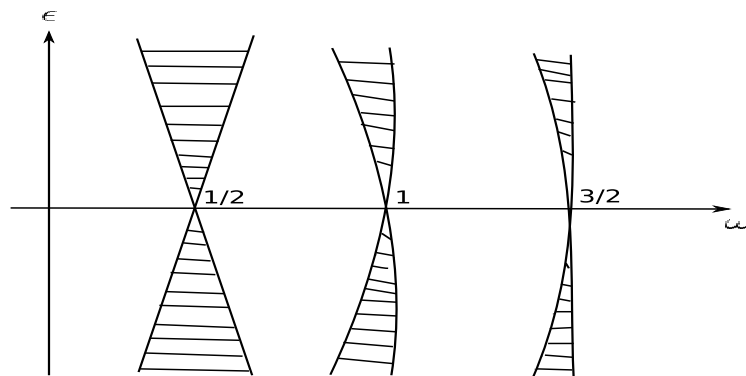
Appliquons le corollaire précédent au système suivant

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 (1 + \epsilon a(t)) \mathbf{x}, \quad (3.20)$$

avec  $\epsilon \ll 1$  et  $a(t) = a(t + 2\pi)$ ,  $|a(t)| \leq 1$ . Par exemple  $a(t) = \cos(t)$ . Dans ce cas, (3.20) est l'équation de Mathieu.

Nous représentons un système de la forme du système (3.20) par un point dans le plan  $(\omega, \epsilon)$ ,  $\omega, \epsilon > 0$ . Les systèmes stables avec  $|\text{tr}A| < 2$  forment un ouvert dans le plan. La borne de stabilité est donnée par l'égalité  $|\text{tr}A| = 2$ . De même pour les systèmes instables avec  $|\text{tr}A| > 2$  qui forment également un ouvert dans le plan  $(\omega, \epsilon)$ .





**Théorème 3.9** *Tous les points sur l'axe  $\omega$  du système (3.20) excepté les demi-entiers,  $\omega = \frac{k}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , correspondent à des systèmes stables. En d'autres termes, faire fonctionner une balançoire avec de petits changements de longueur est possible seulement au voisinage des fréquences  $\omega = \frac{k}{2}$  pour  $T = 2\pi$ , résultat connu expérimentalement par tous les enfants.*

**Preuve 3.7** *du théorème (3.9) La preuve du théorème se base sur la solution de (3.20) avec  $\epsilon = 0$ . Dans ce cas,*

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

*La solution avec les conditions initiales*

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{est} \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

*et celle avec les conditions initiales*

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{est} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

*Donc,*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega) & \frac{1}{\omega} \sin(2\pi\omega) \\ -\omega \sin(2\pi\omega) & \cos(2\pi\omega) \end{pmatrix},$$

*avec  $|\text{tr}A| = |2 \cos(2\pi\omega)| < 2$  pour  $\omega \neq \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$ , et le théorème suit.  $\square$ .*

Pour  $\omega \simeq \frac{k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , la position d'équilibre de la balançoire devient instable, et ceci même sous des changements arbitrairement petits de la longueur. Ce phénomène est appelé **résonance paramétrique**. Si la fréquence de la perturbation  $a(t)$  est  $\nu$  (dans (3.20)), et la condition de résonance devient  $\frac{\omega}{\nu} \simeq \frac{k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Normalement, la résonance  $k = 1$  est la plus forte et les enfants étendent et replient leurs jambes avec fréquence  $\nu = 2\omega = 2\sqrt{\frac{g}{L}}$ , avec  $L$  la longueur de la balançoire.

# Chapitre 4

## Corps rigide, la toupie.

### 4.1 Mouvement par rapport à un système de coordonnées mobiles

Si nous voulons discuter le mouvement d'un corps rigide et surtout sa rotation, nous nous référons souvent à un système de coordonnées fixé sur ce corps, et non au système de coordonnées par rapport auquel l'objet est en mouvement (le laboratoire par exemple). Dans ce contexte, le **principe d'inertie** veut qu'un point matériel sur lequel agissent des forces dont la somme est nulle reste au repos ou garde son mouvement rectiligne uniforme. Un **référentiel galiléen** obéit au principe d'inertie, et l'accélération reste la même dans tout référentiel galiléen. Cette approche n'est plus valable dans des référentiels accélérés où apparaissent les forces d'inertie.

Comme nous le verrons, toutes les forces d'inertie sont proportionnelles à la masse. Ceci a conduit Einstein à penser que la gravitation pourrait être une sorte de force d'inertie, ce qui le mena à développer la théorie de la Relativité Générale.

Nous considérons un système lagrangien  $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  décrit par les coordonnées  $(\mathbf{q}, t)$ . Nous voulons le décrire dans les nouvelles coordonnées  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, t)$  en mouvement par rapport à  $\mathbf{q}$ .

**Théorème 4.1** *Si la trajectoire*

$$\gamma : \mathbf{q} = \phi(t) ,$$

*solution de l'équation lagrangienne*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$$

est écrite comme

$$\gamma : \mathbf{Q} = \Phi(t),$$

alors la fonction  $\Phi(t)$  est une solution des équations de Euler-Lagrange du lagrangien  $L'$  donné par

$$L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) = L(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, t), \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t), t). \quad (4.1)$$

**Preuve 4.1** du théorème (4.1)

La trajectoire  $\gamma$  est un extremum de l'action

$$\delta \int_{\gamma} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0,$$

et donc

$$\delta \int_{\gamma} L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) dt = 0.$$

$\Phi$  satisfait par conséquent les équations d'Euler-Lagrange pour le lagrangien  $L'$ .

**Définition 4.1** Soit maintenant  $k$  un système de coordonnées  $\mathbf{q}$  galiléen, et  $K$  un système de coordonnées en mouvement par rapport à  $k$  avec coordonnées  $\mathbf{Q}$ .  $K$  et  $k$  sont des espaces euclidiens orientés de dimension  $n$ . Un **mouvement** de  $K$  relativement à  $k$  est une application affine

$$D_t : K \mapsto k$$

qui dépend de  $t$  de façon lisse et qui préserve la métrique ainsi que l'orientation. Une application affine est de la forme

$$\mathbf{Q} \mapsto R_t \mathbf{Q} + \mathbf{r}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, t),$$

où  $R_t$  est une application linéaire et  $\mathbf{r}(t)$  est une translation. Il suit donc le théorème suivant :

**Théorème 4.2** Tout mouvement  $D_t$  peut être décomposé de façon unique en une rotation  $R_t$  et une translation  $\mathbf{r}(t)$ .

**Preuve 4.2** du théorème (4.2)

Nous voulons prouver que

$$D_t \mathbf{Q} = R_t \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}(t),$$

de façon unique. Alors, comme  $D_t$  doit préserver la métrique et l'orientation,  $R_t$  doit être une rotation,  $R_t \in SO(n)$ .  $\square$

Nous posons maintenant

$$\mathbf{q}(t) = R_t \mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (4.2)$$

et la dérivée par rapport au temps  $t$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = R_t \dot{\mathbf{Q}}(t) + \dot{R}_t \mathbf{Q}(t) + \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (4.3)$$

Nous considérons d'abord le cas spécial pour lequel la condition  $\dot{R}_t = 0$  est satisfaite, ce qui équivaut à un mouvement de translation. Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 4.3** Soient  $\dot{R}_t = 0$  et  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$ . Alors,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$  (addition des vitesses), avec  $\mathbf{v}' = R \dot{\mathbf{Q}}$ .

(Ce théorème est just un conséquence de (4.3) avec  $\dot{R}_t = 0$ .)

Nous considérons maintenant le cas de rotation avec  $\dot{\mathbf{r}} = 0$ . Si le point  $\mathbf{Q}$  est au repos,  $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ , nous parlons alors de rotation transférée du point  $\mathbf{q}(t)$ .

**Exemple** Nous considérons une rotation avec vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe  $\mathbf{e}$  fixé dans un espace à  $n = 3$  dimensions. Comme nous l'avons déjà vu, dans un tel cas,

$$R_t \mathbf{Q} = \sin(\alpha) \mathbf{e} \wedge \mathbf{Q} - \cos(\alpha) \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}) + \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{q}(t). \quad (4.4)$$

Pour un axe  $\mathbf{e}$  fixe et une vitesse angulaire  $\omega$ , nous avons

$$\dot{\alpha} = \omega \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{e}} = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \dot{R}_t \mathbf{Q} = \omega \cos(\alpha) \mathbf{e} \wedge \mathbf{Q} + \omega \sin(\alpha) \mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}) \\ &= \omega \mathbf{e} \wedge \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour la dernière égalité, nous observons d'abord que  $\mathbf{e} \wedge \mathbf{e} = 0$ . En employant (4.4), il reste alors à démontrer que

$$\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q})) = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}. \quad (4.6)$$

D'abord, il est clair que si  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{Q}$  sont parallèles, l'égalité est vérifiée. Dans les autres cas,  $\mathbf{Q}$  peut être décomposé en une partie parallèle et une partie normale à  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_\perp + \mathbf{Q}_\parallel$  avec  $\mathbf{Q}_\perp \neq 0$  et seul la partie  $\mathbf{Q}_\perp$  contribue dans (4.6). Il reste alors à démontrer que

$$\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}_\perp)) = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}_\perp. \quad (4.7)$$

Pour ceci nous observons que les vecteurs suivants

$$\left\{ \mathbf{e}, \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}_\perp}{|\mathbf{Q}_\perp|}, \frac{\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}_\perp)}{|\mathbf{Q}_\perp|} \right\}$$

forment un système orthonormé et nous définissons

$$\mathbf{e} =: \mathbf{v}_1, \quad \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}_\perp}{|\mathbf{Q}_\perp|} =: \mathbf{v}_2, \quad \frac{\mathbf{e} \wedge (\mathbf{e} \wedge \mathbf{Q}_\perp)}{|\mathbf{Q}_\perp|} =: \mathbf{v}_3.$$

Alors,  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_2$ , et la relation (4.7) est démontrée.

Nous posons maintenant  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$  de façon à ce que  $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}$ . Dans le cas général,  $\alpha(t)$  et  $\mathbf{e}(t)$ , ce dernier produit vectoriel reste valable avec une vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}(t)$  instantanée. Aux termes  $\propto \dot{\alpha}$ , s'ajoutent des termes comprenant  $\dot{\mathbf{e}}$ . Il est possible de trouver  $\boldsymbol{\omega}(t)$  à partir de (4.4), mais il est plus simple de procéder de façon abstraite. Comme  $R_t$  est une matrice orthogonale  $R_t R_t^T = \mathbb{1}$ , et donc

$$\dot{R}_t R_t^T + R_t \dot{R}_t^T = \dot{R}_t R_t^T + \left( \dot{R}_t R_t^T \right)^T = 0.$$

Par conséquent,

$$\dot{R}_t \mathbf{Q} = \dot{R}_t R_t^{-1} \mathbf{q} = \dot{R}_t R_t^T \mathbf{q} = A \mathbf{q},$$

avec  $A + A^T = 0$ ,  $A$  est antisymétrique. En 3 dimensions, l'espace des matrices antisymétriques est tridimensionnel et nous pouvons écrire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

de manière à ce que

$$A\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q} \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T, \quad (4.9)$$

ce qui démontre le théorème suivant.

**Théorème 4.4** *Pour tout moment  $t$ , il existe un vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t) \in k$  tel que la vitesse transférée d'un système en rotation est donnée par*

$$\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{q} \in k, \quad (4.10)$$

$\boldsymbol{\omega}(t)$  est la vitesse angulaire instantanée.

Cette démonstration montre aussi que la vitesse angulaire n'est en effet pas un vecteur, mais une matrice  $3 \times 3$  antisymétrique. Ce n'est qu'en dimension  $n = 3$  qu'il est possible d'adopter la représentation vectorielle. Pour un mouvement purement rotationnel,  $\mathbf{r} = 0$ , nous avons alors

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \dot{R}\mathbf{Q} + R\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q} + \mathbf{v}'. \quad (4.11)$$

**Théorème 4.5** *Un système  $K$  en mouvement (translation et rotation) par rapport à  $k$  est décrit par une relation entre les vitesses :*

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= R_t\mathbf{Q} + \mathbf{r}(t) \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec  $\mathbf{v}' = R_t\dot{\mathbf{Q}}$ ,  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$  et  $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$ .

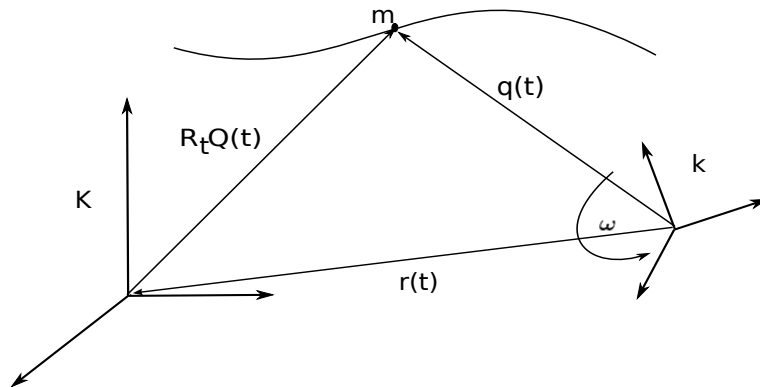


FIG. 4.1 – Addition des positions pour des référentiels en mouvement relatif.

**Preuve 4.3** *du théorème (4.5)*

Pour prouver le théorème précédent, nous considérons d'abord le système  $K_1$  qui tourne par rapport à  $K$ , de même origine, mais sans translation. Donc, à partir de (4.11),

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{Q}}_1 = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{Q}_1 + \mathbf{v}'.$$

Mais  $K_1$  décrit un pur mouvement de translation par rapport à  $k$ , donc  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{r}$ . Alors,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r}) + \mathbf{v}_0. \quad \square \quad (4.13)$$

## 4.2 Forces d'inertie

**Théorème 4.6** *Dans tout système  $K$  en mouvement de translation par rapport à un système d'inertie  $k$ , le mouvement d'un système mécanique est semblable à celui d'un système mécanique dans un système d'inertie avec force d'inertie*

$$\mathbf{F}_i = -m\ddot{\mathbf{r}}$$

ajoutée à la force résultante. Ici,  $\ddot{\mathbf{r}}$  est l'accélération du système  $K$ .

**Preuve 4.4** *du théorème (4.6)*

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{r},$$

donc

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = m\ddot{\mathbf{q}} - m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_i. \quad (4.14)$$

Un mouvement de translation est donc équivalent à l'ajout d'un champs de force homogène  $\mathbf{F}_i = -m\ddot{\mathbf{r}}$ .  $\square$

**Exemple 1** Une fusée dans sa phase de lancement est accélérée vers le haut avec une accélération  $\ddot{\mathbf{r}} > 0$ . La force de gravité vers le centre de la Terre mesuré par une physicienne à bord de la fusée est alors  $-m(\mathbf{g} + \ddot{\mathbf{r}})$ , donc plus importante que pour les gens qui assistent au lancement par terre.

**Exemple 2** Une physicienne en chute libre est accélérée avec  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ . Si elle fait **localement** des mesures de la gravité, ses résultats pour la force seront  $\mathbf{F} = m(\mathbf{g} - \ddot{\mathbf{r}}) = 0$ , comme une personne qui serait dans une espace dépourvu de gravitation. Par conséquent, la chute libre et l'absence de gravitation ne peuvent pas être distinguées localement. Ces idées jouèrent un rôle très importants pour Einstein dans son développement de la Relativité Générale.

**Exemple 3** Si le point de suspension d'un pendule est en mouvement vertical avec accélération  $\ddot{\mathbf{r}}(t)$  vers le haut, alors le pendule bouge comme si il était dans un champs gravitationnel variable  $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{r}}(t)$ .

### 4.2.1 Systèmes en rotation

Soit

$$\begin{aligned} R_t : K &\mapsto k \\ \mathbf{Q} &\mapsto R_t \mathbf{Q} = \mathbf{q} \end{aligned}$$

une rotation. Le vecteur de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  dans le système  $k$  est défini comme précédemment et nous posons

$$\boldsymbol{\Omega} = R_t^{-1} \boldsymbol{\omega}, \quad (4.15)$$

le vecteur de rotation dans le système  $K$ . Dans le système d'inertie  $k$ ,  $\mathbf{q}$  est soumis à une force  $f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$m\ddot{\mathbf{q}} = f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

**Théorème 4.7** *En plus de la force  $\mathbf{F} = R_t^{-1} \mathbf{f}$ , le mouvement dans un système en rotation est soumis à trois forces d'inertie*

1. La force d'inertie de rotation :  $-m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q}$ .
2. La force de Coriolis :  $-2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}$ .
3. La force centrifuge :  $-m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ .

Par conséquent,

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) \quad (4.16)$$



avec  $R_t \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \mathbf{f}(R_t \mathbf{Q}, R_t \dot{\mathbf{Q}} + \dot{R}_t \mathbf{Q})$ . La force centrifuge est toujours dirigée radialement vers l'extérieur de l'axe de rotation, et agit même si  $\dot{\mathbf{Q}} = 0$ . Par contre, la force de Coriolis n'agit que sur un point en mouvement,  $\dot{\mathbf{Q}} \neq 0$ .

En **exercice**, on démontrera que dans l'hémisphère nord, la force de Coriolis dévie tout point qui bouge le long de la Terre vers sa droite, et que tout point se dirigeant verticalement vers le haut est dévié vers l'ouest.

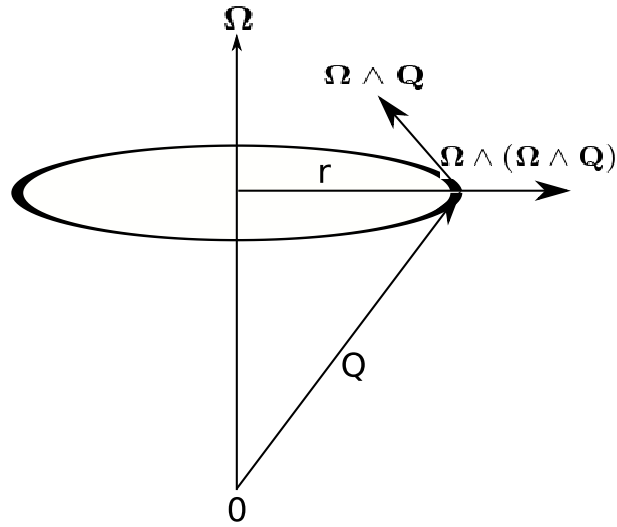


FIG. 4.2 – Force centrifuge d'inertie.

**Preuve 4.5** du théorème (4.7)

Pour  $\mathbf{X} \in K$ , nous avons

$$\begin{aligned} \dot{R}_t \mathbf{X} &= \boldsymbol{\omega} \wedge R_t \mathbf{X} = R_t \boldsymbol{\Omega} \wedge R_t \mathbf{X} \\ &= R_t (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X}). \end{aligned}$$

La dernière équation suit du fait que la rotation  $R_t$  conserve longueurs et angles, et par conséquent le produit vectoriel également. Alors,

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{R}_t \mathbf{Q} + R_t \dot{\mathbf{Q}} = R_t (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}})$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \dot{R}_t (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}) + R_t (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} + \ddot{\mathbf{Q}}) \\ &= R_t (\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} + \ddot{\mathbf{Q}}) \\ &= R_t (\ddot{\mathbf{Q}} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})). \quad \square \end{aligned}$$

Nous discutons maintenant brièvement l'effet du mouvement de la Terre sur des expériences terrestres. La rotation de la Terre est presque uniforme, de telle sorte qu'il est possible de négliger  $\dot{\Omega}$ . L'accélération centrifuge atteint sa plus grande valeur à l'équateur, et elle y vaut :

$$\begin{aligned} |\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{Q})| &= \Omega^2 R_{\oplus} \\ &\simeq (7.3 \times 10^{-5})^2 6.4 \times 10^6 \frac{m}{s^2} \simeq 0.03 \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

Ceci correspond à environ 3‰ de l'accélération gravitationnelle,  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ . Dans un laboratoire, cette quantité n'a pas un très grand effet, et la dépendance la plus importante provient de la force de Coriolis :

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{g} + 2\dot{\mathbf{Q}} \wedge \Omega$$

avec  $|\Omega| \simeq 7.3 \times 10^{-5} s^{-1}$  et  $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ . Pour une vitesse de  $|\dot{\mathbf{Q}}| \simeq 10^4 \frac{m}{s} \simeq 3000 \frac{km}{h}$ , la force de Coriolis est du même ordre de grandeur que la force gravitationnelle.

### 4.2.2 Le pendule de Foucault

Nous considérons de petites oscillations d'un pendule idéal sur Terre. Nous tenons compte de la force de Coriolis. Le pendule est positionné verticalement (axe  $z$ ) à une latitude  $\lambda_0$ .

