

ELECTRODYNAMIQUE

cours pour la 2ème année de baccalauréat en physique

by

Ruth Durrer

Département de Physique Théorique,
Université de Genève

semestre de printemps, 2016



UNIVERSITÉ DE GENÈVE

.

Table des matières

1	Les équations de Maxwell	5
1.1	Les équations de Maxwell microscopiques et macroscopiques et la force de Lorentz	6
1.1.1	Equations macroscopiques	6
1.1.2	Dérivation des équations macroscopiques	8
1.1.3	Quelque solutions simples	11
1.2	Les unités	14
1.3	La méthode de Green	21
1.4	Les potentiels et les transformations de jauge	22
1.5	Les lois de conservation	24
1.6	Le formalisme relativiste de l'électrodynamique	28
2	Ondes électromagnétiques	47
2.1	Ondes à une dimension	47
2.2	Ondes à trois dimensions, ondes électromagnétiques	51
3	Propagation des ondes électromagnétiques	61
3.1	Introduction, milieux pondérés	61
3.2	Réflexion et réfraction	63
3.3	L'optique des métaux	69

3.4	Dispersion	74
3.5	Propriétés générales de la “constante” diélectrique	78
3.6	Les relations de dispersion de Kramers-Kronig	81
3.7	Les ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs	86
3.8	La limite optique	91
4	Emission d’ondes électromagnétiques	97
4.1	Zone d’onde, développement multipolaire	97
4.2	Le champ des dipôles	103
4.3	Le champ d’une charge ponctuelle en mouvement	105
4.4	Le rayonnement Cherenkov	111
5	Diffusion des ondes électromagnétiques	115
5.1	Diffusion Thomson	115
5.2	Diffusion élastique et inélastique par des charges quasiment libres .	117
5.3	Diffusion dans les gaz et les liquides	122
5.4	Diffraction	126

Chapitre 1

Les équations de Maxwell

Préambule

“Höchste Aufgabe der Physiker ist das Aufsuchen jener allgemeinsten, elementaren Gesetze, aus denen durch reine Deduktion das Weltbild zu gewinnen ist. Zu diesen elementaren Gesetzen führt kein logischer Weg, sondern nur die auf Einfühlung in die Erfahrung sich stützende Intuition...”

(A. Einstein, extrait de son exposé lors du 60^{ème} anniversaire de Max Planck)

En français (à peu près):

“Le but principal des physiciens est la recherche de ces lois fondamentales générales dont on peut dériver par déduction la vision du monde. Il n’y a pas de chemin logique menant à ces lois, mais seule l’intuition qui repose sur l’expérience.”

J’aimerais que vous tiriez de cette citation qu’il n’existe pas de vraies *dérivations* des lois de Maxwell. Ils existent des expériences qui les motivent, mais elles ne les impliquent pas. Dans ce cours nous allons même poser les lois de Maxwell comme point de départ et montrer ensuite que ces lois décrivent bien les phénomènes.

Comme le dit Einstein, retrouver de telles lois est l’acte créatif du plus haut niveau de la physique théorique. Ceci ne s’est produit que cinq ou six fois dans l’histoire de la physique:

- Gravitation (Newton)
- Thermodynamique (Clausius, Carnot)
- Electrodynamique (Maxwell, Faraday)

- Mécanique statistique (Boltzmann, Gibbs, Einstein)
- Relativité générale (Einstein)
- Mécanique quantique (Einstein, Schrödinger, Planck, Pauli, Heisenberg, Bohr, Dirac, ...)

1.1 Les équations de Maxwell microscopiques et macroscopiques et la force de Lorentz

1.1.1 Equations macroscopiques

La force de Lorentz détermine l'action du champ électromagnétique sur une charge q à vitesse \mathbf{v} ,

$$\mathbf{K} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right). \quad (1.1)$$

Ici \mathbf{E} est le champ électrique, \mathbf{B} est le champ magnétique et c est la vitesse de la lumière (comme nous verrons plus tard). Si nous définissons la densité de charge (charge par volume), $\rho = dq/dV$, et la densité de courant, $\mathbf{J} = d(q\mathbf{v})/dV$ et nous utilisons le symbole \mathbf{k} pour la densité de force nous obtenons:

$$\mathbf{k} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}. \quad (1.2)$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} eux même sont causés par la distribution des charges. Le lien entre les champ et les charges et courants est donné par les équations de Maxwell. Les équations de Maxwell homogènes sont

$$\operatorname{div} \mathbf{B} \equiv \nabla \cdot \mathbf{B} \equiv \sum_i \partial_i B^i \equiv \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} = 0, \quad (1.3)$$

qui dit qu'il n'existe pas de charges magnétiques;

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} \equiv \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = \sum_{\ell m} \varepsilon_{ilm} \partial_\ell E_m + \frac{1}{c} \dot{B}_i = 0, \quad (1.4)$$

qui exprime la loi d'induction, avec $\dot{\cdot} \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ et

$$\varepsilon_{ilm} = \begin{cases} \text{signe de la permutation } ilm \rightarrow 123, & \text{si } ilm \text{ sont tous différents} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Les deux autres équations sont la *loi de Coulomb*,

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (1.5)$$

et la *loi d'Ampère* avec le *courant de déplacement*,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv \nabla \wedge \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}. \quad (1.6)$$

Ici \mathbf{D} et \mathbf{H} sont les champs électrique et magnétique dans un milieu pondéré et ρ et \mathbf{J} sont les densités de charge et de courant macroscopiques.