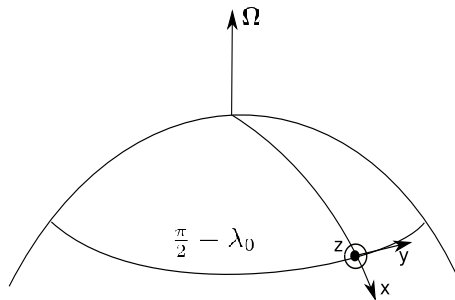


FIG. 4.3 – Pendule de Foucault

Nous ne nous intéressons que au mouvement dans le plan  $(x, y)$  qui est indépendant de celui en direction  $\mathbf{e}_z$  que nous négligeons. La force de Coriolis est :

$$\mathbf{F}_c = 2m\dot{\mathbf{Q}} \wedge \Omega = 2m\Omega_z (y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y),$$

avec  $\Omega_z = |\mathbf{\Omega}| \sin(\lambda_0) = \Omega \sin(\lambda_0)$ . Pour un pendule de fréquence propre  $\omega$ ,  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ , avec  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $l$  la longueur du pendule, nous obtenons les équations de mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega^2 x + 2\Omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y - 2\Omega_z \dot{x}.\end{aligned}\quad (4.17)$$

Nous écrivons (4.17) au moyen de la variable complexe  $u = x + iy$ ,  $\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y}$ ,  $\ddot{u} = \ddot{x} + i\ddot{y}$ , et nous avons

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= -\omega^2 u + 2\Omega_z (\dot{y} - i\dot{x}) \\ &= -\omega^2 u - 2i\Omega_z \dot{u}.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Nous faisons alors l'Ansatz  $u = e^{i\lambda t}$  que nous introduisons dans l'équation différentielle précédente. Cette équation devient alors

$$-\lambda^2 = -\omega^2 + 2\lambda\Omega_z,$$

équation algébrique du second degré admettant les deux solutions suivantes

$$\lambda_{\pm} = -\Omega_z \pm \sqrt{\Omega_z^2 + \omega^2}.$$

Pour des valeurs réalistes  $\omega \gg \Omega_z$ , nous développons au premier ordre en  $\Omega_z$ ,

$$\lambda_{\pm} \simeq -\Omega_z \pm \omega.$$

La solution générale (au premier ordre en  $\frac{\Omega_z}{\omega}$ ) est alors

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{-i\Omega_z t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \\ \dot{u}(t) &= i e^{-i\Omega_z t} (c_1 (\omega - \Omega_z) e^{i\omega t} - c_2 (\omega + \Omega_z) e^{-i\omega t}).\end{aligned}$$

Nous admettons les conditions initiales  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ , ce qui permet de fixer les constantes  $c_1$  et  $c_2$  :  $c_1 + c_2 \in \mathbb{R}$  et  $i[c_1(\omega - \Omega_z) - c_2(\omega + \Omega_z)] \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}c_1 &= a + ib \\ c_2 &= a \frac{\omega - \Omega_z}{\omega + \Omega_z} - ib \simeq a \left(1 - 2\frac{\Omega_z}{\omega}\right) - ib.\end{aligned}$$

Après un aller-retour du pendule, une période s'est écoulée et nous nous situons au temps  $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Nous avons

$$u(T) = e^{-2\pi i \frac{\Omega_z}{\omega}} (c_1 + c_2) = e^{-2\pi i \frac{\Omega_z}{\omega}} x(0),$$

puisque les parties imaginaires des deux constantes s'annulent, et donc il ne reste plus que la partie réelle de  $u(0)$ ,  $\text{Re}(u(0)) = x(0)$ . Les deux solutions indépendantes après une période sont ainsi

$$\begin{aligned} x(T) &= \cos\left(2\pi \frac{\Omega_z}{\omega}\right) x(0) \\ y(T) &= -\sin\left(2\pi \frac{\Omega_z}{\omega}\right) x(0). \end{aligned}$$

Le pendule a donc accompli une rotation d'angle

$$\alpha(T) = \Omega_z T = \frac{2\pi \Omega_z}{\omega}. \quad (4.19)$$

Au pôle nord,  $\Omega_z = 2\pi \frac{1}{\text{jour}}$ , et par conséquent, le pendule fait un tour par jour. A une certaine latitude  $\lambda_0$ , nous avons  $\Omega_z = 2\pi \sin(\lambda_0) \frac{1}{\text{jour}}$ , et le pendule parcourt une fraction de tour de  $r = \sin(\lambda_0)$  par jour. A Genève, la latitude est de  $\lambda_0 = 46^\circ 12'$ , et donc  $\sin(\lambda_0) = r = 0.72$ .

### 4.3 Corps rigides, la toupie

**Définition 4.2** *Un corps rigide est un système de masses  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  ponctuelles soumis aux contraintes holonomes*

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = r_{ij} = \text{constante}.$$

**Théorème 4.8** *L'espace des configurations d'un corps rigide est de dimension  $d = 6$  et est donné par  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$  (translations  $\times$  rotations).*

**Preuve 4.6** *du théorème (4.8)*

*Nous supposons que le corps n'est pas linéaire (s'il l'était, le théorème ne serait pas valable). Nous choisissons trois points  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  sur le corps de telle manière à ce qu'ils ne soient pas alignés sur une droite. Nous considérons le système droit orthonormé donné par*

$$\{\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}, \quad (4.20)$$

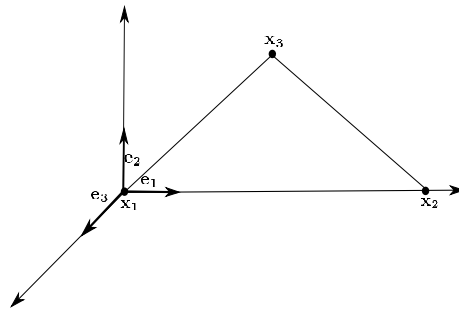


FIG. 4.4 – Corps rigide

avec  $\mathbf{e}_3$  la normale au plan engendré par  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ .

Comme  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| = r_{ij}$  est fixé, toutes les positions du corps sont fixées si les vecteurs  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  sont connus. La configuration du corps est donc entièrement déterminée si les vecteurs  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  le sont. Finalement, une translation de  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  amène  $\mathbf{x}_1$  à l'origine et une rotation change le référentiel  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  en  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ .  $\square$

**Définition 4.3** Un corps rigide avec un point fixe  $\mathbf{x}_1(t) = 0$  est appelé une toupie.

L'espace des configurations de la toupie est évidemment  $SO(3)$ .

Nous considérons maintenant les lois de conservation pour un corps rigide libre. Nous supposons que le corps rigide n'est soumis à aucune force, sauf les contraintes. Le système est alors invariant sous translation globale. D'après le théorème de Noether, il existe alors trois intégrales premières, qui sont les trois composantes du vecteur impulsion,

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{Q}}_i = \text{constante.}$$

Nous posons  $M = \sum_i m_i$  et

$$\mathbf{X} := \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{Q}_i,$$

le centre de masse. Le centre de masse ne se situe pas nécessairement sur le corps lui-même. Dans le cas d'une coquille, par exemple, il est à l'intérieur du corps. Nous avons donc

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{1}{M} \mathbf{P} = \mathbf{V}_0 = \text{constante,}$$

et

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}_0 t + \mathbf{X}_0.$$

Il en suit le théorème suivant :

**Théorème 4.9** *Le centre de masse d'un corps rigide libre se meut de façon uniforme et non-accélérée.*

Si de plus, nous prenons comme référentiel le système de coordonnées  $\mathbf{X}(t) = 0$ , nous obtenons le corollaire suivant :

**Corollaire 4.1** *Un corps rigide libre tourne autour de son centre de masse comme si celui-ci était fixé à  $\mathbf{X} = 0$ .*

Ainsi, avec ce qui précède, le problème du corps rigide s'est réduit au mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe 0. Nous étudions maintenant ce problème dans les détails, et nous ne demandons pas que ce point fixe soit le centre de masse. L'espace des configurations est alors  $SO(3)$  et

$$L : TSO(3) \mapsto \mathbb{R}$$

le lagrangien donné par l'énergie cinétique est invariant sous rotation et translation dans le temps. D'après le théorème de Noether, ceci implique l'existence de quatre intégrales premières correspondant aux trois composantes du moment cinétique  $\mathbf{m}$  et à l'énergie  $E$  conservée.

**Théorème 4.10** *Le problème d'un corps rigide avec point fixe 0 en absence de forces (la toupie libre) possède quatre intégrales premières,  $\mathbf{m}$  et  $E$ .*

La position et la vitesse du corps sont déterminées par un point dans l'espace à  $d = 6$  dimensions  $TSO(3)$ . Dans le cas général pour lequel le corps ne possède pas de symétrie, les différentes fonctions  $m_x, m_y, m_z$  et  $E$  sont indépendantes. Les équations

$$m_x = C_1, \quad m_y = C_2, \quad m_z = C_3, \quad E = C_4,$$

donnent lieu à un sous-espace à  $d = 2$  dimensions

$$V_C = V(C_1, C_2, C_3, C_4) \subset TSO(3).$$

Comme les vitesses angulaires sont limitées par  $E = C_4$  ( $E$  est une forme quadratique positive définie dans les vitesses angulaires),  $V_C$  est compact.

Pour  $C_i$  fixé, la trajectoire de la toupie est confinée sur  $V_C$  qui admet alors un champs vectoriel tangent à ce mouvement. Si  $E = C_4 > 0$ , la toupie ne peut pas s'arrêter, et donc ce champs vectoriel ne peut pas avoir des points singuliers qui sont des points sur  $V_C$  pour lesquels le champs s'annule. De plus,  $TSO(3)$  est orientable. Les variétés à  $d = 2$  dimensions compactes, connexes et orientables sont toutes connues. Ce sont des tores à  $n$  trous.

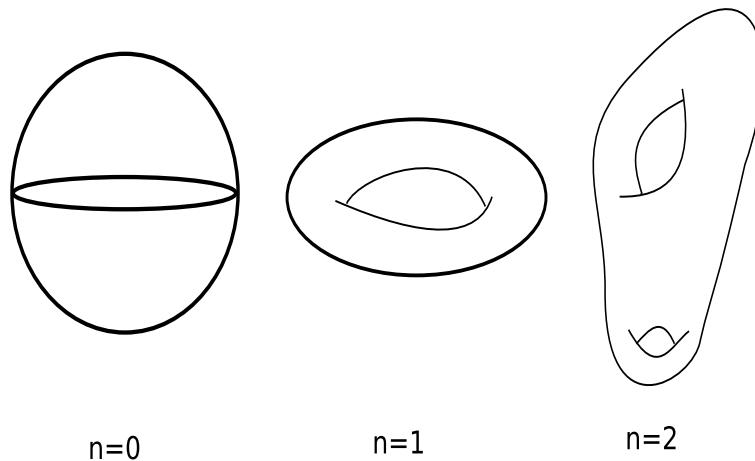


FIG. 4.5 – Variétés à  $d = 2$  dimensions et  $n = 0, 1, 2$  tuyau(x).

La seule de ces variétés qui admet un champs vectoriel sans point singulier est le tore simple avec  $n = 1$ .  $V_C$  est donc un ou plusieurs tore(s). Nous verrons plus tard qu'il est possible de choisir des coordonnées  $(\phi_1, \phi_2) \pmod{2\pi}$  sur  $V_C$  telles que les équations de mouvement deviennent

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1(C_1, C_2, C_3, C_4), \quad \text{et} \quad \dot{\phi}_2 = \omega_2(C_1, C_2, C_3, C_4). \quad (4.21)$$

Si  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ , ceci implique que la toupie ne retourne jamais dans son état initial. En général, une toupie libre accomplit une superposition de deux mouvements périodiques. Les fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dépendent des constantes  $C_i$  qui sont elles-mêmes fixées par les conditions initiales.

Après cette analyse qualitative, nous passons maintenant à l'étude quantitative du problème. Pour ce faire, nous adoptons les conventions d'écriture suivantes :

Soit  $O$  le point fixe,  $k$  un système de coordonnées stationnaires et  $K$  un système de coordonnées tournant avec la toupie. Soit encore

$$\begin{aligned} R_t : K &\mapsto k \\ \mathbf{Q} &\mapsto R_t \mathbf{Q} = \mathbf{q} \end{aligned} \quad (4.22)$$

la rotation qui lie les deux systèmes. Nous posons :

- $\mathbf{q} \in k$  le vecteur qui lie un point dans  $k$  à  $O$ .
- $\mathbf{Q} \in K$  le vecteur qui lie un point dans  $K$  à  $O$ .
- $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in Tk$  le vecteur vitesse.
- $\mathbf{V} \in TK$  le vecteur vitesse avec  $\mathbf{V} = R_t^{-1} \mathbf{v}$ .
- $\boldsymbol{\omega}$  la vitesse angulaire instantanée dans  $k$ .
- $\boldsymbol{\Omega} = R_t^{-1} \boldsymbol{\omega}$  la vitesse angulaire dans  $K$ .
- $\mathbf{m}$  le moment cinétique dans  $k$ .
- $\mathbf{M} = R_t^{-1} \mathbf{m}$  le moment cinétique dans  $K$ .

La rotation  $R_t$  préserve le produit scalaire et le produit vectoriel :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{q} \wedge m\mathbf{v} = m\mathbf{q} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{M} = m\mathbf{Q} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}). \quad (4.24)$$

L'expression (4.24) pour  $\mathbf{M}$  est linéaire en  $\boldsymbol{\Omega}$ . Il existe donc un opérateur linéaire

$$\begin{aligned} A : K &\mapsto K \\ \boldsymbol{\Omega} &\mapsto A\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

**Lemme 4.1** *L'opérateur  $A$  est symétrique et il est donné par*

$$A(\mathbf{Q})_{ij} = m(Q^2 \delta_{ij} - Q_i Q_j), \quad (4.26)$$

si le corps solide consiste en un point massif de masse  $m$  en  $\mathbf{Q}$ . S'il existe  $N$  points massifs de masses  $m_n$  à  $\mathbf{Q}^{(n)}$ , nous avons alors

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n \left( (Q^{(n)})^2 \delta_{ij} - Q_i^{(n)} Q_j^{(n)} \right). \quad (4.27)$$

**Preuve 4.7** *du lemme (4.1)*

(4.26) est une conséquence de la définition. Nous utilisons d'abord l'expression suivante pour le produit vectoriel :

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_i = \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{ilm} a_l b_m. \quad (4.28)$$



Ici  $\epsilon_{ilm}$  et le tenseur totalement antisymétrique en trois dimensions,

$$\epsilon_{ilm} = \begin{cases} \text{sign}(\sigma) & \text{si } \sigma : (1, 2, 3) \rightarrow (i, l, m) \text{ est une permutation} \\ 0 & \text{si deux index sont égaux.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Avec ceci nous trouvons

$$\begin{aligned} m(\mathbf{Q} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}))_i &= m \sum_{j,k,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} Q_j \epsilon_{klm} \Omega_l Q_m \\ &= m \sum_{j,k,l,m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) Q_j \Omega_l Q_m \\ &= m(Q^2 \Omega_i - (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega}) Q_i) = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \Omega_j. \end{aligned} \quad (4.30)$$

L'équation (4.27) suit alors du fait que le moment cinétique de plusieurs points massifs est la somme des moments cinétiques des points

$$\mathbf{M} = \sum_n \mathbf{M}^{(n)} = \sum_n A^{(n)} \boldsymbol{\Omega} = A \boldsymbol{\Omega}. \quad \square$$

**Corollaire 4.2** L'énergie cinétique d'un point massif appartenant à un corps solide est une forme quadratique par rapport à la vitesse angulaire,

$$T = \frac{1}{2} (A \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (4.31)$$

**Preuve 4.8** du corollaire (4.2)

Pour un point massif appartenant au corps, nous avons

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} V^2 = \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})^2.$$

Pour continuer nous utilisons la formule  $(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}))$  pour  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{c} = \mathbf{Q}$ . Alors

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})^2 = \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{Q} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}))) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \end{aligned} \quad (4.32)$$

et pour une collection de points massifs,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^N T_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m_n V_n^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( \mathbf{M}^{(n)} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad \square \end{aligned}$$

Nous nous intéressons maintenant aux **axes principaux** d'un corps quelconque. Tout opérateur linéaire symétrique et défini positif  $A$  possède trois vecteurs propres. Nous appelons ces vecteurs propres **axes principaux**  $\mathbf{e}_i$ . Ils sont orthogonaux et leurs sont associés les valeurs propres  $I_i > 0$ . Si maintenant nous exprimons la vitesse angulaire le long de ces directions

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.33)$$

nous trouvons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{i=1}^3 M_i \mathbf{e}_i = A \boldsymbol{\Omega} = I_1 \Omega_1 \mathbf{e}_1 + I_2 \Omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3 \\ M_i &= I_i \Omega_i \end{aligned} \quad (4.34)$$

et

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \quad (4.35)$$

Si les nombres  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  ne sont pas tous différents, les directions  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{e}_3$  ne sont pas uniquement déterminées.

**Théorème 4.11** *Pour la rotation d'un corps solide fixé au point  $\mathbf{O}$  avec vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$  (qui passe par  $\mathbf{O}$ ) autour d'un axe quelconque  $\mathbf{e}$ , l'énergie cinétique est*

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathbf{e}} \Omega^2, \quad (4.36)$$

avec

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_{n=1}^N m_n \left( \mathbf{Q}^{(n)} - \left( \mathbf{Q}^{(n)} \cdot \mathbf{e} \right) \mathbf{e} \right)^2.$$

**Preuve 4.9** du théorème (4.11).

Au moyen la relation (4.30) et avec  $\Omega = \Omega \mathbf{e}$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_n M^{(n)} \cdot \Omega \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \left( (Q^{(n)})^2 \Omega^2 - (\Omega \cdot Q^{(n)})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_n m_n \left( (Q^{(n)})^2 - (Q^{(n)} \cdot \mathbf{e})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Omega^2 \sum_n m_n \left( Q^{(n)} - (Q^{(n)} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \Omega^2 I_{\mathbf{e}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Le vecteur

$$\mathbf{r}^{(n)} := Q^{(n)} - (Q^{(n)} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$$

est simplement la projection de  $Q^{(n)}$  dans le plan normal à  $\mathbf{e}$ .

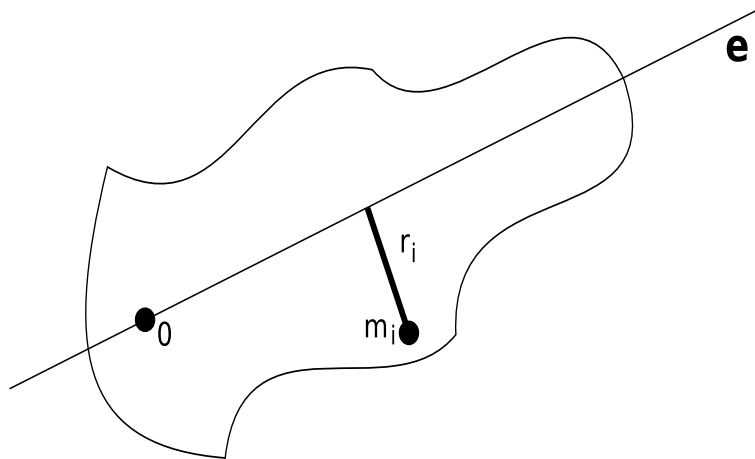


FIG. 4.6 – Energie cinétique d'un corps en rotation autour d'un axe.

Le nombre  $I_{\mathbf{e}}$  dépend de l'axe de rotation  $\mathbf{e}$ . Ce calcul démontre que

**Corollaire 4.3** *le moment d'inertie  $I_{\mathbf{e}}$  d'un corps autour de l'axe  $\mathbf{e}$  est donné par*

$$I_{\mathbf{e}} = \sum_n m_n (r^{(n)})^2. \quad (4.37)$$

**Corollaire 4.4** *Les valeurs propres  $I_i$  sont les moments d'inertie du corps autour des axes principaux  $\mathbf{e}_i$ .*

Pour étudier la dépendance du moment d'inertie  $I_{\mathbf{e}}$  de l'axe  $\mathbf{e}$ , nous considérons les vecteurs  $\frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_{\mathbf{e}}}}$ , avec  $\mathbf{e} \in \mathbb{S}^2$  une direction quelconque (vecteur unitaire).

**Théorème 4.12** *Les vecteurs  $\boldsymbol{\Omega} := \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_{\mathbf{e}}}}$  forment un ellipsoïde dans  $K$ .*

**Preuve 4.10** *du théorème (4.12).*

Si  $\boldsymbol{\Omega} := \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_{\mathbf{e}}}}$ , alors nous trouvons pour la forme quadratique  $T$  :

$$T = \frac{1}{2} (A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} I_{\mathbf{e}} \boldsymbol{\Omega}^2 = \frac{1}{2},$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde.  $\square$

**Définition 4.4** *L'ellipsoïde du théorème précédent satisfaisant  $(A\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = 1$  s'appelle "ellipsoïde d'inertie" du corps par rapport au point 0.*

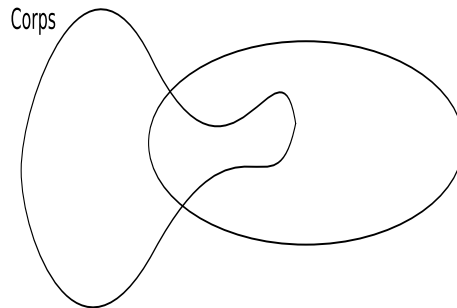


FIG. 4.7 – Ellipsoïde d'inertie.

Nous faisons remarquer que normalement, un corps solide n'est pas une simple collection de points massifs isolés, mais il est mieux décrit par un volume continu et une densité de masse  $\rho(\mathbf{Q})$ , de telle sorte que la masse d'un élément de volume

$$dv = d^3Q$$

au point  $\mathbf{Q}$  est donnée par

$$dm = \rho(\mathbf{Q}) dv.$$

Dans ce cas,

$$A_{ij} = \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) [Q^2 \delta_{ij} - Q_i Q_j] d^3 Q, \quad (4.38)$$

et

$$I_{\mathbf{e}} = \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) [Q^2 - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e})^2] d^3 Q. \quad (4.39)$$

Comme **exercice**, nous pouvons considérer un corps en forme d'ellipsoïde dont la densité est constante,  $\rho(\mathbf{Q}) = \rho_0$ , et 0 est le centre de masse et en déterminer alors l'ellipsoïde d'inertie.