En utilisant les théorèmes de Gauss et de Stokes, les équations de Maxwell peuvent être re-écrit comme équations intégrales:

- Le théorème de Gauss:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{W}) dv = \int_{\partial V} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}) ds \quad (1.7)$$

Ici V est un volume (fini) quelconque et ∂V est son bord. \mathbf{W} est un champ vectoriel quelconque et \mathbf{e} est le vecteur unitaire normale à l'élément de surface ds .

- Le théorème de Stokes:

$$\int_S (\nabla \wedge \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e} ds = \oint_{\partial S} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} dl \quad (1.8)$$

Ici S est une surface (bornée) quelconque et ∂S est son bord. \mathbf{W} et \mathbf{e} sont comme avant et \mathbf{n} est le vecteur unitaire parallèle à ∂S .

A l'aide de ces théorèmes mathématiques on peut écrire (1.5) comme équation intégrale,

$$\int_{\partial V} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}) ds = 4\pi Q \quad (1.9)$$

ou Q est la charge totale à l'intérieur du volume V . Le flux de \mathbf{D} à travers le bord d'un volume V détermine la charge à l'intérieur. De même Eq. (1.3) donne

$$\int_{\partial V} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) ds = 0. \quad (1.10)$$

Il n'y a pas de charge magnétique.

A l'aide de (1.8) et la deuxième eq. de Maxwell, (1.4), nous trouvons

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl = \frac{-1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) ds$$

ce qui est la loi de Faraday ou la loi d'induction: un champ magnétique variable à travers une surface borné par un fil métallique induit un courant à travers le fil.

La quatrième équation de Maxwell donne

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dl = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}) ds + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}) ds \quad (1.11)$$

Les deux premiers termes de cette équation sont simplement la loi d'Ampère. Le dernier terme, qui est souvent négligeable (facteur $\frac{1}{c}$) est le fameux 'courant de déplacement'.

Lorsque Maxwell est arrivé à ces lois en interprétant les résultats expérimentaux, surtout ceux de Faraday, elles étaient des lois stationnaires à part la loi d'induction. Le courant de déplacement (le terme $\frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}$) manquait encore. Mais Maxwell savait très bien que, sans ce terme, les lois n'étaient pas en accord avec la conservation de la charge électrique. Il a donc, par des arguments compliqués et douteux, inventé la réaction d'un *éther* (porteur du champ électromagnétique) sur les courants, qu'il a appelée *courant de déplacement*, pour arriver à l'équation (1.6).

Pour nous le *courant de déplacement* n'est qu'un nom et la loi d'Ampère avec le courant de déplacement est justifiée par son bon accord avec les expériences (de telles expériences n'étaient pas encore possibles à l'époque de Maxwell; pour mesurer le courant de déplacement il faut des champs électriques qui varient très rapidement).

Dans le vide, $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Pour des milieux pondérés on a, en plus, des relations phénoménologiques qui lient \mathbf{E} à \mathbf{D} et \mathbf{B} à \mathbf{H} . Dans leur forme la plus simple ce sont des relations linéaires et isotropes avec des constantes ε et μ :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (1.12)$$

ε et μ sont la constante diélectrique et la perméabilité magnétique.

Dans un bon conducteur on a encore

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma \text{ est la conductivité.} \quad (1.13)$$

1.1.2 Dérivation des équations macroscopiques

Pour vous rappeler le lien entre les champs microscopiques et macroscopiques, nous dérivons l'équation $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ (pour plus des détails voir Jackson, §6.7).

Les lois microscopiques, les vraies lois de base, sont

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \nabla \wedge \mathbf{e} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (\text{éqs. homogènes}) \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = 4\pi\eta \quad \nabla \wedge \mathbf{b} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (\text{éqs. inhomogènes}). \quad (1.15)$$

Ici (\mathbf{e}, \mathbf{b}) et (η, \mathbf{j}) sont les champs, la densité de charge et la densité de courant microscopiques qui varient sur des distances atomiques ($\sim 10^{-8}\text{cm}$) et sur des échelles temporelles de 10^{-17}s (mouvement orbital d'un électron). Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont les champs moyennés,

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle, \quad \mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle, \quad (1.16)$$

où nous définissons

$$\langle a \rangle(\mathbf{x}) := \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) a(\mathbf{y}) d^3y \quad (1.17)$$

avec $\int f(\mathbf{y}) d^3y = 1$. Ici f est une fonction qui moyenne sur une région de taille $R \sim 10^{-4}\text{cm}$. Par exemple