Le centre de masse d'un corps de masse totale  $m = \int \rho(\mathbf{Q}) d^3 Q$  est défini par

$$\bar{\mathbf{Q}} := \frac{1}{m} \int \rho(\mathbf{Q}) \mathbf{Q} d^3 Q. \quad (4.40)$$

Si le corps a un axe de symétrie d'ordre  $k$ , tel qu'il se recouvre après une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{k}$  autour d'un axe  $\mathbf{e}$ , l'ellipsoïde d'inertie possède la même symétrie autour de cet axe. Mais un ellipsoïde triaxial n'a pas d'axe de symétrie d'ordre supérieur à 2, et donc tout axe d'ordre de symétrie  $k > 2$  est un axe de rotation de l'ellipsoïde d'inertie.

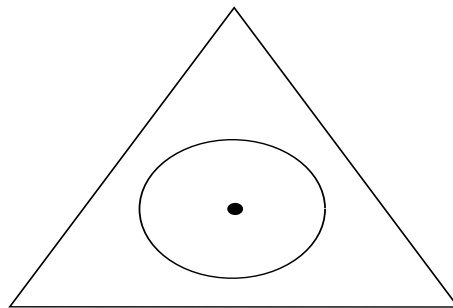


FIG. 4.8 – Ellipsoïde d'inertie d'un triangle équilatéral.

**Définition 4.5** *Un axe  $\mathbf{e}$  est appelé axe de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie si celui-ci est invariant sous rotation autour de  $\mathbf{e}$ .*

**Théorème 4.13** *de Steiner.* Soit  $I_0$  le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe  $\mathbf{e}$  qui traverse le centre de masse du corps, et soit  $\mathbf{e}'$  un axe parallèle à  $\mathbf{e}$ , et situé à une distance  $r$  de  $\mathbf{e}$ . Alors, le moment d'inertie par rapport à  $\mathbf{e}'$  est

$$I' = I_0 + mr^2, \quad (4.41)$$

où  $m$  est la masse du corps.

**Preuve 4.11** *du théorème de Steiner.*

Pour les coordonnées  $\mathbf{Q}$  telles que  $\mathbf{Q} = \mathbf{O}$  corresponde au centre de masse, nous avons

$$\int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) Q_i d^3Q = 0. \quad (4.42)$$

Nous choisissons maintenant le point  $\mathbf{O}'$  sur  $\mathbf{e}'$  tel que  $(\overrightarrow{\mathbf{O}'}, \mathbf{O}) = r\mathbf{e}_\perp$ , où  $\mathbf{e}_\perp$  est un vecteur unitaire normal à  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{e}'$ . Si  $\mathbf{Q}'$  sont les coordonnées par rapport à  $\mathbf{O}'$ ,  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + r\mathbf{e}_\perp$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} I' &= \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}') (\mathbf{Q}' - (\mathbf{Q}' \cdot \mathbf{e}') \mathbf{e}')^2 d^3Q' \\ I' &= \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) (\mathbf{Q} + r\mathbf{e}_\perp - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e})^2 d^3Q \\ &= I_0 + 2r \underbrace{\int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_\perp) d^3Q}_{=0} + r^2 \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) d^3Q \\ &= I_0 + r^2 m \end{aligned} \quad (4.43)$$

ou

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) (\mathbf{Q} - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e})^2 d^3Q \\ m &= \int_{\text{corps}} \rho(\mathbf{Q}) d^3Q. \end{aligned}$$

Le deuxième terme disparaît à cause de (4.42).  $\square$

Le moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par le centre de masse est toujours inférieur à tout autre moment d'inertie défini par rapport à un axe parallèle.

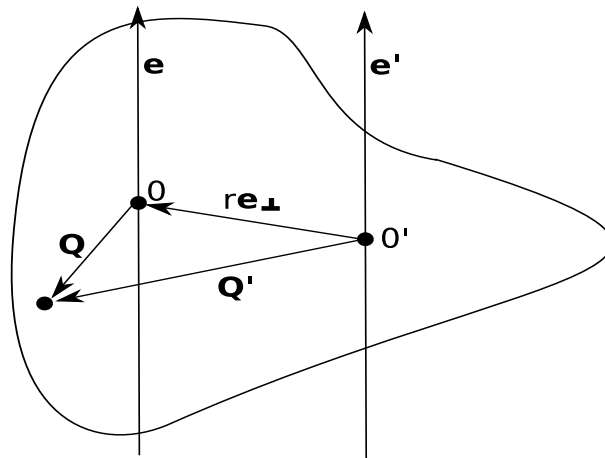


FIG. 4.9 – Théorème de Steiner

#### 4.4 Les équations d'Euler, la description de Poinsot du mouvement d'un corps solide

Nous considérons le mouvement d'un corps solide avec un point fixe  $O$ . Soient  $M$  le moment cinétique du corps par rapport à  $O$ ,  $\Omega$  la vitesse angulaire et  $(A_{ij})$  l'opérateur d'inertie tel que

$$A\Omega = M.$$

Les vecteurs  $M$  et  $\Omega$  sont définis dans le référentiel  $K$  qui bouge avec le corps. En absence de forces, le moment cinétique dans l'espace d'inertie,

$$m = R_t M,$$

est conservé. Donc,  $M$  doit varier de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{m} = \dot{R}_t M + R_t \dot{M} = \dot{R}_t R_t^{-1} m + R_t \dot{M} \\ &= \omega \wedge m + R_t \dot{M}, \end{aligned}$$

et

$$0 = R_t \Omega \wedge R_t M + R_t \dot{M} = R_t (\Omega \wedge M + \dot{M}).$$

Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

**Théorème 4.14** *En absence de forces extérieures,*

$$\dot{M} = \frac{d}{dt} M = M \wedge \Omega. \quad (4.44)$$

*Ces équations sont les équations d'Euler en absence de forces.*

Comme  $A\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{M}$ , nous décomposons  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{M}$  le long des axes principaux du corps

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2 + \Omega_3 \mathbf{e}_3$$

et

$$\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$$

avec  $M_i = I_i \Omega_i$ ,  $I_i$  étant le moment d'inertie dans la direction  $\mathbf{e}_i$ , ( $A_{ij} = I_i \delta_{ij}$ ). Dans ce cas, (4.44) devient

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= I_1 \dot{\Omega}_1 = M_2 \Omega_3 - M_3 \Omega_2 = (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 \\ \dot{M}_2 &= I_2 \dot{\Omega}_2 = (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{M}_3 &= I_3 \dot{\Omega}_3 = (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Si les forces extérieures ne sont pas nulles mais engendrent un moment de force  $\mathbf{n}(\mathbf{q}) = \mathbf{q} \wedge \mathbf{f}(\mathbf{q})$  à tout point  $\mathbf{q}$  du corps, nous définissons le moment de force total

$$\mathbf{n} = \int_{\text{corps}} \mathbf{n}(\mathbf{q}) d^3q, \quad \text{et} \quad \mathbf{N} = R_t^{-1} \mathbf{n},$$

alors les équations d'Euler prennent la forme suivante

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \wedge \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}.$$

**Lemme 4.2** *Les équations d'Euler libres possèdent deux intégrales premières quadratiques en  $\mathbf{M}$  :*

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}, \quad M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2. \quad (4.46)$$

**Preuve 4.12** *du lemme (4.2)*

*$E$  est une quantité conservée par la loi de conservation de l'énergie et  $M^2$  l'est également par la loi de conservation du moment cinétique.*

Le vecteur  $\mathbf{M}$  bouge donc le long de l'intersection de la sphère  $M^2 = \mu^2$  et de l'ellipsoïde  $2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3}$ . Pour étudier la structure des courbes  $\mathbf{M}(t)$ , considérons l'intersection de l'ellipsoïde,  $E > 0$ , avec des sphères de différents rayons  $\mu$ .



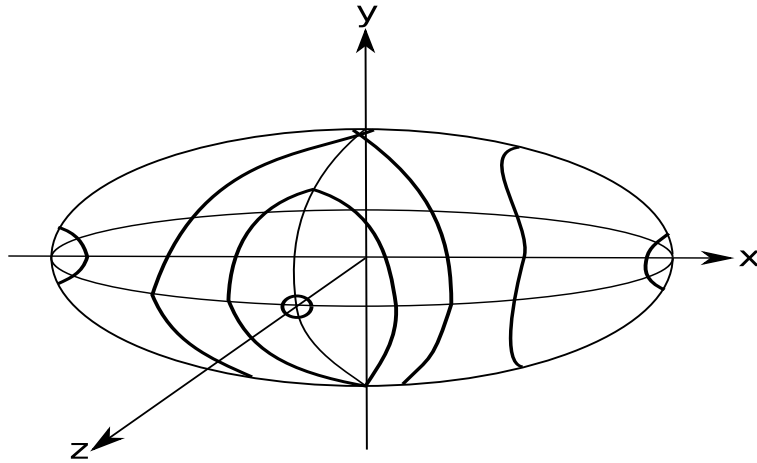


FIG. 4.10 – Trajectoire des équations d'Euler sur une surface de niveau d'énergie.

Nous supposons  $I_1 > I_2 > I_3$ . Les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde sont alors  $\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$ . Si  $\mu < \sqrt{2EI_3}$  ou  $\mu > \sqrt{2EI_1}$ , il n'y a pas d'intersection entre la sphère de rayon  $\mu$  et l'ellipsoïde. Un mouvement satisfaisant  $M^2 = \mu^2$  et d'énergie  $E$  est donc impossible. Si  $\mu = \sqrt{2EI_3}$ , l'intersection consiste en deux points et pour  $\mu \gtrsim \sqrt{2EI_3}$ , l'intersection se réduit à deux petits cercles. Les points  $\mu = \sqrt{2EI_3}$  sont des points stationnaires stables, et de même avec  $\mu = \sqrt{2EI_1}$ . Par contre, la courbe  $\mu = \sqrt{2EI_2}$  consiste en deux cercles. Ce point stationnaire est alors instable.

Evidemment, les solutions  $\mathbf{M} = M_i \mathbf{e}_i$  et donc  $\mathbf{\Omega} = \Omega_i \mathbf{e}_i$  sont des rotations stationnaires, c'est-à-dire  $\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\mathbf{M}} = 0$ , ainsi qu'il est possible de le voir à partir de (4.45). Nous avons donc le théorème suivant :

**Théorème 4.15** *Les solutions  $\mathbf{M} = M_1 \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{M} = M_3 \mathbf{e}_3$  des équations d'Euler (4.45) correspondant aux rotations autour de l'axe avec le plus grand et le plus petit moment d'inertie sont stables, tandis que la solution stationnaire autour de l'axe moyen  $\mathbf{e}_2$  est instable.*

Nous voulons encore mieux visualiser le mouvement du moment cinétique  $\mathbf{M}$  et de la vitesse angulaire  $\mathbf{\Omega}$  dans le référentiel du corps. Ils sont périodiques si  $M^2 \neq 2EI_i$ . Pour visualiser la façon dont le corps tourne dans l'espace, nous considérons son ellipsoïde d'inertie

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{\Xi} \mid (\mathbf{\Xi}, A\mathbf{\Xi}) = 1\} \subset K.$$

A tout moment l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  occupe la position  $R_t \mathcal{E}$  dans l'espace stationnaire  $k$ .

**Théorème 4.16** *de Poinsot*

L'ellipsoïde d'inertie roule, sans glisser, le long d'un plan perpendiculaire au moment cinétique  $\mathbf{m}$ .

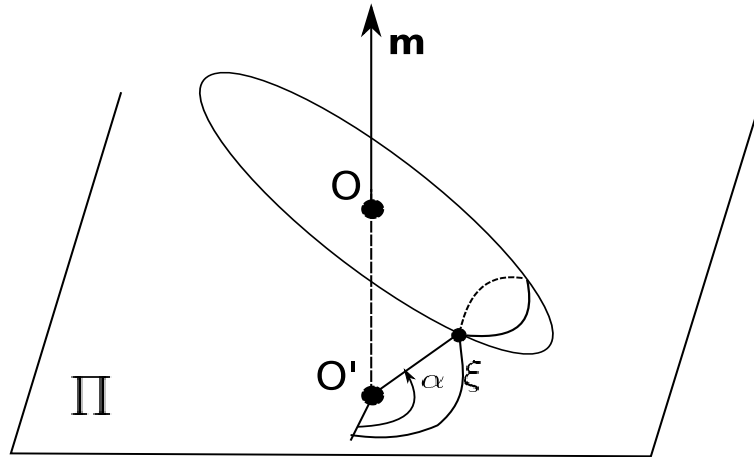


FIG. 4.11 – Roulement de l'ellipsoïde d'inertie sur un plan invariable.

**Preuve 4.13** *du théorème (4.16)*

Nous considérons un plan  $\Pi$  normal à  $\mathbf{m}$  et tangent  $R_t\mathcal{E}$ . Il existe deux de ces plans. Au point de contact, la normale à  $R_t\mathcal{E}$  est parallèle à  $\mathbf{m}$ . L'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  est aussi donné par

$$\mathcal{E} = \left\{ \Xi \mid \Xi = \frac{\Omega}{\sqrt{2T}}, \frac{1}{2} (\Omega, A\Omega) = T \right\} \subset K.$$

La normale à  $\mathcal{E}$  est alors donnée par  $\nabla(A\Omega, \Omega) = 2A\Omega = 2\mathbf{M}$ , donc la normale à  $R_t\mathcal{E}$  est  $2R_t\mathbf{M} = 2\mathbf{m}$ , attachée au point de contact  $\xi$  entre  $\Pi$  et  $R_t\mathcal{E}$ . Le point de contact est donné par  $\xi = R_t\Xi$ ,

$$\xi = \pm \frac{\omega}{\sqrt{2T}}, \quad T = \frac{1}{2} \left( \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \right).$$

Mais,  $(\xi, \mathbf{m}) = \pm\sqrt{2T}$  est une grandeur constante. Donc la distance entre le plan  $\Pi$  et le centre de masse  $O$  ne change pas et l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$  roule sur  $\Pi$  sans glisser.  $\Pi$  est aussi appelé "plan invariable".  $\square$

**Corollaire 4.5** *Pour une condition initiale proche d'une rotation stationnaire autour du plus petit (grand) axe d'inertie, la vitesse angulaire reste proche de sa position initiale non seulement par rapport au corps ( $\Omega$ ), mais aussi par rapport à l'espace fixe ( $\omega$ ). (Dans ce cas  $\mathbf{m}$  et  $\omega$  sont presque parallèles.)*

Nous considérons la trajectoire du point  $\xi \in R_t \mathcal{E} \cap \Pi$ . Lorsque  $\xi$  a fait une révolution entière sur l'ellipsoïde  $\mathcal{E}$ , les conditions initiales se répètent, mais le corps a tourné d'un angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\mathbf{m}$ . La seconde révolution est exactement pareille à la première. Ainsi, si  $\alpha = 2\pi \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ , le mouvement est périodique aussi dans  $k$ , mais si  $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ , le corps ne retourne jamais dans sa position initiale. Dans un tel cas, la trajectoire de  $\xi$  est dense dans un anneau autour de  $\mathbf{O}'$  sur  $\Pi$  :

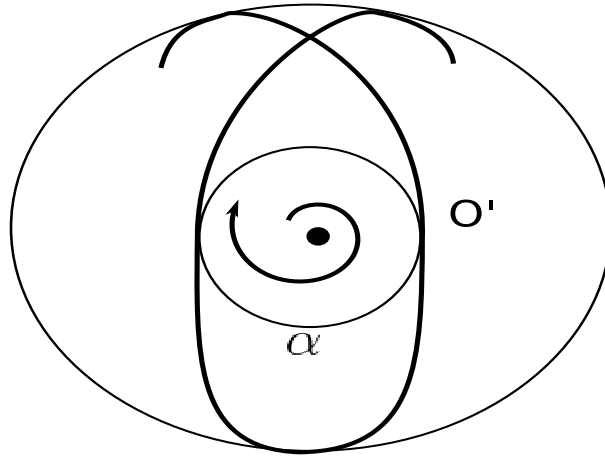


FIG. 4.12 – Trajectoire d'un point de contact sur le plan invariable.

Nous considérons plus en détail le cas spécial important d'un ellipsoïde d'inertie avec symétrie axiale :  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . L'ellipsoïde est donc symétrique sous rotation autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$  sur le corps,  $R_t \mathbf{e}_3$  dans l'espace fixe. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega_3 \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\Omega}_\perp \\ \mathbf{M} &= I_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3 + I_2 \boldsymbol{\Omega}_\perp,\end{aligned}$$

avec  $\boldsymbol{\Omega}_\perp = \Omega_1 \mathbf{e}_1 + \Omega_2 \mathbf{e}_2$ . Donc,  $\mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  et  $\mathbf{M}$  sont dans le plan  $(\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\Omega}_\perp)$ . De même,  $R_t \mathbf{e}_3$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  et  $\mathbf{m}$  sont dans le plan donné par le vecteur constant  $\mathbf{m}$  et  $R_t \mathbf{e}_3$ . Les équations d'Euler sont alors

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_3}{dt} &= 0 \\ 2\Omega_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + 2\Omega_2 \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{d}{dt} (\Omega_\perp^2) = 0,\end{aligned}\tag{4.47}$$

et donc,  $\frac{d}{dt}\Omega^2 = 0$  et  $\frac{d}{dt}\omega^2 = 0$ . Les axes de rotation,  $\boldsymbol{\omega}$  et de symétrie  $R_t\mathbf{e}_3$  tournent autour de l'axe fixe  $\mathbf{m}$ . Le mouvement de rotation de l'axe de symétrie  $R_t\mathbf{e}_3$  s'appelle "précession".

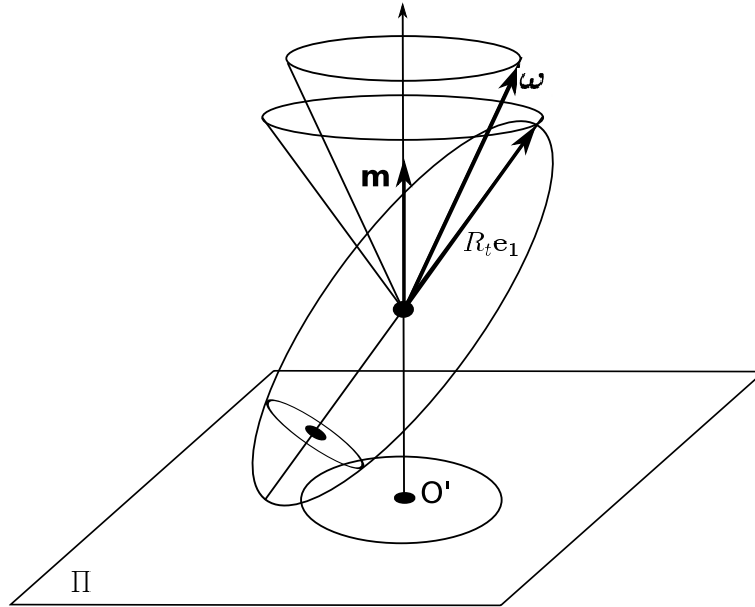


FIG. 4.13 – Mouvement de précession.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega} &= \Omega_3 \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\Omega}_\perp \\
 \mathbf{M} &= I_3 \Omega_3 \mathbf{e}_3 + I_2 \boldsymbol{\Omega}_\perp, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{I_2} \mathbf{M} + \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) \Omega_3 \mathbf{e}_3 \\
 \boldsymbol{\omega} &= R_t \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{I_2} \mathbf{m} + \left(1 - \frac{I_3}{I_2}\right) \Omega_3 R_t \mathbf{e}_3.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

La deuxième composante de  $\boldsymbol{\omega}$  n'est que la rotation du corps autour de son axe de symétrie, tandis que la première composante est la précession,

$$\boldsymbol{\omega}_{pr} = \frac{1}{I_2} \mathbf{m}. \tag{4.49}$$

## 4.5 La toupie lourde ou toupie de Lagrange

Nous considérons un corps solide avec symétrie de rotation autour d'un axe  $\mathbf{e}_3$ , une toupie, avec par conséquent  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Cette toupie est placée

dans un champ de force uniforme, gravitationnel par exemple. Nous verrons que son mouvement est composé de trois processus périodiques : rotation, précession et nutation. Nous introduisons maintenant les **angles d'Euler**.

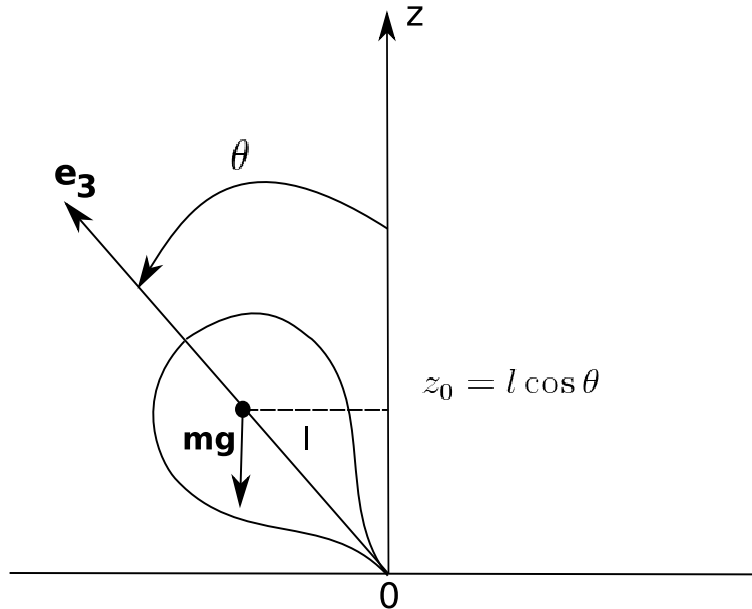


FIG. 4.14 – Mouvement de la toupie.