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi R^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-|\mathbf{x}|^2/R^2} \quad (\text{Gaussienne})$$

ou

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3}, & |\mathbf{x}| < R \\ 0, & |\mathbf{x}| \geq R \end{cases} \quad (\text{top hat}). \quad (1.18)$$

Pour les dérivées du champ macroscopique on trouve que

$$\begin{aligned} \partial_i E_j &= \int \frac{\partial}{\partial x^i} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e_j(\mathbf{y}) d^3y = - \int \left(\frac{\partial}{\partial y^i} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) e_j(\mathbf{y}) d^3y \\ &= \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y^i} e_j(\mathbf{y}) d^3y = \langle \partial_i e_j \rangle. \end{aligned}$$

Pour la deuxième ligne nous avons fait une intégration par parties. Les dérivées et la moyenne commutent. Les champs macroscopiques, \mathbf{E} et \mathbf{B} , satisfont donc les équations homogènes (1.14).

Pour dériver les équations inhomogènes macroscopiques, il faut prendre la moyenne des densités de charge et de courant. La densité de charge totale se décompose en une densité de charges libres, η_{libre} , et une densité de charge des noyaux et des électrons liés dans les molécules, $\eta_{\text{lié}}$. On a alors $\langle \eta \rangle = \langle \eta_{\text{libre}} \rangle + \langle \eta_{\text{lié}} \rangle$, où

$$\eta_{\text{lié}}(\mathbf{x}) = \sum_n \sum_{\ell_n} q_{\ell_n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\ell_n}) \quad (1.19)$$

est la somme sur toutes les molécules (n) et toutes les charges, ℓ_n , dans une molécule n donnée. Soit \mathbf{x}_n le centre de charge de la molécule n . On a alors $\mathbf{x}_{\ell_n} = \mathbf{x}_n + \Delta\mathbf{x}_{\ell_n}$, avec $|\Delta\mathbf{x}_{\ell_n}| \ll |\mathbf{x}_n|$. Pour la moyenne $\langle\eta_{\text{lié}}\rangle$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle\eta_{\text{lié}}\rangle(\mathbf{x}) &= \sum_n \sum_{\ell_n} q_{\ell_n} \int d^3y f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_n - \Delta\mathbf{x}_{\ell_n}) \\ &= \sum_n \sum_{\ell_n} q_{\ell_n} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \Delta\mathbf{x}_{\ell_n}).\end{aligned}$$

Développons maintenant cette expression en série de Taylor dans la petite quantité $\Delta\mathbf{x}_{\ell_n}$:

$$\langle\eta_{\text{lié}}\rangle(\mathbf{x}) = \sum_n \sum_{\ell_n} q_{\ell_n} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - q_{\ell_n} \Delta\mathbf{x}_{\ell_n} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{x}_{\ell_n}^2). \quad (1.20)$$

Avec $q_n := \sum_{\ell_n} q_{\ell_n}$ la charge de la molécule n et $\mathbf{p}_n := \sum_{\ell_n} q_{\ell_n} \Delta\mathbf{x}_{\ell_n}$ le moment dipolaire de la molécule n , on obtient:

$$\langle\eta_{\text{lié}}\rangle(\mathbf{x}) = \sum_n (q_n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots).$$

Le premier terme est la moyenne d'une charge ponctuelle q_n à la position \mathbf{x}_n et le deuxième terme est la moyenne d'un dipôle ponctuel \mathbf{p}_n en \mathbf{x}_n :

$$\begin{aligned}\langle\eta_{\text{lié}}\rangle(\mathbf{x}) &= \sum_n \langle\eta_n\rangle \\ \langle\eta_n\rangle &= \langle q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle + \dots\end{aligned}$$

En définissant la densité de charge macroscopique par

$$\rho(\mathbf{x}) := \langle\eta_{\text{libre}}\rangle + \sum_n \langle q_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle$$

et la polarisation par

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) := \sum_n \langle \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle$$

on obtient que

$$\langle\eta\rangle = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

Si nous insérons ceci dans l'équation de Coulomb microscopique (la première des équations (1.15)), on trouve:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi(\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}). \quad (1.21)$$

En posant

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (1.22)$$

ceci donne l'équation de Coulomb macroscopique (1.5). A l'ordre le plus bas, \mathbf{P} est une fonction linéaire de \mathbf{E} , et \mathbf{P} est proportionnel à \mathbf{E} si le milieu est isotrope. On a alors que

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}. \quad (1.23)$$

χ_e est la *susceptibilité électrique* et ε est la *constante diélectrique* du milieu. Le terme quadrupolaire que nous avons négligé avec les ... est en effet presque toujours très petit.

Avec des manipulations similaires, on dérive la moyenne de la densité de courant, ce qui mène à

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} + c\nabla \wedge \mathbf{M} + \dot{\mathbf{P}} + \dots$$

(la dérivation un peu longue de ce résultat peut être trouvée dans le Jackson, §6.7).

Ici \mathbf{M} est la magnétisation qui est souvent proportionnel à \mathbf{B} , $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B}$.

En posant

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} = (1 - 4\pi\chi_m)\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}, \quad (1.24)$$

nous arrivons à la loi d'Ampère macroscopique, (1.6).

Si $\mu > 1$, $\chi_m > 0$ et \mathbf{M} est parallèle à \mathbf{B} : on parle de *para-magnétisme*. Si $\mu < 1$, $\chi_m < 0$ et \mathbf{M} est antiparallèle à \mathbf{B} : on parle de *diamagnétisme*. Typiquement la *susceptibilité magnétique*, χ_m , est très petite, telle que $|\mu - 1| \sim 10^{-5}$. μ est la *perméabilité magnétique*. Dans le cas *ferromagnétique* le lien entre \mathbf{B} et \mathbf{H} est plus compliqué puisqu'il dépend du temps et il est non-linéaire (*phénomène d'hystérèse*). (Les matériaux ferromagnétiques sont para-magnétiques, mais ils ont en plus de la magnétisation spontanée, ce qui veut dire que la magnétisation \mathbf{M} demeure après l'annulation du champ \mathbf{B}).

1.1.3 Quelques solutions simples

Electrostatique

Nous considérons alors le cas $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ et $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{B}} = 0$. L'équation de Faraday (1.4) implique alors $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$, donc il existe une fonction ϕ (le potentiel électrostatique) avec $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ tel que

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \quad (\text{l'équation de Poisson}),$$

où

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 = \nabla \cdot \nabla.$$

. La solution de cette équation (qui décroît pour $r \rightarrow \infty$ si la source est contenue dans un volume fini) est donnée par

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (1.25)$$

Magnetostatique

De nouveau nous considérons $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ et $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{B}} = 0$. De l'éq. (1.3) on conclut que \mathbf{B} peut être écrit dans la forme $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$. Ici \mathbf{A} est le potentiel vectoriel magnétique. En plus, nous pouvons choisir \mathbf{A} tel que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Ce choix s'appelle la jauge de Coulomb.

Exercice: *Montrer que pour tout champ vectoriel \mathbf{V}*

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}.$$

Pour $\dot{\mathbf{E}} = 0$ nous obtenons alors de la loi d'Ampère

$$-\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \Delta \mathbf{A} = \Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

La solution de cette équation (qui décroît pour $r \rightarrow \infty$ si la source est contenue dans un volume fini) est donnée par

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (1.26)$$

Les équations (1.25) et (1.26) déterminent les potentiels électro- et magnetostatique et alors les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} pour une distribution statique donnée de charges et de courants.

Les équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide, $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, et les équations de Maxwell se réduisent à

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \nabla \wedge \mathbf{B} \quad (1.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \wedge \mathbf{E} \quad (1.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.30)$$

Si on dérive (1.27) par rapport au temps et on introduit (1.29) pour $\dot{\mathbf{B}}$, on trouve

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} = \frac{1}{c}\nabla \wedge \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \Delta\mathbf{E} - \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0}.$$

Donc

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{E}} - \Delta\mathbf{E} = 0, \quad (1.31)$$

En prenant la dérivée par rapport au temps de (1.29) et en remplaçant $\dot{\mathbf{E}}$ par (1.27) on obtient la même équation que (1.31) pour le champ \mathbf{B} . Notez que la différence de signe entre (1.27) et (1.29) est responsable du signe moins dans (1.31). Nous arrivons donc aux équations d'onde

$$\left. \begin{aligned} (\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\mathbf{E} &= 0 \\ (\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.32)$$

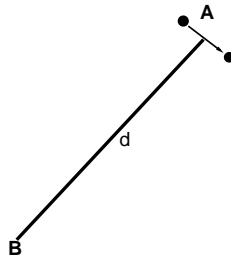
Comme nous le verrons en détail dans les chapitres suivants, les équations de Maxwell dans le vide décrivent des ondes qui se déplacent à vitesse c (voir (1.32)).

Exercice: *Montrer que l'ansatz*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 f(ct \pm \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 g(ct \pm \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned}$$

avec $\mathbf{n}^2 = 1$ et \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 et \mathbf{n} des vecteurs constants résout les éqs. (1.32). Montrer que les éqs. (1.27) à (1.30) sont aussi toutes satisfaites si et seulement si $f = g$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ et $\mathbf{B}_0 = \pm \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_0$.

Une première conséquence est que la vitesse c de propagation des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} est finie et il n'existe donc pas *d'action à distance* dans l'électrodynamique. Si une charge en A bouge, il faudra un temps $\delta t = \frac{d}{c}$ avant que ce changement soit enregistré par une antenne en B à une distance d . Maxwell a prédit (après avoir



trouvé les équations (1.32)) que la lumière est un phénomène électromagnétique,

ce qui a été tout-à-fait vérifié. Hertz fut le premier à détecter expérimentalement des ondes électromagnétiques.

Comme nous le verrons, le champ électromagnétique est porteur d'énergie, d'impulsion et de moment cinétique dans le vide; le transport se fait à la vitesse de la lumière, c , qui est une constante de la nature. Si les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels, alors la vitesse c est la même dans tous les référentiels. C'est cette observation qui a mené Einstein à la relativité restreinte (son article original de 1905 porte le titre "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*").