Le cas général pour lequel aucune symétrie n'est requise ne peut pas être résolu. Nous considérons donc une toupie avec un axe de symétrie  $\mathbf{e}_3$ . Par conséquent, son centre de masse est situé sur  $\mathbf{e}_3$ . Une rotation autour de  $\mathbf{e}_3$  ne change pas la fonction de Lagrange, et donc, d'après le théorème de Noether, il existe une intégrale première du système, laquelle est une conséquence de la symétrie. Comme nous le verrons, il s'agit de  $M_3$ . En plus, l'énergie  $E$  et le moment cinétique en direction de  $e_z$ ,  $m_z$  sont des grandeurs conservées. Le moment de force  $\mathbf{n} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{f}$  est perpendiculaire à  $e_z$  qui est parallèle à  $\mathbf{f}$ , et ainsi,  $m_z$  est constant.

Nous introduisons trois angles appelé angles d'Euler, comprenant l'angle de rotation autour de l'axe  $z$ ,  $\phi$ , et l'angle de rotation autour de  $\mathbf{e}_3$ ,  $\psi$ . Ces deux angles sont des variables cycliques et leurs impulsions canoniques sont alors conservées. Les angles d'Euler,  $(\phi, \psi, \theta)$ , forment un système de coordonnées locales de  $SO(3)$ , et sont définis comme suit :

Soit  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  le système cartésien de l'espace fixe, stationnaire et soit  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  un système cartésien droit, connecté avec le corps rigide le long

des axes principaux avec moments d'inertie  $I_1 = I_2 \neq I_3$ . Nous posons  $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_3$  qui définit la ligne nodale. (Si  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3$  on peut choisir  $\mathbf{e}_N$  arbitrairement dans le plan normal à  $\mathbf{e}_z$ .) Pour transformer le référentiel stationnaire  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  vers le référentiel en mouvement  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , nous effectuons les rotations suivantes :

1. Rotation d'un angle  $\phi$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_3$  telle que  $\mathbf{e}_x$  devient  $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}'_1$  et  $\mathbf{e}_z$  reste fixe.
2. Rotation d'un angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}'_1$  telle que  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}'_3$  devient  $\mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{e}_N = \mathbf{e}'_1$  reste fixe.
3. Rotation d'un angle  $\psi$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$  telle que  $\mathbf{e}'_1$  devient  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_y$  devient donc  $\mathbf{e}_2$ .

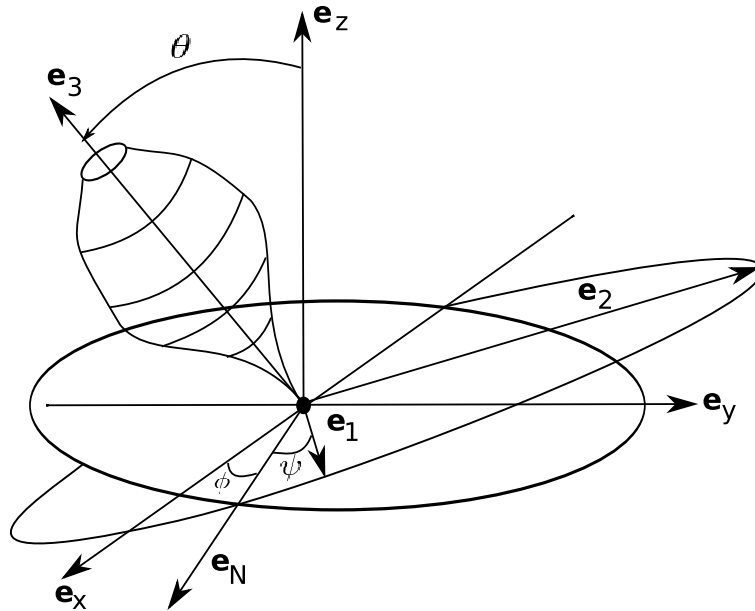


FIG. 4.15 – Angles d'Euler.

Après avoir effectué ces trois rotations,  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \mapsto (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Nous avons donc le théorème suivant :

**Théorème 4.17** *A tout triplet  $(\phi, \theta, \psi) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , la construction précédente associe une rotation  $R(\phi, \theta, \psi) := R(\mathbf{e}_3, \psi) R(\mathbf{e}_N, \theta) R(\mathbf{e}_z, \phi) = R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)$  qui transforme le référentiel  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  en  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Cette application fournit des coordonnées locales pour  $SO(3)$  qui est l'espace des configurations de la toupie*

Nous voulons maintenant écrire la fonction lagrangienne correspondant à un tel système. L'énergie potentielle est donnée par

$$U = \int dx \int dy \int dz \rho(x, y, z) gz = mgz_0 = mgl \cos \theta, \quad (4.50)$$

où  $z_0$  est la hauteur du centre de masse,  $l$  est sa distance de la pointe  $\mathbf{q} = \mathbf{Q} = \mathbf{0}$  et  $\rho(x, y, z)$  est la densité de masse au point  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  du corps. Nous calculons maintenant l'énergie cinétique. Comme  $I_1 = I_2$ , l'énergie cinétique ne peut pas dépendre des rotations autour de  $\mathbf{e}_3$  (axe de symétrie du corps) et de  $\mathbf{e}_z$  (axe n'ayant pas de rapport avec le corps). Par conséquent,  $\phi$  et  $\psi$  sont des variables cycliques dont l'énergie cinétique  $T$  ne dépend pas. Nous la calculons alors pour  $\phi = \psi = 0$ .

**Lemme 4.3** *Pour  $\phi = \psi = 0$ , le moment angulaire de la toupie est donné comme suit avec les angles d'Euler*

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_2 + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_3. \quad (4.51)$$

**Preuve 4.14** *du lemme (4.3)*

*Pour une rotation  $R_t$  quelconque, le moment angulaire est définie comme*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (R_t \mathbf{Q}) &= \dot{\mathbf{q}} = \dot{R}_t R_t^{-1} \mathbf{q} \stackrel{(4.5)}{=} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q} \\ R_t(\phi, \theta, \psi) &= R_t(\mathbf{e}_3, \psi) R_t(\mathbf{e}'_1, \theta) R_t(\mathbf{e}'_3, \phi) \\ R_t^{-1}(\phi, \theta, \psi) &= R_t(\mathbf{e}'_3, -\phi) R_t(\mathbf{e}'_1, -\theta) R_t(\mathbf{e}_3, -\psi) \end{aligned}$$

*et donc*

$$\begin{aligned} \dot{R}_t R_t^{-1} &= \dot{R}_t(\mathbf{e}_3, \psi) R_t^{-1}(\mathbf{e}_3, \psi) + R_t(\mathbf{e}_3, \psi) \dot{R}_t(\mathbf{e}'_1, \theta) R_t(\mathbf{e}'_1, -\theta) R_t(\mathbf{e}_3, -\psi) \\ &\quad + R_t(\mathbf{e}_3, \psi) R_t(\mathbf{e}'_1, \theta) \dot{R}_t(\mathbf{e}'_3, \phi) R_t(\mathbf{e}'_3, -\phi) R_t(\mathbf{e}'_1, -\theta) R_t(\mathbf{e}_3, -\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \dot{R}_t R_t^{-1} \right) |_{\phi=\psi=0} \mathbf{q} &= \left[ \dot{R}_t(\mathbf{e}_3, \psi) R_t^{-1}(\mathbf{e}_3, \psi) + \dot{R}_t(\mathbf{e}'_1, \theta) R_t(\mathbf{e}'_1, -\theta) \right. \\ &\quad \left. + R_t(\mathbf{e}'_1, \theta) \dot{R}_t(\mathbf{e}'_3, \phi) R_t(\mathbf{e}'_3, -\phi) R_t(\mathbf{e}'_1, -\theta) \right] \\ &= \left( \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\phi} \mathbf{e}_z \right) \wedge \mathbf{q} \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_2 + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \mathbf{e}_3. \quad (4.52) \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé que

$$R(\mathbf{e}, \theta)A(\boldsymbol{\alpha})R(\mathbf{e}, -\theta) = A(R(\mathbf{e}, -\theta)\boldsymbol{\alpha}), \text{ où}$$

$$A(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour  $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\phi}\mathbf{e}_3$ . En plus,

$$R(\mathbf{e}'_1, -\theta)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \cos\theta\mathbf{e}_3 + \sin\theta\mathbf{e}_2. \quad \square$$

L'énergie cinétique s'écrit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2}\left[I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2\right], \end{aligned} \quad (4.53)$$

et avec (4.50) et (4.53),

$$\begin{aligned} L &= T - U = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta \quad (4.54) \\ E &= T + U = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta. \end{aligned}$$

Les intégrales premières correspondant aux variables cycliques  $\phi$  et  $\psi$  sont :

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot{\phi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta \quad (4.55)$$

$$M_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta). \quad (4.56)$$

**Théorème 4.18** *L'inclination  $\theta$  de la toupie obéit à l'équation de mouvement d'une particule de masse  $I_1$  dans un potentiel  $U_{\text{eff}}(\theta)$  donné par*

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta. \quad (4.57)$$



**Preuve 4.15** du théorème (4.18)

Nous utilisons les deux équations (4.55) et pour (4.56) éliminer  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\psi}$  de l'énergie constante  $E = T + U$  correspondant au lagrangien (4.54),

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{M_3}{I_3} \quad (4.58)$$

$$\dot{\phi} = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad (4.59)$$

et donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{M_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta \\ &= \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + U(\theta). \end{aligned}$$

Comme les équations d'Euler-Lagrange ne changent pas si nous modifions le potentiel en ajoutant une constante,  $U \rightarrow U - \frac{M_3^2}{2I_3}$ , l'équation précédente est équivalente à

$$E' = \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{eff}}(\theta). \quad \square \quad (4.60)$$

Une fois l'équation pour  $\theta$  résolue,  $\theta = \theta(t)$ , nous obtenons  $\phi$  par intégration de (4.59), et  $\psi$  par intégration de

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} + \frac{M_3 \cos^2 \theta - M_z \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (4.61)$$

Pour une étude qualitative du système, il est utile d'introduire  $u = \cos \theta$ ,  $\dot{u} = -(\sin \theta) \dot{\theta}$ . Comme

$$E' = T' + U_{\text{eff}} = \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{eff}}(\theta)$$

est une grandeur conservée, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= \frac{2E'}{I_1} (1 - u^2) - \frac{(M_z - M_3 u)^2}{I_1^2} - \frac{2mgl}{I_1} u (1 - u^2) \\ &= f(u). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Nous posons

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2mgl}{I_1}, \quad a = \frac{M_z}{I_1}, \quad \text{et} \quad b = \frac{M_3}{I_1} \quad (4.63)$$

de telle sorte que

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - bu)^2, \quad (4.64)$$

et (4.59) se réduit à

$$\dot{\phi} = \frac{a - bu}{1 - u^2}. \quad (4.65)$$

Nous notons encore que pour  $u = 1$ ,  $\theta = 0$   $f(u) \geq 0$  seulement si  $M_z = M_3$  et  $f = 0$ . Dans ce cas,  $u = 1$  est un point d'équilibre de la dynamique de la toupie lourde.

La fonction  $f(u)$  est un polynôme de degré 3 avec  $f(+\infty) = +\infty$ , et  $f(\pm 1) = -(a \mp b)^2 < 0$ , si  $a \neq b$ . Pour le mouvement véritable,  $\dot{u}^2 > 0$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ , il faut que  $f(u) > 0$  quelque part dans l'intervalle  $-1 \leq u \leq 1$ . Dans ce cas,  $f(u)$  possède deux zéros,  $u_1 < u_2$  sur cet intervalle.

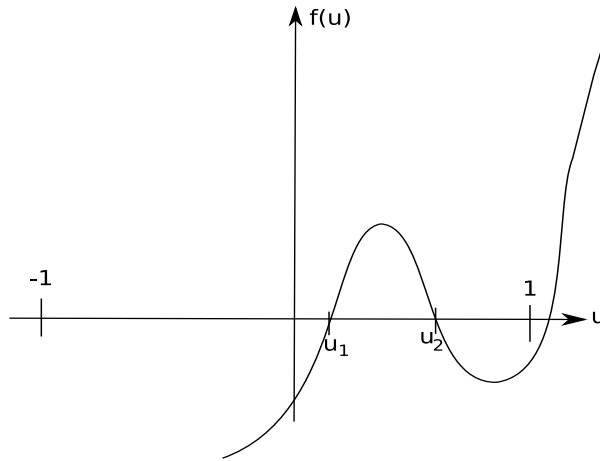


FIG. 4.16 – La fonction  $f(u)$  et ses zéros.

L'inclinaison de la toupie varie donc de façon périodique entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , avec  $u_1 = \cos \theta_1$  et  $u_2 = \cos \theta_2$ . Ce mouvement périodique de  $\theta$  est la nutation. L'angle  $\phi$  entre  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_N$ , la ligne nodale, décrit le mouvement de l'axe de la toupie  $\mathbf{e}_3$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_z$ . Il obéit à l'équation du mouvement (4.65). Si  $\cos \theta' = u' = \frac{a}{b}$  est tel que  $u' \notin [u_1, u_2]$ ,  $\dot{\phi}$  ne change pas de signe, et le mouvement de l'axe de la toupie est comme le schéma (a) de la fig. 4.5. Si

$u' \in [u_1, u_2]$ , alors  $\dot{\phi}(u') = 0$ , et  $\phi$  change de direction à  $u'$ , schéma (b). Si  $u'$  est au bord, par exemple  $u' = u_2$ , le mouvement de l'axe  $\mathbf{e}_3$  possède une "pointe" à  $u = u_2 = u'$ , schéma (c). Cette dernière possibilité est réalisée si la toupie est lâchée avec vitesse nulle à  $u_2 = \cos \theta_2$ .

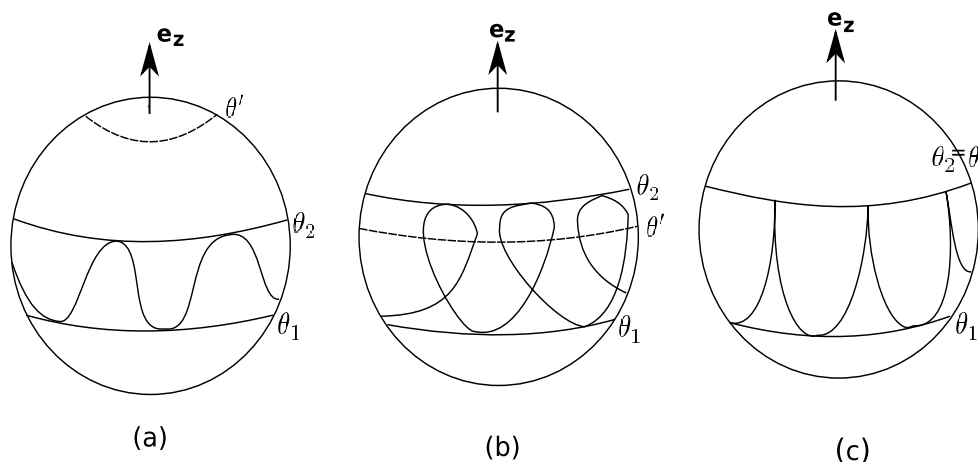


FIG. 4.17 – Différents mouvements possibles de l'axe de la toupie.

Le mouvement azimuthal (i.e. en  $\phi$ ) de la toupie est la précession, et le mouvement autour de son propre axe de symétrie  $\mathbf{e}_3$  (avec vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}_3 = \frac{M_3}{I_3} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$ ) est la rotation. Ces trois mouvements possèdent leur période propre. Si les rapports entre ces périodes ne sont pas rationnels, la toupie ne retourne jamais à sa position initiale, mais elle s'en approche arbitrairement proche.

Nous discutons maintenant quelques cas particuliers de toupies.

Nous considérons d'abord la **toupie dormante** verticale, définie par  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ ,  $\theta = 0$ . Dans ce cas,  $M_3 = M_z = I_3 \omega_3$  et le développement de  $U_{\text{eff}}$  à  $\theta = 0$  donne

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}} &= \frac{(\omega_3 I_3)^2 (1 - \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \\ &= \left( \frac{(\omega_3 I_3)^2}{8I_1} - \frac{mgl}{2} \right) \theta^2 + \text{const.} + \mathcal{O}(\theta^4). \end{aligned}$$

La position d'équilibre  $\theta = 0$  est stable si

$$\omega_3^2 > \frac{4mglI_1}{I_3^2}, \quad (4.66)$$

sinon elle est instable. Quand le frottement réduit la vitesse de rotation de la toupie en dessous de la valeur donnée en (4.66), la toupie dormante se réveille et commence ses mouvements de précession et de nutation.

Comme second cas particulier, nous discutons la **toupie rapide**. Une toupie est appelée rapide si l'énergie cinétique de sa rotation est beaucoup plus importante que son énergie potentielle

$$\frac{1}{2} \frac{M_3^2}{I_3} = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \gg mgl$$

Nous négligeons d'abord le potentiel gravitationnel, et dans ce cas nous obtenons le lemme suivante :

**Lemme 4.4** *Sans gravité ( $g \equiv 0$ ) l'angle  $\theta_0$  donné par  $M_z = M_3 \cos \theta_0$  est un équilibre stable de l'équation du mouvement de l'axe  $\mathbf{e}_3$  de la toupie. La fréquence de petites oscillations de  $\theta$  proche de cet équilibre est*

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} = \frac{M_3}{I_1} \quad (4.67)$$

**Preuve 4.16** *du lemme (4.4)*

*Pour  $g \equiv 0$ , nous avons*

$$U_{\text{eff}} = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}$$

*qui est définie positive et  $\theta_0$  donné par*

$$M_z = M_3 \cos \theta_0 \quad (4.68)$$

*et  $U_{\text{eff}}(\theta_0) = 0$  est un minimum. Le développement de Taylor de  $U_{\text{eff}}$  autour de ce minimum donne ( $\theta = \theta_0 + x$ )*

$$U_{\text{eff}}(x) = \frac{(M_z - M_3 \cos(\theta_0 + x))^2}{2I_2 \sin^2(\theta_0 + x)}.$$

Les dépendances se trouvent dans les fonctions trigonométriques, dont les développements fournissent

$$\begin{aligned}\cos(\theta_0 + x) &= \cos\theta_0 \cos x - \sin\theta_0 \sin x \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \cos\theta_0 - x \sin\theta_0 + \mathcal{O}(x^3),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(\theta_0 + x) &= \sin\theta_0 \cos x + \cos\theta_0 \sin x \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \sin\theta_0 + x \cos\theta_0 + \mathcal{O}(x^3).\end{aligned}$$

Nous avons donc  $(M_z - M_3 \cos(\theta_0 + x))^2 = M_3 x^2 \sin^2 \theta_0 + \mathcal{O}(x^3)$ , et

$$U_{\text{eff}}(x) = \frac{M_3^2}{2I_1} x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

L'énergie devient

$$E = \frac{I_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{M_3^2}{2I_1} x^2, \quad (4.69)$$

et comme elle est une constante du mouvement, nous obtenons en dérivant par rapport au temps

$$\ddot{x} = -\frac{M_3^2}{I_1^2} x = -\omega_{\text{nut}}^2 x,$$

et donc

$$\omega_{\text{nut}} = \frac{M_3}{I_1} \quad \square$$

Comme  $\dot{\phi} = \frac{M_z - M_3 \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$ , alors de manière évidente,  $\dot{\phi} = 0$  à  $\theta = \theta_0$ .

Pour trouver la précession pour des petites déviations de  $\theta_0$ , nous rappelons la description de Poinsot pour la toupie de Lagrange, ce qui est notre cas pour  $g \equiv 0$ . L'axe de la toupie  $\mathbf{e}_3$  tourne donc autour du moment cinétique  $\mathbf{m}$  qui est fixé dans l'espace

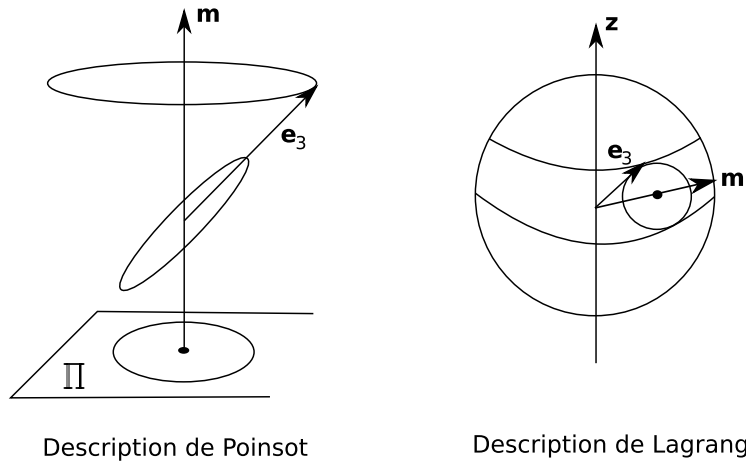


FIG. 4.18 – Deux descriptions équivalentes de la toupie libre.

Donc, pour une toupie avec  $g \equiv 0$ , le mouvement en  $\theta$  (nutation) et en  $\phi$  (précession) se compensent de telle manière à ce que l'axe  $\mathbf{e}_3$  de la toupie décrive un mouvement circulaire autour du moment cinétique  $\mathbf{m}$  fixé dans l'espace. Si nous ajoutons la gravitation,  $g \neq 0$  et que la toupie reste rapide,  $\frac{M_3^2}{2I_3} \gg mgl$ , ce cercle est déformé en "rosette" et le mouvement de l'axe  $\mathbf{e}_3$  avance nettement en direction  $\phi$ , comme le schéma (b) de la Fig. 4.17.