Avant d'entrer dans notre sujet, je voudrais insérer ici une fois pour toutes une discussion sur les unités.

1.2 Les unités

(Voir Jackson, Appendice)

Vous avez probablement remarqué que les équations de Maxwell, (1.3–1.6), et aussi les relations pour les champs \mathbf{H} et \mathbf{D} , (1.23) et (1.24), n'ont pas tout-à-fait l'air de celles que vous avez déjà rencontrées lors de la première année; la raison est que j'ai adopté les unités de Gauss, tandis qu'en première année, vous avez exprimé ces équations en unités MKSA. Pour les problèmes fondamentaux et surtout plus tard pour l'électrodynamique quantique, les unités de Gauss (ou ceux de Heaviside-Lorentz) sont mieux adaptées. Les unités MKSA sont très utiles pour des problèmes d'ingénieurs de genre plutôt pratique. Il est donc utile de connaître les deux systèmes (et peut-être encore d'autres).

En principe, on est absolument libre dans le choix des unités, mais il est très important d'en être conscient et d'en tirer un avantage de choisir des unités adaptées au problème. En physique, ça n'a aucun sens de dire que le résultat de la mesure d'une longueur est 2. Il faut toujours dire s'il s'agit de 2 mm, 2 inch, 2 km, 2 années lumière, etc.

En physique des particules élémentaires, on choisit souvent $c = 1$ et $\hbar = 1$. Il reste alors une unité de base qu'on choisit en général comme étant l'énergie (e.g. 1 électron-Volt, 1eV). De $c = 1$ on déduit que le temps a la même dimension que la longueur et que la masse a la même dimension que l'énergie et l'impulsion. De $i\hbar = [x, p] = i$ (voir mécanique quantique) il suit que l'énergie, l'impulsion et la masse ont la dimension inverse de la longueur et du temps.

En électrostatique dans la loi de Coulomb, la force entre deux charges q et q' au

repos à une distance r , est donné par

$$F = k_1 \frac{qq'}{r^2}. \quad (1.33)$$

Il faut choisir une constante k_1 . La dimension et la grandeur de cette constante déterminent les unités de charge q choisies. Il est possible et cohérent de poser $k_1 = 1$. Si on part des dimensions principales l (longueur), t (temps) et m (masse), nous obtenons, dans le cas où k_1 est sans dimension, la dimension suivante pour la charge:

$$[q] = ([F]l^2)^{1/2} = \left(\frac{ml}{t^2}l^2\right)^{1/2} = \frac{m^{1/2}l^{3/2}}{t}. \quad (1.34)$$

Dans le système de la physique des particules où t a la même dimension que l et m a la dimension inverse, la charge n'a pas de dimension. C'est un nombre pur, la *constante de couplage*, qui détermine la force de l'interaction électromagnétique:

$$\alpha = \frac{k_1 e^2}{\hbar c} = k_1 e^2 \cong \frac{1}{137} \quad \text{est la 'constante de structure fine'}$$

où e est la charge de l'électron. Dans des unités avec $k_1 = \hbar = c = 1$, $\alpha = e^2$.

Le champ électrique est défini par $E = \frac{F}{q} = \frac{k_1 q}{r^2}$ et il a alors les unités $[E] = \frac{m^{1/2}}{tl^{1/2}}$ dans un système avec $k_1 = 1$, ce qui est adopté dans le système gaussien. Notez que dans ce cas $[\mathbf{E}^2] = \frac{m}{t^2 l}$ c'est à dire, \mathbf{E}^2 a les dimensions d'une densité d'énergie, $\left[\frac{m\ell^2}{t^2\ell^3}\right]$.

De même, la loi d'Ampère détermine la force entre deux courants stationnaires I et I' à une distance d ,

$$\frac{dF}{dl} = 2 \frac{k_2 II'}{d}. \quad (1.35)$$

Les constantes k_1 et k_2 ne sont pas indépendantes. Comme $[I] = [q]/t$, on a que $[k_1/k_2] = l^2/t^2$. La valeur numérique k_1/k_2 peut-être mesurée et on trouve $k_1/k_2 = c^2$ où c est la vitesse de la lumière,

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2. \quad (1.36)$$

L'induction magnétique \mathbf{B} est dérivée de la loi d'Ampère (1.6). Donc un fil de fer long et droit portant le courant I induit un B à une distance d donné par:

$$B = 2k_2\beta \frac{I}{d}. \quad (1.37)$$

La constante β détermine la différence entre la dimension de E et B . Les équations (1.33) et (1.37) mènent à:

$$\left[\frac{E}{B}\right] = \left[\frac{k_1 q t l}{l^2 k_2 \beta q}\right] \quad (\text{en utilisant que } [I] = \left[\frac{q}{t}\right].)$$

Avec $\frac{k_1}{k_2} = \frac{l^2}{t^2}$ cela donne

$$\begin{bmatrix} E \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ t\beta \end{bmatrix}.$$

Si nous voulons $[E] = [B]$, il faut choisir $[\beta] = [l/t]$, et un choix naturel est $\beta = c$.

Nous écrivons encore la loi d'induction comme $\nabla \wedge \mathbf{E} + k_3 \partial_t B = 0$, il est clair que k_3 a la même dimension que β^{-1} . En effet, $k_3 = \beta^{-1}$. La façon la plus simple de vérifier ceci est d'écrire les équations de Maxwell avec nos constantes:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi k_1 \rho \\ \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{k_2}{k_1} \beta \partial_t \mathbf{E} &= 4\pi k_2 \beta \mathbf{J} \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + k_3 \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.38)$$

Dans une région où $\rho = 0$ et $\mathbf{J} = 0$, ces équations mènent à

$$\Delta \mathbf{B} - k_3 \frac{k_2 \beta}{k_1} \partial_t^2 \mathbf{B} = 0. \quad (1.39)$$

Donc $\frac{k_3 k_2 \beta}{k_1} = \frac{1}{c^2}$ et, avec (1.36), $k_3 \beta = 1$. (Les valeurs de k_1 , k_2 , β et k_3 dans des systèmes différents sont données dans la table I).

Magnitudes and Dimensions of the Electromagnetic Constants for Various Systems of Units

The dimensions are given after the numerical values. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum ($c = 2.998 \times 10^{10}$ cm/sec = 2.998×10^8 m/sec). The first four systems of units use the centimeter, gram, and second as their fundamental units of length, mass, and time (l, m, t). The MKSA system uses the meter, kilogram, and second, plus current (I) as a fourth dimension, with the ampere as unit.

System	k_1	k_2	β	k_3
Electrostatic (esu)	1	$c^{-2}(t^2l^{-2})$	1	1
Electromagnetic (emu)	$c^2(l^2t^{-2})$	1	1	1
Gaussian	1	$c^{-2}(t^2l^{-2})$	$c(lt^{-1})$	$c^{-1}(tl^{-1})$
Heaviside-Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}(t^2l^{-2})$	$c(lt^{-1})$	$c^{-1}(tl^{-1})$
Rationalized MKSA	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2$ $(ml^3t^{-4}I^{-2})$	$\frac{\mu_0}{4\pi} \equiv 10^{-7}$ $(mlt^{-2}I^{-2})$	1	1

Table I (*Table 1 de Jackson, Appendice*)

En plus, pour les relations entre les champs fondamentaux (\mathbf{E} , \mathbf{B}) et les champs (\mathbf{D} , \mathbf{H}) on peut encore choisir des constantes

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \lambda \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \lambda' \mathbf{M}.\end{aligned}$$

On ne gagne rien en donnant des dimensions différentes à \mathbf{D} et \mathbf{P} ou à \mathbf{H} et \mathbf{M} . Donc, je ne connais pas de systèmes d'unités où λ et λ' ont des dimensions. Les systèmes avec $\lambda = \lambda' = 1$ s'appellent *rationnels*. Dans les systèmes non-rationnels $\lambda = \lambda' = 4\pi$. Les constantes ϵ_0 et μ_0 sont la *constante diélectrique* et la *perméabilité du vide*. Dans les milieux linéaires et isotropes on a

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B},$$

La permittivité relative (constante diélectrique relative) est $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ et la perméabilité relative est $\frac{\mu}{\mu_0}$.

Dans la table II, vous trouvez les valeurs ε_0 et μ_0 dans les différents systèmes d'unités et la forme correspondante des équations de Maxwell macroscopiques et de la force de Lorentz. Dans la table III, vous trouvez les noms et les facteurs de conversion entre les unités MKSA rationalisées et les unités de Gauss qui seront utilisées dans ce cours. Notez que dans les unités de Gauss, \mathbf{E} et \mathbf{B} ont la même dimension, ce qui va être très important pour la formulation relativiste et explicitement covariante du champ électromagnétique.

Definitions of ϵ_0 , μ_0 , \mathbf{D} , \mathbf{H} , Macroscopic Maxwell Equations, and Lorentz Force Equation in Various Systems of Units

Where necessary the dimensions of quantities are given in parentheses. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum with dimensions lt^{-1} .

System	ϵ_0	μ_0	\mathbf{D} , \mathbf{H}	Macroscopic Maxwell Equations	Lorentz Force per Unit Charge
Electrostatic (esu)	1	c^{-2} (l^2t^{-2})	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Electromagnetic (emu)	c^{-2} (l^2t^{-2})	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Gaussian	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Heaviside-Lorentz	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Rationalized MKSA	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ ($l^2t^4m^{-1}l^{-3}$)	$4\pi \times 10^{-7}$ ($mlI^{-2}l^{-2}$)	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Conversion Table for Given Amounts of a Physical Quantity

The table is arranged so that a given amount of some physical quantity, expressed as so many MKSA or Gaussian units of that quantity, can be expressed as an equivalent number of units in the other system. Thus the entries in each row stand for the same amount, expressed in different units. All factors of 3 (apart from exponents) should, for accurate work, be replaced by (2.99792456) , arising from the numerical value of the velocity of light. For example, in the row for displacement (D), the entry $(12\pi \times 10^5)$ is actually $(2.99792 \times 4\pi \times 10^5)$. Where a name for a unit has been agreed on or is in common usage, that name is given. Otherwise, one merely reads so many Gaussian units, or MKSA or SI units.