Nous étudions maintenant un autre cas particulier de la toupie : la **toupie relâchée**. Nous relâchons une toupie qui tourne avec un moment cinétique  $M_3$  à partir d'une position où son axe forme un angle  $\theta_0$  avec la verticale, sans élan. Nous avons donc  $M_z = M_3 \cos \theta_0$ .

**Théorème 4.19** *Si l'axe de la toupie est stationnaire initialement ( $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ ) et si la toupie tourne rapidement ( $\omega_3 \rightarrow \infty$ ) autour de son axe qui est incliné d'un angle  $\theta_0$  par rapport à la verticale  $\mathbf{e}_z$ , alors asymptotiquement, (dans la limite ( $\omega_3 \rightarrow \infty$ )), les énoncés suivants sont vérifiés :*

1. La fréquence de nutation est proportionnelle à la fréquence angulaire  $\omega_3$ ,

$$\omega_{\text{nut}} \cong \frac{I_3}{I_1} \omega_3. \quad (4.70)$$

2. L'amplitude de nutation,  $a_{\text{nut}} = \frac{|\theta_1 - \theta_2|}{2}$ , est inversement proportionnelle au carré de la fréquence de rotation,  $\omega_3$ .
3. La fréquence de précession est inversement proportionnelle à la fréquence de rotation.

De manière plus précise, les relations suivantes sont vérifiées

$$\omega_{\text{nut}} \sim \frac{I_3}{I_1} \omega_3, \quad a_{\text{nut}} \sim \frac{I_1 mgl}{I_3^2 \omega_3^2} \sin \theta_0, \quad \omega_{\text{prec}} \sim \frac{mgl}{I_3 \omega_3}. \quad (4.71)$$

Ici,  $f_1(\omega_3) \sim f_2(\omega_3)$  signifie que

$$\lim_{\omega_3 \rightarrow \infty} \frac{f_1(\omega_3)}{f_2(\omega_3)} = 1,$$

i.e.  $f_1$  et  $f_2$  se comportent de la même façon pour  $\omega_3 \rightarrow \infty$ .

**Preuve 4.17** du théorème (4.19)

Si nous lâchons la toupie à  $\theta_0$ ,  $u_0 = \cos \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(t=0) = 0$  et  $\dot{\phi}(t=0) = 0$  so that  $\mathbf{M}(t=0) = M_3 \mathbf{e}_3$  donc  $M_z = M_3 \cos \theta_0$ . Nous avons alors

$$E' = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta + \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} = mgl \cos \theta_0.$$

Avec les définitions (4.63),

$$\alpha = \frac{2E'}{I_1}, \quad \beta = \frac{2mgl}{I_1}.$$

nous obtenons alors

$$\alpha - \beta \cos \theta_0 = \alpha - \beta u_0 = 0.$$

Comme  $\dot{\theta}(0) = \dot{u}(t=0) = 0$  il suit que  $f(u_0) = 0$ , donc  $u_0 = u_2$ . De plus,

$$a - bu_0 = \frac{M_z - M_3 \cos \theta_0}{I_1} = 0 \quad \text{donc} \quad u_0 = u'.$$

Nous nous trouvons alors dans la situation décrite par le schéma (c) de la Fig. 4.17. Nous avons déjà dérivé que dans la limite  $g \rightarrow 0$  (ce qui correspond à  $\omega_3 \rightarrow \infty$ ), la fréquence de nutation devient

$$\omega_{\text{nut}} \cong \frac{I_3}{I_1} \omega_3.$$

Comme  $g \neq 0$ , le minimum du potentiel  $U_{\text{eff}}$  n'est pas exactement à  $\theta_0$ , mais à  $\theta_g$ , avec  $\theta_g = \theta_0 + x_g$ ,  $|x_g| \ll 1$ . Nous développons  $U_{\text{eff}}$  en  $x = \theta - \theta_0$  :

$$U_{\text{eff}}(x) = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{2I_1} x^2 + mgl \cos \theta_0 - x mgl \sin \theta_0 - \frac{mgl}{2} \cos \theta_0 x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

Comme  $\frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1} \gg mgl$ , nous négligeons le dernier terme du développement. Le minimum de  $U_{\text{eff}}$  atteint en  $x = x_g$  est donné par

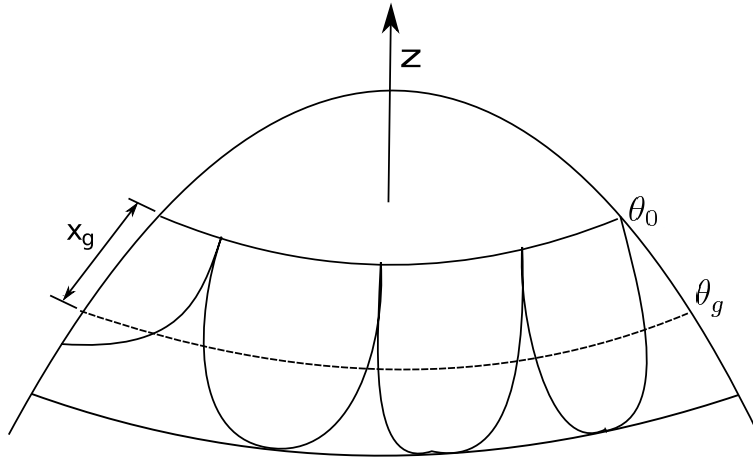
$$0 = \left. \frac{dU_{\text{eff}}}{dx} \right|_{x_g} = \frac{I_3^2 \omega_3^2}{I_1} x_g - mgl \sin \theta_0,$$

et donc

$$x_g = \frac{I_1 mgl \sin \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2}.$$

L'inclinaison  $\theta$  de l'axe de la toupie oscille autour de  $\theta_g = \theta_0 + x_g$ . Mais au moment initial  $\theta = \theta_0$  et  $\dot{\theta} = 0$ . Donc, l'amplitude de cette oscillation est

$$a_{\text{nut}} = |\theta_0 - \theta_g| \cong x_g \cong \frac{I_1 mgl \sin \theta_0}{I_3^2 \omega_3^2}.$$



Nous trouvons encore la fréquence de précession

$$\dot{\phi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} x + \mathcal{O}(x^2).$$

La valeur moyenne de  $x$  sur une oscillation est  $\bar{x} = x_g$ , et donc

$$\omega_{\text{prec}} = \bar{\dot{\phi}} = \frac{M_3}{I_1 \sin \theta_0} x_g = \frac{M_3 mgl}{I_3^2 \omega_3^2} = \frac{mgl}{I_3 \omega_3}. \quad \square.$$



---

Pour la dernière égalité, nous avons utilisé  $M_3 = I_3\omega_3$ . Ainsi, plus la toupie tourne vite, plus la fréquence de précession et l'amplitude de la nutation diminuent, et plus la position  $\theta \simeq \theta_0$  de l'axe de la toupie devient stable.

# Chapitre 5

## Mécanique hamiltonienne : transformations canoniques

### 5.1 Crochet de Poisson

Soit  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  une fonction des positions, des impulsions et du temps. Sa dérivée totale par rapport au temps le long d'une solution du système hamiltonien avec fonction de hamilton  $H$  est

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \quad (5.1)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \quad (5.2)$$

$$\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} \quad (5.3)$$

où nous avons utilisé la définition générale du crochet de Poisson entre deux fonctions  $g$  et  $f$  sur l'espace de phase

$$\{g, f\} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \quad (5.4)$$

(Dans cette définition une éventuelle dépendance explicite du temps de  $f$  et  $g$  n'entre pas en compte. Ici  $t$  est à regarder comme un paramètre). Une fonction qui reste constante lors du mouvement, c'est-à-dire une intégrale première, satisfaisant alors

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} . \quad (5.5)$$

Le crochet de Poisson possède les propriétés suivantes qui se déduisent aisément de la définition

$$\{g, f\} = -\{f, g\} \quad (5.6)$$

$$\{g, c\} = 0 \quad \text{pour toute constante } c. \quad (5.7)$$

$$\{g_1 + g_2, f\} = \{g_1, f\} + \{g_2, f\}. \quad (5.8)$$

En prenant la dérivée partielle de (5.4) par rapport au temps nous trouvons encore

$$\frac{\partial}{\partial t}\{g, f\} = \left\{\frac{\partial g}{\partial t}, f\right\} + \left\{g, \frac{\partial f}{\partial t}\right\}. \quad (5.9)$$

En plus, posant  $g = p_i$  ou  $g = q_i$ , nous trouvons

$$\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q^i} \quad (5.10)$$

$$\{f, q^i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (5.11)$$

ce qui implique

$$\{p_j, p_i\} = \{q^j, q^i\} = 0 \quad \text{et} \quad \{p_j, q^i\} = \delta_j^i. \quad (5.12)$$

Il est intéressant de noter la similarité de ces formules avec celles des commutateurs en mécanique quantique.

### **Théorème 5.1 (Crochet de Lie et crochet de Poisson)**

– *Entre les crochets de Poisson formés de trois fonctions  $f, g$  et  $h$  sur l'espace de phase, il existe la relation suivante appelée l'identité de Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \quad (5.13)$$

– *En plus, si nous définissons par  $X_f$  le champ vectoriel hamiltonien qui a comme fonction de Hamilton la fonction  $f$ , donc*

$$X_f = \left( \frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}, -\frac{\partial f}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial q^n} \right) \quad (5.14)$$

nous trouvons que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}. \quad (5.15)$$

*Ici  $[X_f, X_g]$  est le commutateur entre  $X_f$  et  $X_g$ , c'est-à-dire, que, pour une fonction  $h$  sur l'espace de phase*

$$[X_f, X_g]h = X_f(X_g h) - X_g(X_f h).$$

**Preuve 5.1** *La dérivation de l'identité de Jacobi (5.13), pour le crochet de Poisson peut être obtenue par un calcul direct qui est un peu long, mais ne pose aucune difficulté particulière (bon exercice!). Nous le laisserons donc de côté ici.*

*Pour démontrer le lien entre le crochet de Poisson de deux fonctions et le crochet de Lie des champs vectoriels hamiltoniens correspondants, nous revenons à la définition du crochet de Lie. En général, pour deux champs vectoriels sur une variété de dimension  $n$ ,*

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i, \quad (5.16)$$

*nous avons*

$$\begin{aligned} [X, Y]f &:= Y(Xf) - X(Yf) \\ &= \sum_{i,j=1}^n Y^i \partial_i (X^j \partial_j f) - X^i \partial_i (Y^j \partial_j f) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (Y^i \partial_i X^j - X^i \partial_i Y^j) \partial_j f \\ &= \sum_{j=1}^n [X, Y]^j \partial_j f \end{aligned} \quad (5.17)$$

*avec*

$$[X, Y]^j = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i X^j - X^i \partial_i Y^j. \quad (5.18)$$

*Evidemment, ce produit est linéaire en  $X$  et  $Y$  et antisymétrique. De plus, il satisfait aussi l'identité de Jacobi,*

$$[Z, [X, Y]] + [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

*La démonstration de cette identité demande un peu de travail, mais à nouveau, il s'agit d'un simple calcul que nous laissons de côté.*

*Nous utilisons alors l'identité de Jacobi pour le crochet de Poisson, à fin de démontrer (5.15) : la définition du crochet de Lie est (5.17)*

$$[X_f, X_g]h = X_f(X_g h) - X_g(X_f h).$$

*Mais les définitions du crochet de Poisson et du champ hamiltonien  $X_f$ , impliquent  $X_f h = \{f, h\}$  telle que*

$$\begin{aligned} [X_f, X_g]h &= X_f(X_g h) - X_g(X_f h) = X_f(\{g, h\}) - X_g(\{f, h\}) \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} \\ &\stackrel{\text{Jacobi}}{=} -\{h, \{f, g\}\} = \{\{f, g\}, h\} = X_{\{f, g\}}h. \end{aligned}$$

□

**Théorème 5.2 (de Poisson)** Soient  $f$  et  $g$  des intégrales premières par rapport au champ hamiltonien  $X_H$ . Alors leur crochet de Poisson est aussi une intégrale première.

**Preuve 5.2** (du thm. 5.2) Ceci est une simple conséquence de l'identité de Jacobi et de l'éq. (5.9) : avec Jacobi, nous avons

$$\{H, \{f, g\}\} = \{f, \{H, g\}\} + \{\{H, f\}, g\} \quad (5.19)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} + \{H, \{f, g\}\} \\ &= \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \{\{H, f\}, g\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{f, \{H, g\}\} \\ &= \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\}. \end{aligned}$$

□

Si deux intégrales premières sont connues, il est possible d'en construire d'autres par cette méthode. Bien sûr, on ne trouve pas toujours quelque chose de nouveau...

**Exercice** : Calculer  $\{m_i, m_j\}$  et  $\{m_i, p_j\}$  pour un système à une particule en 3 dimensions où  $\mathbf{m} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$  est le moment cinétique. Montrer que  $\{m_i, f\} = 0$  pour toute fonction  $f$  que ne dépend que de  $r = |\mathbf{q}|$ .

## 5.2 Un principe variationnel pour les équations canoniques

Nous ne considérons que des systèmes autonomes. La généralisation sur des systèmes non-autonomes peut être obtenue en ajoutant  $t$  comme variable,  $(q^1, \dots, q^n) \rightarrow (q^1, \dots, q^n, q^{n+1} = t)$ .

Nous avons démontré dans le chapitre II que les équations d'Euler-Lagrange se dérivent à partir d'un principe variationnel par rapport à l'action

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) dt \quad (5.20)$$

si nous considérons les points initiaux et finaux comme fixes.

Nous considérons maintenant  $S$  comme une fonctionnelle sur les trajectoires physiques qui commencent à  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$  et qui dépend du point final  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$ . La variation de l'action si nous considérons une trajectoire et une trajectoire voisine est alors donnée par

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right|^{t=t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} dt . \quad (5.21)$$

Ici et par la suite nous utilisons l'écriture vectorielle telle que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \equiv \left( \frac{\partial L}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) , \quad \delta \mathbf{q} \equiv (\delta q^1, \dots, \delta q^k) ,$$

et de même avec  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ . Une expression comme dans l'intégrale (5.21) est donc à comprendre comme un produit scalaire :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \equiv \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i .$$

Le long d'une trajectoire physique l'intégrand disparaît et la dérivée de l'action par rapport au point final  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t_2)$  donne

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p} . \quad (5.22)$$

De façon analogue, nous pouvons considérer l'action comme fonction explicite du temps final  $t = t_2$ . Par définition, la dérivée totale de l'action par rapport au temps est alors

$$\frac{dS}{dt} = L .$$

D'autre part, en considérant l'action comme fonction des coordonnées finales et du temps final, nous avons

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q^i} \dot{q}^i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}^i . \quad (5.23)$$

En comparant les deux expressions, nous trouvons

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}^i = -H . \quad (5.24)$$

Ceci donne aussi

$$\frac{dS}{dt} = -H + \sum_i p_i \frac{dq^i}{dt} . \quad (5.25)$$

Ceci donne la dérivée totale de  $S$  par rapport au temps final exprimée dans les position et les impulsions finales de la trajectoire.

Nous supposons alors que non seulement les positions et le temps du point final varient, mais aussi ceux du point initial. Il est évident que nous obtenons les mêmes contributions avec le signe opposé du point initial, de telle manière que

$$\frac{dS}{dt^{(2)}} - \frac{dS}{dt^{(1)}} = -H^{(2)} + \sum_i p_i^{(2)} \frac{dq^{i(2)}}{dt} + H^{(1)} - \sum_i p_i^{(1)} \frac{dq^{i(1)}}{dt}. \quad (5.26)$$

Ici les indices (1) et (2) indiquent les points initiaux et finaux. Cette équation nous montre déjà que quelque soit l'hamiltonien du système, le mouvement n'est pas arbitraire, mais toujours de la forme telle que  $\sum_i p_i \frac{dq^i}{dt} - H$  soit une dérivée totale.<sup>1</sup>

Les équations de Hamilton peuvent être déduit formellement de la condition de moindre action en écrivant (5.26) comme intégrale,

$$S = \int \left( \sum_i p_i \frac{dq^i}{dt} - H \right) dt = \int \left( \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - H \right) dt. \quad (5.27)$$

La variation de cette action donne

$$\delta S = \int \left( \delta \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{p} \frac{d\delta \mathbf{q}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} \right) dt. \quad (5.28)$$

L'intégration par partie du deuxième terme et la collection des variation indépendantes  $\delta \mathbf{q}$  et  $\delta \mathbf{p}$  donnent

$$\delta S = \int \left( \delta \mathbf{p} \left[ \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right] - \delta \mathbf{q} \left[ \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right] \right) dt. \quad (5.29)$$

Evidemment, ceci est vérifié seulement pour des variations qui laissent les points finaux et initiaux fixes. En demandant que la variation de  $S$  soit nulle, nous retrouvons les équations canoniques

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (5.30)$$

<sup>1</sup>Dans le langage des formes différentielles ceci implique que, le long d'une solution la 1-forme  $\theta = \sum_i p_i dq^i$  est donnée par  $\theta = dS + Hdt$ . Pour un système autonome ( $H = \text{constant}$ ), la 2-forme  $\omega = dH \wedge dt = d\theta = \sum_i dp_i \wedge dq^i$  est conservée le long d'une solution (c'est-à-dire sous le flot hamiltonien). La forme  $\omega$  est appelée une 'structure symplectique' sur l'espace de phase. Pour plus de détails sur la mécanique hamiltonienne dans le langage des formes et sur des structures symplectiques, voir [1].

### 5.2.1 Principe de Maupertuis

Pour un système hamiltonien autonome, il est parfois intéressant d'étudier seulement la trajectoire elle-même et non la relation entre une position sur cette trajectoire et le temps correspondant.

En s'en tenant à cette question plus restreinte de la détermination de la seule trajectoire, il est possible de donner au principe de moindre action une forme simplifiée. Comme le système est autonome, l'énergie est conservée le long du mouvement,

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E = \text{const.}$$

En écrivant l'action (5.27) pour une énergie constante on a

$$S(t) = \int_{t_0}^t \left( \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) dt - E(t - t_0) \quad (5.31)$$

La variation de cette action par rapport à tous les mouvements avec énergie  $E$  fixée donne alors

$$\delta S_0 = 0 \quad \text{avec} \quad S_0 = \int_{t_0}^t \left( \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) dt .$$

L'action réduite  $S_0$  a un minimum sur l'ensemble de toutes les trajectoires à énergie  $E$  et passant par le point final à un instant  $t$  arbitraire. Pour utiliser ce principe variationnel, il faut exprimer les impulsions en fonction des vitesses et remplacer aussi  $dt$  par les différentielles des positions en utilisant la conservation d'énergie.

**Exemple :** Nous considérons un point massif dans un potentiel  $U(\mathbf{q})$ . Donc

$$E = T + U = \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)^2 + U(\mathbf{q}) = \frac{m}{2} \left( \frac{d\ell}{dt} \right)^2 + U(\mathbf{q}) .$$

Ici  $d\ell$  est l'élément de longueur le long de la trajectoire. La résolution pour  $dt$  donne

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2(E - U)}} d\ell .$$

En plus  $\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} = 2T = 2(E - U)$  de telle façon que

$$S_0 = \int \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} dt = \int \sqrt{2m(E - U)} d\ell .$$

Le principe variationnel,  $\delta S_0 = 0$ , implique alors

$$0 = \delta \int \sqrt{2m(E - U)} d\ell$$



le long du mouvement physique. Pour une particule libre,  $U = 0$ , nous avons

$$0 = \delta \int dl .$$

La particule suit donc la trajectoire la plus courte qui lie les positions initiales et finales, c'est-à-dire elle se meut sur une droite.

### 5.3 Transformations canoniques

Dans les chapitres II et suivants, nous avons vu qu'un système lagrangien peut être décrit dans différents systèmes de coordonnées,  $(q^1, \dots, q^n)$  ou  $(Q^1, \dots, Q^n)$  avec

$$Q^i = Q^i(q^1, \dots, q^n) \quad \text{et} \quad \det \left( \frac{\partial Q^i}{\partial q^k} \right) \neq 0 .$$

Bien sûr, comme  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$  définit aussi un système hamiltonien avec le nouvel hamiltonien

$$H' = \sum_i P_i \dot{Q}^i - L'(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t), t) \quad \text{et} \quad P_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}^i} .$$

Le choix de bonnes coordonnées adaptées aux symétries est un art de grande importance pour la résolution efficace d'un problème. Un des avantages du formalisme hamiltonien est que en plus des transformations précédentes, un tel système admet un grand nombre d'autres transformations, qui ne sont pas de la forme d'une simple transformation de coordonnées spatiales, mais qui mélangent les positions et les impulsions telles que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \det \left( \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \right) \neq 0 .$$

Mais toute transformation de cette forme ne mène pas à nouveau à un système canonique. Les transformations telles que les nouvelles équations de mouvement sont encore des équations canoniques, donc qu'elles sont de la forme

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q^i}, \quad \dot{Q}^i = \frac{\partial H'}{\partial P_i},$$

pour un nouvel hamiltonien  $H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ , sont appelées **transformations canoniques**.

Pour trouver la forme des transformations canoniques, nous utilisons le principe variationnel

$$\delta \int \left( \sum_i p_i \frac{dq^i}{dt} - H \right) dt = 0 . \quad (5.32)$$

Ici toutes les coordonnées et les impulsions varient indépendamment et les valeurs aux bords sont fixées. Pour que les nouvelles variables satisfassent aussi les équations de Hamilton avec fonction de Hamilton  $H'$ , il faut que aussi

$$\delta \int \left( \sum_i P_i \frac{dQ^i}{dt} - H' \right) dt = 0 . \quad (5.33)$$

Mais ces deux principes variationnels ne sont équivalents que si les quantités entre parenthèses ne diffèrent que par une dérivée totale par rapport au temps,

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \frac{dq^i}{dt} - H - \left( \sum_i P_i \frac{dQ^i}{dt} - H' \right) &= \frac{dF}{dt} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial Q^i} \frac{dQ^i}{dt} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Dans la deuxième égalité, nous avons supposé que  $F$  est une fonction des variables  $q^i$  et  $Q^i$  et du temps. Cette égalité doit être vérifiée pour tous les mouvements et donc pour toutes les vitesses  $\frac{dq^i}{dt}$  et  $\frac{dQ^i}{dt}$ . En comparant les coefficients des vitesses indépendantes, nous trouvons

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i} \quad \text{et} \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (5.35)$$

$F$  est appelée la **fonction génératrice** de la transformation canonique et dans le cas où  $F = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ , il s'agit d'une **transformation canonique du type 1**. Pour que la transformation soit bien définie, il faut que nous pourrions résoudre  $\mathbf{p} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}}$  pour  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Donc il faut que

$$\det \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i \partial Q^j} \right) = \det \left( \frac{\partial p_i}{\partial Q^j} \right) \neq 0 . \quad (5.36)$$

D'autre part, toute fonction  $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$  satisfaisant (5.36) définit une transformation canonique.

Si  $F$  dépend de  $(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , nous réécrivons le terme  $\sum_i P_i \frac{dQ^i}{dt}$  comme

$$\sum_i P_i \frac{dQ^i}{dt} = \sum_i \frac{d(P_i Q^i)}{dt} - \sum_i Q_i \frac{dP^i}{dt}$$

tel que

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \frac{dq^i}{dt} - H + \left( \sum_i Q_i \frac{dP^i}{dt} + H' \right) &= \frac{dF_2}{dt} \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial P^i} \frac{dP^i}{dt} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.37)$$

avec  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = F - \sum_i P_i Q^i$  et donc

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P^i} \quad \text{et} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.38)$$

Une transformation avec fonction génératrice  $F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  est appelée **transformation canonique du type 2**. De même, nous définissons les transformations du type 3 et 4 à travers des fonctions génératrices

$$\begin{aligned} F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}, t) &= F - \sum_i p_i q^i, \quad \det \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{Q}} \right) \neq 0 \\ q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q^i} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}, t) &= F - \sum_i (p_i q^i + P_i Q^i), \quad \det \left( \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{P}} \right) \neq 0 \\ q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p^i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P^i}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

En général, une transformation canonique ne doit pas être d'un de ces quatre types. Dans ce cas, on parle de "type mixte". Toute transformation canonique peut être composée de transformations élémentaires, c'est-à-dire des transformations canoniques de la forme  $Q^i = p_i$ ,  $P_i = -q^i$ , et  $Q^j = q^j$ ,  $P_j = p_j \forall j \neq i$ , ainsi que d'une transformation du type 1.

Nous faisons encore remarquer que d'après notre définition, un simple changement d'échelle,  $\mathbf{p} \mapsto a\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q} \mapsto b\mathbf{q}$  et  $H' \mapsto abH$  pour des constantes positives  $a, b \in \mathbb{R}_+$ , n'est pas une transformation canonique. Dans ce cas, les variations dans (5.32) et (5.33) ne diffèrent que par le facteur constant  $ab$ . Un tel changement d'échelle ramène donc aussi le système dans un nouveau système canonique. On appelle une transformation qui ne diffère que d'un facteur constante (le même facteur  $a$  pour toutes les impulsions et  $b$  pour toutes les positions) d'une transformation canonique une **transformation pre-canonique**. On peut démontrer formellement que ce sont les seules possibilités. Seules les transformations pré-canoniques transforment tout système

canonique dans un autre système canonique. Par la suite, nous n'étudions que des transformations canoniques.

**Exercice** Montrer que  $Q^i = p_i$ ,  $P_i = -q^i$  pour un index  $i$  fixé est une transformation canonique. Déterminer la fonction génératrice.

**Théorème 5.3** *Le crochet de Poisson est invariant sous transformations canoniques.*

**Preuve 5.3** *du théorème 5.3.*

*Pour simplifier, nous présentons la preuve en une dimension. En plus, il est évident que la transformation canonique  $Q = p$  et  $P = -q$ , préserve le crochet de Poisson. Nous pouvons alors supposer que la transformation canonique considérée est du premier type, et donc  $p = \frac{\partial F}{\partial q}$  et  $P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$ . Nous appelons le crochet de Poisson dans les variables  $q, p$  par  $\{, \}_{qp}$  et celui par rapport à  $Q, P$  par  $\{, \}_{QP}$ . Pour transformer des dérivées en  $(q, p)$  en dérivées par rapport à  $(Q, P)$ , nous utilisons que*

$$P = P(q, Q) \text{ donc } \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)_{q, Q} = 0 \text{ et,}$$

$$\text{parce que pour } P \text{ et } p \text{ fixe, aussi } Q \text{ est fixe, donc } \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)_{p, P} = 0.$$

*Dans ces expressions les variables fixe sont indiquées en bas. Nous pouvons alors transformer les dérivées par rapport à  $p$  et  $q$  dans  $\{, \}_{qp}$  en dérivées par rapport à  $P$  et  $Q$ .*

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{qp} &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \\ &= \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \\ &= -\{f, g\}_{QP} \left( \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} \right) \end{aligned}$$

*Nous posons encore  $M = \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial p} = \left( \frac{\partial p}{\partial Q} \right)^{-1} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial Q} \right)^{-1} = -M^{-1}$ . Donc le dernier terme en paranthèse est  $-1$  et nous trouvons*

$$\{f, g\}_{qp} = -\frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial g}{\partial Q} + \frac{\partial g}{\partial P} \frac{\partial f}{\partial Q} = \{f, g\}_{QP}.$$

*La seule différence en dimension  $d > 1$  est que  $M$  devient une matrice non dégénérée grâce à la condition (5.36). Dans ce cas  $M^{-1}$  est à remplacer par  $(M^{-1})^T$ .  $\square$*

Les nouvelles coordonnées satisfont alors aussi à

$$\{Q_i, Q_j\}_{qp} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{qp} = 0, \quad \{P_i, Q_j\}_{qp} = \delta_{ij}. \quad (5.41)$$

Ces relations, écrites à l'aide des crochets de Poisson, représentent les conditions auxquelles doivent satisfaire les nouvelles variables pour que la transformation  $(q, p) \mapsto (Q, P)$  soit canonique.

Il est intéressant de noter que la variation des variables  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  lors du mouvement d'un système autonome peut être considérée comme une transformation canonique : Soit  $\mathbf{q}(t)$  et  $\mathbf{p}(t)$  une solution des équations du mouvement et nous posons  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}(t + \tau) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_t, \mathbf{p}_t, \tau)$  et  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{p}(t + \tau) = \mathbf{P}(\mathbf{q}_t, \mathbf{p}_t, \tau)$ . Alors, d'après (5.23)

$$\begin{aligned} \sum_i \left( P_i \frac{dQ^i}{dt} - p_i \frac{dq^i}{dt} \right) &= \sum_i \left( p_i(t + \tau) \frac{dq^i(t + \tau)}{dt} - p_i(t) \frac{dq^i(t)}{dt} \right) \\ &= \frac{dS}{dt}(t + \tau) - \frac{dS}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(S_\tau - S), \end{aligned} \quad (5.42)$$

ou  $S_\tau(t) \equiv S(t + \tau)$ . Ceci est alors une dérivée totale et donc  $(q, p) \mapsto (Q, P) \equiv (q_\tau, p_\tau)$  est une transformation canonique (avec fonction génératrice  $-S$ ).

### 5.3.1 Théorème de Liouville II

Dans le chapitre I, nous avons démontré qu'un volume dans l'espace de phase est invariant sous le flot d'un système hamiltonien autonome (flot hamiltonien). Ici nous démontrons qu'il est aussi invariant sous une transformation canonique.

**Théorème 5.4** *Pour une transformation canonique dans l'espace de phase,  $\Psi : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ .*

$$\det(D\Psi) = 1, \quad \text{ou} \quad D\Psi = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$$

*est la Jacobienne de la transformation.*

D'après les règles de changement de variables, les volumes dans l'espace de phase sont alors invariants sous cette transformation.

**Preuve 5.4** *Une transformation canonique du type  $Q_i = p_i$  et  $P_i = -q_i$  satisfait évidemment  $\det(D\Psi) = 1$ . Comme toute transformation canonique*

peut être composée de transformations de ce type et d'une transformation canonique du type 1, nous pouvons supposer que la transformation en considérée est du type 1. Nous écrivons alors

$$D\Psi = \left( \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{q})} \right) \cdot \left( \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{q})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} \right).$$

La première matrice est de la forme

$$M_1 = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{q})} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

et la deuxième est

$$M_2 = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{q})}{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour une transformation du premier type nous avons

$$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i} \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \quad \text{avec } F(\mathbf{Q}, \mathbf{q}).$$

Donc

$$\frac{\partial P_i}{\partial q^j} = -\frac{\partial^2 F}{\partial Q^i \partial q^j} = -A_{ij} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{Q}} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial Q^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^i \partial Q^j} = A_{ji}^T$$

En appliquant les règles usuelles pour les déterminants de matrices en blocs carrés, nous obtenons

$$\det M_1 = \det(-A) = (-1)^k \det A \quad \text{et}$$

$$\det M_2 = (-1)^k \det (A^T)^{-1} = (-1)^k (\det)^{-1},$$

où  $k$  est le nombre de degrés de liberté. Avec ceci

$$\det(D\Psi) = \det M_1 \det M_2 = 1. \quad \square$$

### 5.3.2 Transformations canoniques comme transformations symplectiques

Nous voulons encore formaliser quelque peu la notion de transformation canonique. Pour ceci nous notons que le champ hamiltonien

$$X_H = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_k}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q^k} \right)$$

est de la forme

$$X_H = J\nabla H \quad (5.43)$$

où la matrice  $J$  est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_k \\ -\mathbb{1}_k & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}. \quad (5.44)$$

Il est facile à vérifier que  $J^T = J^{-1} = -J$ ,  $J^2 = -\mathbb{1}$  et  $\det(J) = 1$ . Le groupe de matrices laissant invariant la forme bilinéaire, anti-symétrique définie par  $J$  s'appelle le groupe symplectique.

**Définition 5.1** *Le groupe symplectique noté  $\text{Sp}(k, \mathbb{R})$  est composé des matrices  $M \in GL(2k, \mathbb{R})$  qui satisfont à  $MJM^T = J$ . C'est-à-dire*

$$\text{Sp}(k, \mathbb{R}) = \{M \in GL(2k, \mathbb{R}) : MJM^T = J\}. \quad (5.45)$$

### Théorème 5.5

*Une transformation  $\Psi : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$  est canonique si et seulement si  $D\Psi \in \text{Sp}(k, \mathbb{R})$ . Ici  $D\Psi$  est la jacobienne de  $\Psi$ .*

### Preuve 5.5 du théorème 5.5.

*Une transformation canonique est une application de l'espace de phase sur lui-même, qui transforme tout système hamiltonien dans un autre système hamiltonien. Un champ vectoriel  $X$  transformé est noté par  $D\Psi X$ . Par conséquent pour toute fonction  $H$  sur l'espace de phase, nous demandons l'existence (locale) d'une fonction  $F$  telle que  $D\Psi X_H = X_F$ . Nous posons  $K(\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Pour une solution  $\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)$  du système hamiltonien avec hamiltonien  $H$  nous voulons montrer que le système transformé satisfait aux équation d'Hamilton avec hamiltonien  $K$  : Pour simplifier la notation nous posons  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Nous avons*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{x})(t) &= D\Psi\dot{\mathbf{x}} \\ &= D\Psi X_H \\ &= D\Psi J\nabla H = D\Psi J(\nabla K^T D\Psi)^T \\ &= D\Psi J(D\Psi)^T \nabla K \\ &= J\nabla K = X_K. \end{aligned} \quad (5.46)$$

*L'avant dernier signe d'égalité n'est valable pour tout  $K$  que si  $D\Psi J D\Psi^T = J$ , c'est-à-dire  $D\Psi \in \text{Sp}(k, \mathbb{R})$ . La vérification de  $\nabla H = (\nabla K^T D\Psi)^T$  est la plus simple en coordonnées.  $\square$*

Ceci met en évidence une caractéristique utile des transformations canoniques : leurs jacobiniennes sont des matrices symplectiques. C'est pourquoi les transformations canoniques sont parfois aussi appelées transformation symplectiques.

**Exercice :** Montrer que à l'aide de la matrice  $J$  le crochet de Poisson prend la forme suivante

$$\{f, g\} = - \sum_{ij=1}^{2k} (\nabla f)_i J_{ij} (\nabla g)_j = -(\nabla f)^T J (\nabla g) . \quad (5.47)$$

Avec ceci, il est facile de montrer que des transformations symplectiques laissent invariant le crochet de Poisson.

**Corollaire 5.1** *un difféomorphisme  $\Psi$  local et qui peut dépendre du temps est précanonique si et seulement si les composantes  $\Psi^i$  satisfont la relation suivante*

$$\{\Psi_i, \Psi_j\} = -c J_{ij}, \quad c \neq 0. \quad (5.48)$$

**Preuve 5.6** *du corollaire 5.1.*

*L'équation (5.48) n'est rien d'autre que la composante (ij) de l'équation  $D\Psi J (D\Psi)^T = J$ . En effet*

$$(D\Psi J (D\Psi)^T)_{ij} = \sum_{lm} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x^l} J_{lm} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x^m} = (\nabla \Psi_i)^T J (\nabla \Psi_j) = -\{\Psi_i, \Psi_j\} .$$

*Le dernier signe d'égalité est une conséquence de l'exercice.* □

**Exercice :** Montrer encore que la matrice  $M$  est symplectique si et seulement si  $M^T$  est symplectique.



# Chapitre 6

## Mécanique hamiltonienne II : équation d'Hamilton-Jacobi, systèmes intégrables et théorie des perturbations

### 6.1 La théorie de Hamilton-Jacobi

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion d'action comme fonction de la position et du temps finales. Nous avons montré que (5.24)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0 . \quad (6.1)$$

En plus, de la relation (5.25), il suit que

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i .$$

EN remplaçant alors les impulsions  $\mathbf{p}$  dans (6.1) par les dérivées  $\partial S / \partial \mathbf{q}$ , nous obtenons **l'équation de Hamilton-Jacobi**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0 . \quad (6.2)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi représente un point de départ pour la résolution des équations du mouvement bien adaptée pour un traitement systématique de la théorie des perturbations. Avant d'exposer cette méthode, nous rappelons que toute équation aux dérivées partielle du premier ordre possède une solution dépendant d'une fonction arbitraire. Cette solution est appelée intégrale générale de l'équation. Dans les applications en mécanique, ce n'est pas cette intégrale générale qui joue un rôle essentiel, mais ce qu'on appelle l'intégrale complète. L'intégrale complète est la solution générale de l'équation Hamilton-Jacobi qui contient autant de constantes arbitraires

indépendantes qu'il y a de variables indépendantes. Dans notre cas, ces variables sont les positions  $q^i$  et le temps. Pour un système à  $k$  degrés de liberté ceci mène à  $k + 1$  constantes. Comme  $S$  n'apparaît dans (6.2) que par des dérivées, il est toujours possible d'ajouter une constante arbitraire. L'intégrale complète est donc de la forme

$$S = f(t, q^1, \dots, q^k, \alpha_1, \dots, \alpha_k) + A, \quad (6.3)$$

où les  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  et  $A$  sont des constantes arbitraires.

Nous voulons étudier la relation entre cette intégrale complète et la solution de problème mécanique. Pour cela passons par une transformation canonique des variables  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  vers des nouvelles variables  $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$  en choisissant comme fonction génératrice  $f(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ . La fonction génératrice dépend des anciennes coordonnées et des nouvelles impulsions, elle est donc du type 2. Les anciennes impulsions et les nouvelles coordonnées sont données par

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad \beta^i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad \text{et} \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (6.4)$$

Les équations canoniques dans les nouvelles variables sont donc triviales,  $\dot{\alpha}_i = \dot{\beta}^i = 0$  et le mouvement est donné par

$$\alpha_i = \text{const.}, \quad \beta^i = \text{const.}$$

Les  $k$  équations

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta^i$$

permettent d'exprimer les  $k$  positions  $\mathbf{q}$  en fonction du temps et des  $2k$  constantes  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  et du temps.

La solution du problème du mouvement d'un système hamiltonien par la méthode de Hamilton-Jacobi se ramène aux étapes suivantes : En partant de l'hamiltonien, nous écrivons l'équation de Hamilton-Jacobi et cherchons l'intégrale complète (6.3). Bien sûr, ce pas qui requiert la solution d'une équation différentielle partielle est absolument non-trivial et n'est possible dans sa totalité dans des cas particuliers uniquement. En dérivant l'intégrale complète par rapport aux constantes  $\boldsymbol{\alpha}$ , on obtient  $k$  équations algébriques qui contiennent  $2k$  constantes,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta^i.$$

Leur résolution pour les variables  $q^i(t, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$  nous donne les positions (en fonction des constantes du mouvement  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$ ). Les impulsions sont alors obtenues par la relation

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} = p_i.$$

Si nous n'arrivons pas à trouver une intégrale complète mais seulement une intégrale incomplète de l'équation de Hamilton-Jacobi ne dépendant que d'un nombre  $s < k$  de constantes  $\alpha_i$ , il est quand même possible de simplifier le problème en utilisant les équations

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta^i .$$

Nous trouvons des relations entre les variables  $\mathbf{q}$ , ce qui nous permet de réduire le nombre de degrés de liberté.

L'équation de Hamilton-Jacobi prend une forme un peu plus simple dans le cas où la fonction  $H$  ne dépend pas du temps, c'est-à-dire pour un système autonome (ou conservatif). Dans ce cas, la dépendance explicite de l'action du temps se réduit au terme  $-Et$  et nous obtenons (5.31)

$$S = S_0(\mathbf{q}) - Et . \quad (6.5)$$

En substituant l'action réduite  $S_0$ , dans l'équation de Hamilton-Jacobi (6.2) nous trouvons

$$H(\mathbf{q}, \frac{\partial S_0}{\partial \mathbf{q}}) = E . \quad (6.6)$$

Ceci est l'équation de Hamilton-Jacobi raccourcie.

**Remarques :** Dans la théorie des systèmes dynamiques, il est possible de démontrer que localement, tout système peut être transformé dans le système trivial. Ici nous avons vu que pour des systèmes hamiltoniens, ceci peut être réalisé au moyen d'une transformation canonique.

En général, il n'est pas plus facile de résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi (6.2), équation différentielle partielle, que de résoudre directement les équations canoniques en  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Cependant, il existe des exceptions importantes. Plus pertinent : la méthode de Hamilton-Jacobi s'adapte très bien à un développement perturbatif.

En plus, l'équation de Hamilton-Jacobi correspond à l'équation eikonale qui est à la base de la limite optique de l'électrodynamique (voir mon cours d'électrodynamique II).

Nous illustrons la méthode avec un exemple simple à un degré de liberté,  $k = 1$ , l'oscillateur harmonique :

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 . \quad (6.7)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi raccourcie est alors

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E , \quad (6.8)$$

où  $S_0 = S_0(q)$  et l'action complète est donnée par

$$S(q, t) = S_0(q) - Et. \quad (6.9)$$

Comme nous le verrons plus tard, pour un système autonome, cet Ansatz pour la dépendance du temps est toujours possible. Avec  $S'_0 = \frac{dS_0}{dq}$  l'éq. (6.8) devient

$$\frac{1}{2m}S_0'^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \quad \text{donc} \quad S'_0 = m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}. \quad (6.10)$$

Ceci donne

$$S = m\omega \int_0^q dq' \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q'^2} - Et. \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial E} = m\omega \partial_E \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2} = \frac{1}{\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}} \neq 0$$

pour  $q^2 < \frac{2E}{m\omega^2}$ , (6.11) est une solution de l'équation de Hamilton–Jacobi. Le mouvement est déterminé par

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q^2}, \quad (6.12)$$

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\omega} \int_0^q \frac{dq'}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q'^2}} - t \quad (6.13)$$

Pour les conditions initiales  $q(0) = q_0$  et  $p(0) = p_0$ , nous obtenons la relation suivante entre  $(E, \beta)$  et  $(p_0, q_0)$  :

$$E = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2 \quad \text{et} \quad (6.14)$$

$$\beta = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \frac{q_0}{\sqrt{\frac{p_0^2}{m\omega^2} - q_0^2}} \right). \quad (6.15)$$

Pour l'expressions de  $\beta$ , nous avons utilisé

$$\int_0^x \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \arcsin \left( \frac{x}{a} \right).$$

La résolution de (6.13) donne alors

$$\int_0^q \frac{dq'}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - q'^2}} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} q \right) = \omega(\beta + t) \quad (6.16)$$

$$q = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} \sin(\omega t + \omega\beta). \quad (6.17)$$

Donc  $\beta$  joue le rôle d'un temps initial et  $E$  est bien sûr l'énergie du système.

## 6.2 Systèmes intégrables

**Définition 6.1** Les fonctions  $H_1, \dots, H_r$  sur l'espace de phase sont dites "en involution" si  $\{H_i, H_j\} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq r$ .