Physical Quantity	Symbol	Rationalized MKSA		Gaussian
Length	l	1 meter (m)	10^2	centimeters (cm)
Mass	m	1 kilogram (kg)	10^3	grams (gm)
Time	t	1 second (sec)	1	second (sec)
Frequency	ν	1 hertz (Hz)	1	hertz (Hz)
Force	F	1 newton	10^5	dynes
Work	$\left. \begin{matrix} W \\ U \end{matrix} \right\}$	1 joule	10^7	ergs
Energy				
Power	P	1 watt	10^7	ergs sec ⁻¹
Charge	q	1 coulomb	3×10^9	statcoulombs
Charge density	ρ	1 coul m ⁻³	3×10^3	statcoul cm ⁻³
Current	I	1 ampere (amp)	3×10^9	statamperes
Current density	J	1 amp m ⁻²	3×10^5	statamp cm ⁻²
Electric field	E	1 volt m ⁻¹	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	statvolt cm ⁻¹
Potential	Φ, V	1 volt	$\frac{1}{300}$	statvolt
Polarization	P	1 coul m ⁻²	3×10^5	dipole moment cm ⁻³
Displacement	D	1 coul m ⁻²	$12\pi \times 10^5$	statvolt cm ⁻¹ (statcoul cm ⁻²)
Conductivity	σ	1 ohm ⁻¹ m	9×10^9	sec ⁻¹
Resistance	R	1 ohm	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	sec cm ⁻¹
Capacitance	C	1 farad	9×10^{11}	cm
Magnetic flux	ϕ, F	1 weber	10^8	gauss cm ² or maxwells
Magnetic induction	B	1 tesla	10^4	gauss
Magnetic field	H	1 ampere-turn m ⁻¹	$4\pi \times 10^{-3}$	oersted
Magnetization	M	1 ampere m ⁻¹	10^{-3}	magnetic moment cm ⁻³
Inductance	L	1 henry	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	

Table III (*Table 4 de Jackson, Appendice*)

1.3 La méthode de Green

Pour un opérateur différentiel linéaire (avec coefficients constants) donné, \mathcal{D} , une solution G de l'équation

$$\mathcal{D}G = \delta$$

est appelée une fonction Green pour l'opérateur \mathcal{D} . Ici δ est la distribution- δ de Dirac dans le nombre de dimension correspondant. Si G est une fonction Green pour \mathcal{D} et φ est une solution homogène, c'est-à-dire $\mathcal{D}\varphi = 0$, alors aussi $G' = G + \varphi$ est une fonction Green pour \mathcal{D} . Et vice-versa, si G et G' sont des fonctions Green, leur différence est une solution homogène. Pour déterminer la bonne fonction Green pour un problème donné il faut spécifier des conditions de bord.

Nous nous intéressons ici pour l'opérateur d'onde (opérateur d'Alembert), $\mathcal{D} = \partial_t^2 - c^2\Delta$. Nous cherchons alors une solution à l'équation

$$(\partial_t^2 - c^2\Delta)G(\mathbf{x}, t) = \delta^3(\mathbf{x})\delta(t) . \quad (1.40)$$

Nous voulons une solution que décroît pour $r \rightarrow \infty$ et qui est zero pour $t < 0$. La dernière condition assure la causalité: le champ ne doit pas être présent avant la charge qui le cause.

Pour résoudre (1.40) nous performons d'abord une transformation de Fourier dans les coordonnées spatiales,

$$\begin{aligned} \hat{G}(\mathbf{k}, t) &= \int d^3x e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} G(\mathbf{x}, t) \\ G(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \hat{G}(\mathbf{k}, t) \end{aligned}$$

Avec $\int \delta^3(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = 1$, l'éq. (1.40) devient alors

$$(\partial_t^2 + c^2\mathbf{k}^2)\hat{G}(\mathbf{k}, t) = \delta(t) . \quad (1.41)$$

Il est facile à vérifier (voir exercices) que

$$\hat{G}_R(\mathbf{k}, t) = H(t) \frac{\sin(ckt)}{ck} \quad (1.42)$$

est une solution de (1.41). Ici $H(t)$ est la fonction Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 . \end{cases}$$

Si nous utilisons encore que la transformée de Fourier de $\delta(|\mathbf{x}|-R)$ est $4\pi R \sin(kR)/k$ nous obtenons

$$G_R(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t)}{4\pi c^2 t} \delta(ct - |\mathbf{x}|) = \frac{H(t)}{4\pi c |\mathbf{x}|} \delta(ct - |\mathbf{x}|) . \quad (1.43)$$

Cette fonction de Green a évidemment les propriétés de bord requises. On peut montrer qu'elle est la seule fonction de Green avec ces propriétés¹.