Le théorème suivant est appelé théorème de Jacobi. Il donne des conditions pour lesquelles l'intégration des équations canoniques se réduit (localement) à des inversions de fonctions et intégrales simples (quadratures) :

**Théorème 6.1** de Jacobi.

Soit  $\mathcal{P}$  l'espace des phases de dimension  $2k$ . Si  $H_1, \dots, H_k$  sont des fonctions sur  $\mathcal{P}$  en involution et leurs gradients (nous posons encore  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ )

$$\frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{x}}, \dots, \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{x}}$$

sont (localement) linéairement indépendants, il est possible de trouver par simple intégration (quadrature) des fonctions  $G_1, \dots, G_k \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$  telles que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : (q^1, \dots, q^k, p_1, \dots, p_k) &\mapsto (\beta^1, \dots, \beta^k, \alpha_1, \dots, \alpha_k) \\ \beta^i &= G_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \alpha_i = H_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

est canonique. Il existe une transformation canonique  $\Psi$  avec

$$\{H_i, H_j\} = \{G_i, G_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{H_i, G_j\} = \delta_{ij}. \quad (6.19)$$

**Preuve 6.1** du théorème 6.1.

L'équation (6.19) est équivalente à  $-\{\Psi_i, \Psi_j\} = J_{ij}$ . D'après le corollaire 5.1, elle est vérifiée si et seulement si  $\Psi$  est une transformation canonique. Comme le rang de  $\left(\frac{\partial H_i}{\partial x^j}\right)$  est maximal (il vaut  $k$ ), nous pouvons toujours arriver au moyen de transformations élémentaires de la forme

$$q^i \mapsto -p_i, \quad p_i \mapsto q^i \quad \text{et} \quad q_j \mapsto q_j, \quad p_j \mapsto p_j \quad \forall j \neq i$$

à ce que la matrice

$$H_{\mathbf{p}} := \left( \frac{\partial H_i}{\partial p_j} \right)$$

ne soit pas singulière, i.e  $\det H_{\mathbf{p}} \neq 0$ . Avec ceci nous pouvons résoudre les équations

$$\alpha_i = H_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \alpha_1 = H = E, \quad (6.20)$$

pour les  $p_i = f_i(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ . Nous définissons encore les matrices

$$F_{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial q^j} \right) \text{ et } (H_{\mathbf{q}})_{ij} = \left( \frac{\partial H_i}{\partial q^j} \right). \quad (6.21)$$

Nous démontrons que la matrice  $F$  est symétrique. Pour ceci nous prenons la dérivée de l'identité  $\alpha_i = H_i(\mathbf{q}, F(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}))$  par rapport à  $\mathbf{q}$  et obtenons

$$0 = H_{\mathbf{q}} + H_{\mathbf{p}} \cdot F_{\mathbf{q}}. \quad (6.22)$$

L'identité  $\{H_i, H_j\} = 0$  s'écrit sous forme matricielle

$$H_{\mathbf{p}} H_{\mathbf{q}}^T - H_{\mathbf{q}} H_{\mathbf{p}}^T = 0. \quad (6.23)$$

En multipliant (6.22) de droite avec  $H_{\mathbf{p}}^T$  et en utilisant (6.23), nous obtenons

$$H_{\mathbf{q}} H_{\mathbf{p}}^T + H_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{q}} H_{\mathbf{p}}^T = H_{\mathbf{p}} H_{\mathbf{q}}^T + H_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{q}} H_{\mathbf{p}}^T = 0.$$

Comme  $H_{\mathbf{p}}$  n'est pas singulière, il suit

$$H_{\mathbf{q}}^T + F_{\mathbf{q}} H_{\mathbf{p}}^T = 0 \Rightarrow H_{\mathbf{q}} + H_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{q}}^T = 0.$$

En comparant ceci avec (6.22), il suit  $F_{\mathbf{q}} = F_{\mathbf{q}}^T$ , et par conséquent

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^j} - \frac{\partial f_j}{\partial q^i} = 0. \quad (6.24)$$

Autrement dit, le rotationnel de  $(f_i)$  est nul. Il existe alors une fonction  $S$  telle que  $f_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ . (Ceci est le lemme de Poincaré.) De plus,

$$\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial \alpha_j} \right) = \det \left( \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_j} \right) = \det H_{\mathbf{p}}^{-1} \neq 0.$$

La fonction  $S$  génère donc localement une transformation canonique de type 2 par

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \quad (6.25)$$

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (6.26)$$

Les fonctions  $G_i$  sont obtenues en résolvant les  $\beta_i$  de la relation (6.25) pour  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{p}$ ,  $G_i = \beta_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . La fonction  $S$  est obtenue par intégration

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \sum_i f_i(\mathbf{q}', \boldsymbol{\alpha}) dq^i. \quad (6.27)$$

(Ceci est aussi une conséquence du lemme de Poincaré.) Par la relation (6.24), cette intégrale est indépendante du chemin. La fonction génératrice  $S$  est unique à une fonction des  $\boldsymbol{\alpha}$  près.  $\square$

Alors, par ce théorème, nous pouvons définir la notion d'intégrabilité :

**Définition 6.2** Un système canonique autonome avec fonction de Hamilton  $H$  est appelé **intégrable** si il existe  $k - 1$  intégrales premières  $H_2, \dots, H_k$  qui sont en involution et qui sont telles que les vecteurs  $\nabla H_1, \dots, \nabla H_k$  avec  $H_1 = H$  sont des vecteurs linéairement indépendants à tout point  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{P}$  (en dehors d'un sous-espace de dimension inférieure à  $2k$ ).

Nous savons déjà que si  $\nabla H \neq 0$ , le champs hamiltonien  $X_H = J\nabla H \neq 0$  et nous pouvons donc lisser le champs  $X_H$  localement, i.e. le transformer en  $X_H^T = (1, 0, \dots, 0)$ . Dans la démonstration du théorème précédent, nous avons vu que pour un système intégrable, nous pouvons trouver la fonction génératrice de la transformation canonique qui lisse notre système  $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ , par simple intégration (quadrature) et des inversions. Les équations canoniques dans les variables  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  données par (6.25) sont simplement

$$\{\alpha_i, H_1\} = \dot{\alpha}_i = 0$$

et

$$\{\beta_i, H_1\} = \dot{\beta}_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 0, & 2 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Par conséquent, cette transformation lisse le système.

Par exemple, dans un système autonome  $\mathbf{P}$ ,  $H$ ,  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{CM} - \mathbf{V}t$  sont des quantités conservées. (Ici  $\mathbf{X}^{CM}$  est le centre de masse et  $\mathbf{V}$  est sa vitesse.) Les composantes des quantités conservées sont des intégrales premières. Les quantités suivantes sont en involution :  $\mathbf{P}$ ,  $H$ ,  $|\mathbf{L}|$ ,  $L_3$  (exercice). C'est pourquoi le problème à  $N = 2$  corps ( $k = 6$ ) est intégrable, mais non le problème à  $N$  corps pour  $N \geq 3$ .

En plus de l'intégrabilité nous démontrons encore que, dans la cas où l'ensemble des trajectoire avec  $\boldsymbol{\alpha} = \text{const.}$  est compact, il est difféomorphe au tore  $T^k$  de dimension  $k$ ,

$$T^k = \{\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_k) | \phi_j \in \mathbb{R}/\text{mod } 2\pi\}.$$

**Théorème 6.2** (de Liouville)

Nous considérons des ensembles de trajectoires qui ont les intégrales premières fixes d'un système intégrable,

$$\mathcal{M}_\alpha = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{P} : H_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \alpha_i, 1 \leq i \leq k\}. \quad (6.28)$$

Les énoncés suivants sont vérifiés :

1.  $\mathcal{M}_\alpha$  est une variété invariante sous le flot de  $H = H_1$ .
2. Si  $\mathcal{M}_\alpha$  est compacte et connexe, elle est difféomorphe au tore  $T^k$ . Le flot hamiltonien induit un mouvement de la forme suivante sur le tore

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(\alpha), \quad \phi(t) = \omega(\alpha)t + \phi_0. \quad (6.29)$$

**Preuve 6.2** du théorème 6.2.

La seule chose qui reste à démontrer est que  $\mathcal{M}_\alpha$  est difféomorphe au tore. Pour ceci nous utilisons le lemme suivante de la géométrie différentielle (pour une démonstration élémentaire voir [1]).

**Lemme 6.1** Soit  $\mathcal{M}^k$  une variété compacte, connexe et  $X_j$ ,  $1 \leq j \leq k$  des champs vectoriels sur  $\mathcal{M}^k$ , qui sont linéairement indépendants et qui commutent,  $[X_j, X_j] = 0$ . Alors,  $\mathcal{M}^k$  est difféomorphe au tore  $T^k$ .

(Nous avons appliqué une version plus fort de ce lemme dans le cas  $k = 2$  ou nous avons utiliser que le tore  $T^2$  est la seule variété bi-dimensionnelle compacte qui admet des champs vectoriels sans zéro.)

Il faut alors juste trouver de tels champs vectoriels. Mais évidemment les champs  $X_j = X_{H_j}$  ont les propriétés souhaitées : Ils sont tangent à  $\mathcal{M}_\alpha$  car  $X_{H_i}H_j = \{H_i, H_j\} = 0$ , donc les fonctions  $H_i$  sont constantes le long du flot des  $X_j$ , ce qui implique que ces champs sont tangent à  $\mathcal{M}_\alpha$ . En plus,

$$[X_i, X_j] = [X_{H_i}, X_{H_j}] = X_{\{H_i, H_j\}} = 0. \quad \square$$

### 6.3 Variables d'angle et d'action

Nous considérons d'abord un système canonique autonome avec 1 degré de liberté uniquement. Ce système possède la propriété que toutes les orbites sont périodiques et non-dégénérées dans un intervalle d'énergie  $[E_1, E_2]$ . L'hamiltonien est de la forme naturelle,

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$



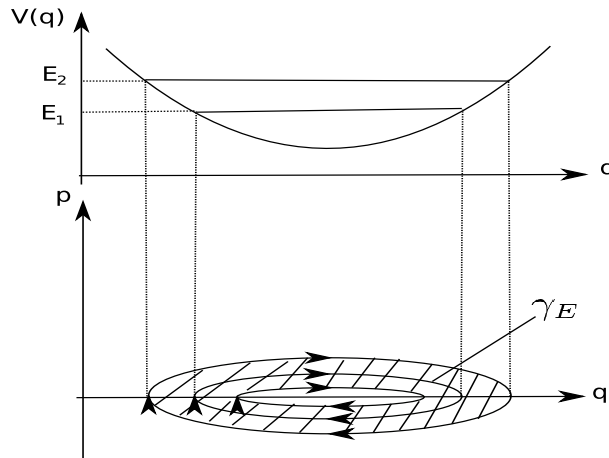


FIG. 6.1 – Le potentiel d'un système à 1 degré de liberté et les orbites dans l'espace des phases.

Cette situation est esquissée dans la figure 6.1. Nous supposons aussi que dans le domaine de l'espace des phases considéré, il n'y a pas de point d'équilibre. Le long d'une orbite  $\gamma_E$ , nous définissons

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_E} p dq. \quad (6.30)$$

$J(E)$  représente l'aire de l'espace des phases à l'intérieur de  $\gamma_E$  divisée par  $2\pi$ . Alors, l'équation de Jacobi raccourcie est

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E. \quad (6.31)$$

Soit  $S_0(q, E)$  une solution de (6.31). Nous posons

$$S(q, J) := S_0(q, E(J)).$$

$S$  définit une transformation canonique avec

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \phi = \frac{\partial S}{\partial J}(q, J),$$

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_E} \frac{\partial S}{\partial q}(q, J) dq.$$

La dérivation par rapport à  $J$  donne

$$1 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial J} dq = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \phi}{\partial q} dq = \frac{\Delta \phi}{2\pi}.$$

La fonction de Hamilton par rapport aux nouvelles variables  $(J, \phi)$  est  $E(J)$ , par conséquent

$$\dot{J} = -\frac{\partial E}{\partial \phi} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\phi} = \frac{\partial E}{\partial J} = \text{const} =: \omega. \quad (6.32)$$

Donc

$$\phi = \omega t + \delta \quad (6.33)$$

$\omega = \frac{\partial E}{\partial J}$  est alors la fréquence angulaire de l'orbite et si  $T$  dénomme la période de l'orbite, nous trouvons

$$\Delta\phi = \omega T = T \frac{\partial E}{\partial J} = 2\pi. \quad (6.34)$$

La transformation canonique

$$(q, p) \mapsto (\phi, J)$$

transforme le domaine considéré en un cercle en  $\phi$  et un intervalle en  $J$ . Pour un  $J$  fixé, l'orbite est un cercle parcouru avec vitesse angulaire  $\omega$  constante. La quantité  $\phi$  est appelée la variable angulaire et  $J$  est appelée la variable d'action.

### 6.3.1 Construction des variables d'angle et d'action en $k$ dimensions

Ce résultat peut être généralisé à des systèmes intégrables possédant  $k$  degrés de liberté :

**Théorème 6.3** (*Arnold, Jost*)

Soit  $H$  l'hamiltonien d'un système autonome intégrable à  $k$  degrés de liberté et soient  $H = H_1, H_2, \dots, H_k$ ,  $k$  intégrales premières en involution, telles que  $\nabla H_1, \dots, \nabla H_k$  sont linéairement indépendants sur

$$\mathcal{M}_{\alpha} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P} \mid H_1(\mathbf{x}) = \alpha_1, \dots, H_k(\mathbf{x}) = \alpha_k\}.$$

Si  $\mathcal{M}_{\alpha}$  est connexe et compact, il est alors difféomorphe au tore de dimension  $k$ . De plus, il existe un  $\epsilon > 0$  tel que dans l'intervalle  $\bigcup_{|\alpha - \alpha'| < \epsilon} \mathcal{M}_{\alpha'}$  des coordonnées canoniques  $\phi^1, \dots, \phi^k, J_1, \dots, J_k$  (variables d'angle et d'action) peuvent être introduites telles que les  $H_i$  sont des fonctions des variables  $J_i$  uniquement.

Ceci est une simple conséquence du théorème 6.2

Soit alors  $\mathcal{M}_\alpha$  le tore invariant  $T^k$  et  $\gamma_j$  le cycle  $0 \leq \phi_j \leq 2\pi$ ,  $\phi_i = 0 \forall i \neq j$  sur  $T^k$ . Nous posons

$$J_j(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} . \quad (6.35)$$

Comme le tore, le cycle  $\gamma_j$  n'est pas uniquement défini, mais la variable  $J_j(\alpha)$  l'est (à une simple renumérotation près). En effet, comme  $p_i = f_i(\mathbf{q}, \alpha) = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ , localement

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = dS - \frac{\partial S}{\partial \alpha^i} d\alpha^i = dS \quad \text{sur } \mathcal{M}_\alpha . \quad (6.36)$$

$S$  est donc une fonction à valeurs multiples sur le tore  $\mathcal{M}_\alpha$ ,

$$\Delta_j S = S(\dots, \phi_j + 2\pi, \dots, \mathbf{J}(\alpha)) - S(\dots, \phi_j, \dots, \mathbf{J}(\alpha)) = 2\pi J_j(\alpha) . \quad (6.37)$$

Les  $J_i(\alpha)$  sont les variables d'action et les  $\phi_j$  celles d'angles. Nous supposons encore que  $\det \left( \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_n} \right) \neq 0$ . Dans ce cas, la transformation  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\phi, \mathbf{J})$  est une transformation canonique car localement nous pouvons inverser  $\mathbf{J}(\alpha)$  en  $\alpha(\mathbf{J})$ . La fonction génératrice  $S(\mathbf{q}, \alpha) = S(\mathbf{q}, \alpha(\mathbf{J}))$  peut donc être comprise comme fonction de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{J}$ , donc  $\mathbf{p} = S_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{J})$ . Localement, l'équation 6.36 implique

$$S(\mathbf{q}, \alpha) - S(\mathbf{q}_0, \alpha) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} dS = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} dS = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{q}$$

Sans restriction, nous pouvons encore poser  $S(\mathbf{q}_0, \alpha) = 0$ . Par conséquent,  $S(\mathbf{q}, \mathbf{J})$  est une fonction génératrice du type 2 :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} , \quad \phi = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{J}} .$$

On peut encore démontrer que cette transformation est bien définie non seulement dans un voisinage de  $\mathbf{q}_0$  mais dans toute un voisinage de  $\mathcal{M}_\alpha$ . Comme  $S$ , la variable  $\phi$  est également à valeurs multiples avec

$$\Delta_i \phi_j = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial J_j} = 2\pi \delta_{ij} .$$

**Remarque :** En générale, il existe certaines valeurs  $\alpha$  pour lesquelles les fonctions  $H_j$  ne sont pas indépendantes. Pour ces valeurs, la variété  $\mathcal{M}_\alpha$  n'existe pas ou est de dimension inférieure. De telles valeurs critiques de  $\alpha$  correspondent à des séparatrices qui divisent l'espace de phase en parties différentes avec  $\mathcal{M}_\alpha$  compact et non-compact.

Exemple (voir fig. 6.2) : Le pendule lourd avec  $H = \frac{1}{2}p^2 + \cos q$ ,  $(q, p) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1$ . La séparatrice  $H = 1$  sépare le mouvement oscillatoire des rotations non-bornées.  $\nabla H = (\sin q, p) = 0$  aux points  $(q, p) = (0 \bmod 2\pi, 0)$ . Ce sont les points de croisement de la séparatrice où  $\mathcal{M}_E$  n'est pas bien définie. Les points  $(\pi \bmod 2\pi, 0)$  correspondent au point d'équilibre à énergie  $E = H = -1$ . Ici  $\mathcal{M}_E$  se réduit à un seul point.

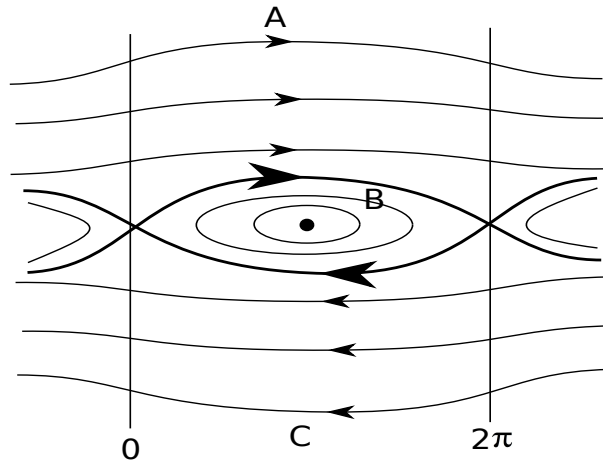


FIG. 6.2 – La séparatrice  $H = 1$  indiquée en gras sépare les orbites fermées,  $-1 < H < 1$  où le pendule oscille et les orbites infinies  $H > 1$  où le pendule fait des rotations sans s'arrêter.

### 6.3.2 Mouvements quasi-périodiques

**Définition 6.3** Soit  $T^k$  le tore de dimension  $k$ ,  $(\phi_1, \dots, \phi_k) \bmod 2\pi = \phi$ . Un mouvement quasi-périodique est un groupe de transformations  $T^k \rightarrow T^k$  à un paramètre déterminé par l'équation différentielle

$$\dot{\phi} = \omega, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) = \text{const.} \quad (6.38)$$

Ce mouvement est alors de la forme  $\phi(t) = \omega t + \phi_0$  et les trajectoires sont des droites sur  $T^k$ .

Les quantités  $\omega_1, \dots, \omega_k$  sont appelées les fréquences du mouvement quasi-périodique.

Les fréquences sont appelées **indépendantes** si elles sont linéairement indépendantes sur le corps des nombres rationnelles  $\mathbb{Q}$ . C'est-à-dire si  $(\mathbf{n} \cdot \omega) = 0$  pour un  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$ , il suit que  $\mathbf{n} = 0$ .

Par rapport aux nouvelles coordonnées,  $H = H_1(J_1, \dots, J_k)$ , donc

$$\dot{J}_j = \frac{\partial H}{\partial \phi^j} = 0 \quad (6.39)$$

et

$$\dot{\phi}^i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega^i = \text{const} \Rightarrow \phi^i = \omega^i t + \delta. \quad (6.40)$$

Le flot pour  $J_1, \dots, J_k$  donnés est alors un mouvement quasi-périodique sur le tore avec des fréquences angulaires  $\omega^j(J_1, \dots, J_k)$ . Projeté sur un cycle  $\phi_j$  ce mouvement est toujours périodique. Si les fréquences sont commensurables (non indépendantes), i.e. s'il existe des entiers  $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$  tels que

$$\sum_{i=1}^k m_i \omega^i = 0,$$

le mouvement est alors confiné à un sous-espace de dimension  $d \geq 2$  périodique. Si les fréquences sont indépendantes, le mouvement est dense sur le tore (voir corollaire suivant).

### 6.3.3 Moyennes

Soit  $f$  une fonction (intégrable) sur  $T^k$ .

**Définition 6.4** *La moyenne spatiale de  $f$  est le nombre*

$$\bar{f} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \cdots d\phi_k f(\boldsymbol{\phi})$$

Nous considérons aussi la moyenne de  $f$  comme fonction sur une orbite  $\boldsymbol{\phi}(t) = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\phi}_0$

**Définition 6.5** *La moyenne temporelle est le nombre*

$$f^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\phi}_0),$$

(si cette limite existe).

**Théorème 6.4 (Théorème sur les moyennes) :**

*Si les fréquences  $\omega_i$  sont indépendantes, la moyenne temporelle existe pour tout  $\boldsymbol{\phi}_0$  et elle est égale à la moyenne spatiale si  $f$  est continue par morceaux.*

**Corollaire 6.1** *Si les fréquences sont indépendantes, toute trajectoire  $\{\boldsymbol{\phi}(t) | t \in \mathbb{R}\}$  est dense dans  $T^k$ .*

**Preuve 6.3** (du corollaire)

Supposons le contraire. Alors il existe une trajectoire  $\phi(t)$  et un ouvert  $D \in T^k$  tels que aucun point de  $\phi(t)$  ne rencontre  $D$ . Mais il est facile de construire une fonction continue qui vaut zéro à l'extérieur de  $D$  et qui a moyenne spatiale e valeur 1. Sa moyenne temporelle est alors évidemment  $0 \neq 1$ .  $\square$

**Preuve 6.4** (du théorème)

Nous montrons d'abord que le théorème est vérifié pour des exponentielles,  $f = \exp(i\mathbf{n} \cdot \phi)$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k$ .

Pour  $\mathbf{n} = 0$  évidemment  $\bar{f} = f^* = 1$ . Pour  $\mathbf{n} \neq 0$ ,  $\bar{f} = 0$ . Mais

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt f(\omega t + \phi_0) = \frac{\exp(i\mathbf{n} \cdot \phi_0) \exp(i(\mathbf{n} \cdot \omega)T) - 1}{T i(\mathbf{n} \cdot \omega)}.$$

Donc

$$|f^*| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{2}{|(\mathbf{n} \cdot \omega)|} = 0.$$

La linéarité de l'intégration implique alors que le théorème est vérifié pour des polynômes trigonométriques,

$$f = \sum_{|\mathbf{n}| \leq N} f_{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{n} \cdot \phi)}.$$

Mais toute fonction intégrable au sens de Riemann, donc toute fonction continue par morceaux sur le tore, peut être approximée de façon arbitrairement proche par un polynôme trigonométrique (série de Fourier).  $\square$

**Définition 6.6** Un système hamiltonien (6.39, 6.40) est appelé non-dégénéré si

$$\det \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \right) = \det \left( \frac{\partial^2 H}{\partial J_i \partial J_j} \right) \neq 0.$$

Dans le cas non-dégénéré, nous pouvons alors choisir les  $\omega$  comme variables (d'impulsion) indépendantes au lieu des  $\mathbf{J}$ . Pour presque toutes les valeurs des  $\omega$ , les orbites sont denses sur le tore  $\mathbf{J} = \text{constant}$ . Il suit alors

**Corollaire 6.2** Si le système est non-dégénéré, les tores invariants  $\mathbf{J} = \text{const.}$  sont définis de façon unique, indépendamment du choix des variables d'angle et d'action,  $(\phi, \mathbf{J})$ .

]

**Preuve 6.5** Pour la "majorité" de valeurs  $\mathbf{J}$  les fréquences  $\omega$  sont indépendantes et donc les tores peuvent être définis comme l'adhérence des orbites (l'ensemble fermé le plus petit qui contient toute l'orbite  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$ ).

(Si le système est dégénéré, les tores invariants ne sont en général pas uniques.)

## 6.4 Théorie des perturbations

### 6.4.1 Moyenner les perturbations

La plupart de systèmes qu'on rencontre dans la nature ne sont pas intégrables. Exemple : Le système solaire avec ses 8 planètes (et les nombreuses lunes). Jusqu'ici, vous connaissez surtout des systèmes intégrables, comme les systèmes à deux corps (Kepler), l'oscillateur harmonique, la toupie libre ou la toupie de Lagrange, etc. Dans tous ces exemples nous avons trouvé que le mouvement correspond à des enroulements sur des tores qui remplissent les tores invariants de dimension  $k$  de façon dense.

Mais ce comportement n'est pas du tout générique et il se peut qu'une trajectoire d'un système à  $k$  degrés de liberté remplisse de façon dense jusqu'à  $2k - 1$  dimensions dans l'espace de phase. (Par exemple le mouvement géodésique sur un espace à courbure négative.) De tels systèmes ne sont pas intégrables et ne permettent pas d'intégrales premières indépendantes de  $H$ . L'étude de tels systèmes est un domaine actif de la physique mathématique (chaos, théorie ergodique, ...).

Mais souvent, un système physique est proche d'un système intégrable tel que dans les variables d'angle et d'action nous ayons

$$H = H_0(\mathbf{J}) + \epsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi}). \quad (6.41)$$

Ici,  $(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J})$  sont les variables d'angles et d'action du système intégrable  $H_0$ , et  $\epsilon \ll 1$ . Nous considérons d'abord le cas plus général (pas nécessairement canonique d'un système de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\phi}} &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}) + \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi}), \\ \dot{\mathbf{J}} &= \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\phi}) \quad \epsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Nous considérons ce système dynamique sur  $T^k \times G$  où  $T^k = \{(\phi_1, \dots, \phi_k) \bmod 2\pi\}$  est le tore et  $G \subset \mathbb{R}^k = \{\mathbf{J} = (J_1, \dots, J_k)\}$ . Pour  $\epsilon = 0$ , le mouvement est quasi-périodique sur le tore  $T^k$  avec, au plus,  $k$  fréquences indépendantes. Le principe des moyennes pour (6.42) consiste à remplacer  $\mathbf{g}$  par sa moyenne  $\bar{\mathbf{g}}$ ,

$$\dot{\mathbf{J}} = \epsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J}), \quad \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \cdots d\phi_k g(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J}). \quad (6.43)$$

Nous supposons que (6.43) est une bonne approximation pour (6.42). Ce principe n'est ni un théorème, ni un axiome ou une définition, mais plutôt une proposition physique qui est encore formulée vaguement et qui, dans le sens strict, est fautive comme nous le verrons. Mais de telles propositions

sont souvent très fécondes pour un traitement plus rigoureux. En remplaçant (6.42) par (6.43), nous négligeons le terme

$$\epsilon \tilde{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J}) = \epsilon [\mathbf{g}(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J}) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{J})].$$

Ce terme est d'ordre  $\epsilon$  comme  $\mathbf{g}$  et  $\bar{\mathbf{g}}$ . Pour mieux comprendre le rôle de  $\mathbf{g}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}$  et  $\tilde{\mathbf{g}}$  nous considérons l'exemple le plus simple,  $k = 1$ , avec

$$\dot{\phi} = \omega \neq 0 \quad \text{et} \quad \dot{J} = \epsilon g(\phi). \quad (6.44)$$

Nous montrons que pour  $0 \leq t \leq 1/\epsilon$ ,

$$|I(t) - J(t)| < c\epsilon \quad \text{où} \quad I(t) = \epsilon \bar{g}t$$

et  $J(t)$  est la solution de (6.44).

$$\begin{aligned} J(t) - J(0) &= \epsilon \int_0^t g(\phi_0 + \omega t) dt = \epsilon \int_0^t [\bar{g} + \tilde{g}(\phi_0 + \omega t)] dt \\ &= \epsilon \bar{g}t + \frac{\epsilon}{\omega} \int_0^{\omega t} \tilde{g}(\phi) d\phi = I(t) - I(0) + \frac{\epsilon}{\omega} h(\omega t). \end{aligned}$$

La fonction  $h(\phi) = \int_0^\phi \tilde{g}(\phi') d\phi'$  est périodique et donc bornée (parce que  $\int_0^{2\pi} \tilde{g}(\phi) d\phi = 0$ ).

Par conséquent, la variation de  $J$  avec le temps contient deux parties : une oscillation avec amplitude d'ordre  $\epsilon$  qui dépend de  $\tilde{g}$  et une évolution systématique avec vitesse  $\epsilon \bar{g}$  (voir fig. 6.3)

Le principe de la moyenne est basé sur l'hypothèse que le système (6.42) peut être séparé en une "évolution" (6.43) et de petites oscillations. En général, ceci n'est pas vrai.

Nous l'appliquons cependant pour le cas d'un système hamiltonien avec équations canoniques

$$\dot{\phi}^i = \{H, \phi^i\} = \frac{\partial H_0}{\partial J_i} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_i} = \omega^i(J) + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_i}, \quad (6.45)$$

$$\dot{J}_i = \{H, J_i\} = \epsilon \{H_1, J_i\} = -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi^i}. \quad (6.46)$$

Dans ce cas

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\phi}} H_1(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J}) d\boldsymbol{\phi} = 0.$$

En d'autres termes, il n'y a pas d'évolution systématique dans un système hamiltonien non-dégénéré. Une variante de cette dérivation non-rigoureuse



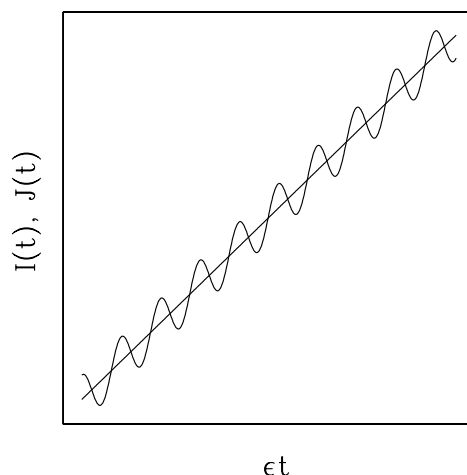


FIG. 6.3 – Le principe de la moyenne. Le terme systématique est capturé par la moyenne  $I(t)$  et seule la petite oscillation est négligée.

est ce qu'on appelle le théorème de Laplace : *les axes principales des ellipses Keplériennes n'ont pas de perturbations "séculaires"*. (Ce qui n'est pas du tout vrai!)

Pour mieux justifier le principe de la moyenne, nous formulons alors un théorème qui le démontre pour le cas d'une seule fréquence sur l'intervalle de temps  $0 \leq t \leq 1/\epsilon$ .

Nous considérons le système de  $\ell + 1$  équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega(\mathbf{J}) + \epsilon f(\mathbf{J}, \phi), \\ \dot{\mathbf{J}} &= \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{J}, \phi) \quad \epsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (6.47)$$

$\phi \in \mathbb{S}^1$ ,  $\mathbf{J} \in G \subset \mathbb{R}^\ell$ ; et  $f(\mathbf{J}, \phi + 2\pi) = f(\mathbf{J}, \phi)$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{J}, \phi + 2\pi) = \mathbf{g}(\mathbf{J}, \phi)$ . Nous le comparons avec le système moyenné où l'équation pour  $\mathbf{J}$  est remplacée par

$$\dot{\mathbf{I}} = \epsilon \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{I}) \quad \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{I}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\mathbf{I}, \phi) d\phi. \quad (6.48)$$

Nous dénotons par  $(\phi(t), \mathbf{J}(t))$  la solution de (6.47) avec condition initiale  $(\phi_0, \mathbf{J}_0)$  et par  $(\phi(t), \mathbf{I}(t))$  celle de (6.48) avec la même condition initiale.

**Théorème 6.5** *Si les conditions 1), 2) et 3) ci-dessous sont satisfaites,*

$$|J(t) - I(t)| < c\epsilon \quad \forall t \in [0, 1/\epsilon]$$

pour  $\epsilon$  suffisamment petit,  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ .

1. Les fonctions  $\omega$ ,  $f$  et  $\mathbf{g}$  ainsi que leurs premières et deuxièmes dérivées sont bien définies et bornées pour  $\mathbf{J} \in G$ , et le domaine  $G$  est borné,

$$\|\omega, f, \mathbf{g}\|_{C^2(G \times \mathbb{S}^1)} < a.$$

2. Dans le domaine borné  $G$ ,  $\omega > b > 0$ .

3. Pour  $0 \leq t \leq 1/\epsilon$ , il existe un  $d$  tel que  $\mathbf{J} \in G \quad \forall \mathbf{J}$ , tels que pour un  $t$  la distance  $\|\mathbf{J} - \mathbf{I}(t)\| < d$ .

La constante  $c$  dépend de  $a$ ,  $b$  et  $d$  mais pas de  $\epsilon$ .

La preuve détaillée de ce théorème se trouve dans ([1], p294ff).

Ainsi, si  $\omega > b > 0$ , la solution avec perturbation moyennée reste longtemps proche de la solution exacte. Pour un système hamiltonien, ceci implique que les déviations de la solution non-perturbées sont petites et oscillatoires.

Pour mieux comprendre ce qui peut arriver pour un système avec plusieurs fréquences, nous écrivons encore une fois la solution d'ordre 0, ou solution non perturbée :

$$J_i = \text{const.} \quad \phi^i = \omega^i t + \phi_0^i. \quad (6.49)$$

Nous développons  $H_1$  en série de Fourier dans la variable périodique  $\phi$

$$H_1 = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k} h(\mathbf{m}, \mathbf{J}) e^{i(\mathbf{m} \cdot \phi)}. \quad (6.50)$$

Nous intégrons alors (6.46) et (6.45) avec la solution (6.49) et l'Ansatz (6.50) par rapport au temps. Pour obtenir les solutions perturbées  $\mathbf{J}^{(1)}(t)$ ,  $\phi^{(1)}(t)$ , nous trouvons des termes comportants des expressions

$$\frac{e^{i(\mathbf{m} \cdot \phi)}}{(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})} \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^k.$$

Ces termes deviennent importants si  $(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})$  est une grandeur petite ou nulle, et ceci, même si  $H_1$  est très petit. Ceci nous donne des perturbations 'séculaires', lesquelles sont croissantes proportionnellement au temps. Si  $(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$ , l'exponentielle  $e^{i(\mathbf{m} \cdot \phi)}$  est une constante et son intégrale est proportionnelle au temps  $t$ . Même si les fréquences  $\boldsymbol{\omega}$  sont indépendantes, si  $k > 1$  elles sont toujours arbitrairement proches de fréquences commensurables. Les fréquences commensurables sont denses dans  $\mathbb{R}^k$ .

C'est le problème des petits dénominateurs. Excepté ce problème, la façon de procéder est évidente : les solutions  $\mathbf{J}^{(1)}(t)$  et  $\phi^{(1)}(t)$  des éqs. (6.46) et (6.45) sont déterminées par intégration. Puis, nous les insérons du côté droit des

équations canoniques. Par intégration par rapport au temps, nous trouvons alors  $\mathbf{J}^{(2)}(t)$  et  $\phi^{(2)}(t)$ , et ainsi de suite par itérations successives.

La théorie des perturbations pour des systèmes hamiltoniens proches d'un système intégrable a été développée en profondeur aux 18ème et 19ème siècles et jusqu'au début du 20ème siècle. Un des résultats les plus significatifs en est la découverte de la planète Neptune. En 1781, F.W. Herschel a réalisé que l'orbite calculée de la planète Uranus ne correspondait pas à l'orbite observée. Ceci a conduit Bessel à postuler en 1840 l'existence d'une planète supplémentaire. Adams et le Verrier ont fait les calculs pour déterminer l'orbite de cette hypothétique planète. Après que l'astronome J. Galle ait eu connaissance des calculs de le Verrier, il localisa Neptune après une heure seulement d'observation.

Pour discuter la stabilité d'un système hamiltonien perturbé, il faut surtout analyser ce qui se passe dans le voisinage des fréquences commensurables. Ce problème est difficile; il demande une analyse qualitative des points critiques du système. La vraie démonstration de la stabilité d'un système comme notre système solaire n'a été trouvée que dans les années 1960 par les mathématiciens Kolmogorov, Arnold et Moser (théorie de KAM). Malheureusement, le temps manque pour développer ici ce sujet fascinant.

## 6.4.2 Invariants adiabatiques

Nous considérons un système hamiltonien avec un degré de liberté et fonction de Hamilton  $H(q, p; \lambda)$  qui dépend d'un paramètre  $\lambda$ . Par exemple, le pendule mathématique (de masse  $m = 1$ )

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{g}{\ell^2} q^2 . \quad (6.51)$$

Le paramètre pourrait être  $\ell$  ou  $g$ . Nous supposons que  $\lambda$  varie lentement avec le temps.

Nous allons trouver un phénomène remarquable : dans la limite où le taux de variation de  $\lambda$ ,  $\dot{\lambda}/\lambda$  tend vers 0, deux quantités, qui en générales sont indépendantes deviennent fonction l'une de l'autre. Par exemple si la longueur du pendule change très lentement (comparé à la fréquence des oscillations), l'amplitude des oscillations devient une fonction de la longueur. En plus, le rapport entre l'énergie  $H$  du pendule et la fréquence  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  varie très peu, même si chacune de ces variables change beaucoup.

Des quantités comme ce rapport qui changent peu lors de variations lentes des paramètres du système sont appelées des **invariants adiabatiques**.

Nous considérons un système hamiltonien  $H(q, p; \lambda)$  deux fois différentiable

en  $\lambda$ . Nous posons  $\lambda = \epsilon t$ .

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(q, p; \epsilon t). \quad (6.52)$$

Nous définissons un invariant adiabatique comme suit :

**Définition 6.7** Une quantité  $J(q, p, \lambda)$  est un invariant adiabatique du système (6.52) si pour tout  $\kappa > 0$  il existe un  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour  $\epsilon < \epsilon_0$  et  $0 \leq t \leq 1/\epsilon$

$$|J(q(t), p(t), \epsilon t) - J(q(0), p(0), 0)| < \kappa.$$

Evidemment,  $J$  doit être une quantité conservée du système original ( $\lambda = 0$ ), choisir  $\epsilon = 0$ . Nous considérons le système hamiltonien  $H(q, p; \lambda)$  pour  $\lambda$  fixe et nous supposons que la trajectoire dans l'espace de phase soit fermée, fig. 6.1. Alors, l'aire incluse n'est rien d'autre que notre variable d'action  $J$ , à un facteur  $2\pi$  près,

$$2\pi J(\lambda) = \oint_{\gamma} pdq,$$

qui est constante pour toute la trajectoire.

**Théorème 6.6** Si la fréquence  $\omega(J, \lambda)$  du système (6.52) n'est nulle part zéro,  $J(q(t), p(t), \lambda)$  est un invariant adiabatique.

**Preuve 6.6** Pour  $\lambda$  fixe, nous introduisons les variables d'angle et d'action  $(\phi, J)$  pour le système (6.52) par la transformation canonique qui dépend de  $\lambda$ ,

$$(q, p) \mapsto (\phi, J); \quad \dot{\phi} = \omega(J, \lambda), \quad \dot{J} = 0, \quad \omega(J, \lambda) = \frac{\partial H}{\partial J}, \quad H = H(J, \lambda).$$

$S(q, J; \lambda)$  est la fonction génératrice à valeurs multiples et  $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ ,  $\phi = \frac{\partial S}{\partial J}$ . Nous laissons alors varier  $\lambda$  comme  $\lambda = \epsilon t$ . Notre transformation canonique dépend ainsi du temps et la nouvelle fonction de Hamilton est, voir éq. (5.38)

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H + \epsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda}.$$

Notez que même si  $S$  est à valeurs multiples, comme ces valeurs diffèrent de  $2\pi J$ , la fonction  $\frac{\partial S}{\partial \lambda}$  et donc  $K$  est bien définie. Les équations de mouvement sont alors de la forme

$$\dot{\phi} = \omega(J, \lambda) + \epsilon f(J, \phi, \lambda), \quad f = \frac{\partial^2 S}{\partial J \partial \lambda} \quad (6.53)$$

$$\dot{J} = \epsilon g(J, \phi, \lambda), \quad g = \frac{\partial^2 S}{\partial \phi \partial \lambda}. \quad (6.54)$$

Comme  $\omega \neq 0$ , le théorème 6.5) s'applique. Le système moyenné est de la forme  $\dot{J} = \epsilon \bar{g} = 0$  parce que

$$\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right) d\phi = 0,$$

parce que  $\frac{\partial S}{\partial \lambda}$  est bien définie sur le cercle,  $\frac{\partial S}{\partial \lambda}(2\pi) = \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0)$ . Alors  $|J(t) - J(0)| < c\epsilon \forall t \in [0, 1/\epsilon]$ . (Pour  $\kappa$  donné, choisir  $\epsilon = c/\kappa$ .)  $\square$

### Exemples :

- Pour l'oscillateur harmonique,  $H = \frac{a^2}{2}p^2 + \frac{b^2}{2}q^2$  nous avons vu (exercices) que  $J = \frac{E}{ab} = \frac{E}{\omega}$ . Donc le rapport entre énergie et fréquence est un invariant.
- Nous considérons une balle (de masse  $m = 1$ ) qui bouge entre deux parois où elle est réfléchiée de façon parfaitement élastique. La distance entre les parois est  $\ell$  et la vitesse de la balle soit  $\pm v$ . Donc,  $J = \frac{1}{2\pi} \int pdq = \frac{2\ell v}{2\pi}$ . Donc  $\ell v$  est un invariant adiabatique. Si on rapproche lentement les parois l'un de l'autre, à une distance  $\ell/2$ , la vitesse a doublé.
- La longueur d'un pendule à masse 1 ( $a = 1$ ,  $b^2 = g/\ell$ ,  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ) est lentement doublée. Comment l'amplitude varie-t-elle ?  
Réponse :  $2\pi J = 2\pi E/\omega = \pi(g/\ell)q_{\max}^2/\sqrt{g/\ell} = \text{constant}$ . Donc  $q_{\max}(t) = q_{\max}(0) \left( \frac{\ell(t)}{\ell(0)} \right)^{1/4}$ . L'amplitude de l'oscillation change donc très peu et l'angle  $\alpha_{\max}(t) = q_{\max}(t)/\ell(t) = \alpha_{\max}(0) \left( \frac{\ell(0)}{\ell(t)} \right)^{3/4}$  diminue si la longueur augmente.

**FIN**

# Bibliographie

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag (New York, 1978).
- [2] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company (London, 1978).
- [3] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique*, Ed. Mir (Moscou, 1960).
- [4] N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Springer Verlag (Berlin, 1987).
- [5] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley (Cambridge, MA, 1950).
- [6] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol I (–V), Publish or Perish (Houston, 1970).
- [7] R. Jost, *Helv. Phys. Acta* **41**, 965 (1968)