La solution du problème $(\partial_t^2 - c^2 \Delta)\phi(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t)$ est alors (voir exercices)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt' G_R(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') f(\mathbf{x}', t') = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{f(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (1.44)$$

1.4 Les potentiels et les transformations de jauge

(Voir Jackson §6.5)

Vous savez déjà de la magnétostatique que l'équation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ est automatiquement satisfaite si on pose

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad (1.45)$$

car $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) \equiv 0$ pour n'importe quel potentiel vecteur \mathbf{A} . En plus, on peut démontrer que tout champ vectoriel \mathbf{v} (en trois dimensions) peut être décomposé en une partie *irrotationnelle* et une *rotationnelle* (*composante de spin 0* et *composante de spin 1*),

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi + \nabla \wedge \mathbf{a}. \quad (1.46)$$

On peut choisir ϕ et \mathbf{a} comme solutions des équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi &= -\nabla \cdot \mathbf{v} \\ \Delta\mathbf{a} &= -\nabla \wedge \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Attention, \mathbf{a} et ϕ ne sont uniques que si on impose des *conditions aux bords* et $\nabla\mathbf{a} = 0$.

La loi d'induction,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} = \nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) = 0$$

implique l'existence d'un potentiel scalaire ϕ tel que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\nabla\phi$$

¹On pourrait penser qu'elle va alors être la seule fonction de Green relevante en physique. Mais en mécanique quantique la situation est plus compliquée. La fonction de Green la plus importante en physique quantique est celle de Feynman qui est une superposition de la fonction de Green retardée, G_R , et la fonction de Green avancée, G_A , qu'on obtient de G_R en changeant $t - |\mathbf{x}|$ en $t + |\mathbf{x}|$.

ou

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}. \quad (1.48)$$

Avec cet *ansatz*, les équations de Maxwell homogènes sont satisfaites automatiquement. En termes de nos potentiels électromagnétiques (ϕ, \mathbf{A}) les équations de Maxwell inhomogènes (pour le cas $\epsilon = \mu = 1$) donnent

$$(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\Delta\phi - \frac{1}{c}\nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = 4\pi\rho \quad (1.49)$$

et

$$(\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c}\nabla\dot{\phi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \quad (1.50)$$

Les potentiels ϕ et \mathbf{A} ne sont pas fixés uniquement par les conditions (1.45) et (1.48). Si on transforme \mathbf{A} par

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (1.51)$$

le champ \mathbf{B} ne change pas. Si on altère encore ϕ par

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi}, \quad (1.52)$$

le champ \mathbf{E} reste aussi invariant. Les transformations (1.51) et (1.52) sont des *transformations de jauge*. Sous une transformation de jauge

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}) &\rightarrow \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi + \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi} \\ &= (\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\chi + \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Donc, si on trouve un champ scalaire χ tel que

$$(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\chi = -(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\phi}), \quad (1.53)$$

les potentiels transformés,

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad \text{et} \quad \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{c}\dot{\chi},$$

satisfont

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{c}\dot{\tilde{\phi}} = 0, \quad (1.54)$$

qui est appelée la condition de jauge de *Lorentz*².

²Comme l'équation d'onde pour une source donnée a toujours une solution, voir éq. (1.44), nous pouvons toujours résoudre (1.53), au moins localement.

Dans la jauge de Lorentz (1.54) les équations de Maxwell ont une forme particulièrement simple parce qu'elles sont complètement découplées (nous omettons la tilde \sim):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi = -4\pi\rho \quad (1.55)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \quad (1.56)$$

Les équations (1.55) et (1.56) avec la condition (1.54) sont équivalentes aux équations de Maxwell (4 équations du 1^{er} ordre ont été transformées en 2 équations du 2^{ème} ordre).

D'après (1.43) les équations (1.55) et (1.56) sont résolues par

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt G_R(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \rho(\mathbf{x}', t') = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (1.57)$$

et

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt G_R(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1.58)$$

1.5 Les lois de conservation

(Voir Jackson, §6.8)

Conservation de la charge

D'après les équations de Maxwell

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} \right) = \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) = 0. \quad (1.59)$$

Pour un ouvert $G \subset \mathbb{R}^3$ nous avons donc

$$0 = \int_G (\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J}) d^3x = \frac{d}{dt} Q(G) + \int_{\partial G} \mathbf{J} \cdot \mathbf{e} ds, \quad (1.60)$$

ce qui correspond à la *conservation de la charge*.

Conservation de l'énergie

En utilisant

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} &= 0 \quad \text{et} \\ \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},\end{aligned}$$

on trouve

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}. \quad (1.61)$$

Mais, d'après une simple identité, $-\nabla \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A})$ et donc le membre gauche de (1.61) correspond à $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$. L'équation (1.61) mène finalement à

$$\frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.62)$$

où

$$\mathbf{S} := \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (1.63)$$

est le *vecteur de Poynting*. La relation (1.62) est générale. Supposons maintenant qu'il y ait une relation instantanée et linéaire entre \mathbf{H} et \mathbf{B} et entre \mathbf{D} et \mathbf{E} comme, par exemple, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ avec un ε qui est indépendant du temps (c'est le cas pour les champs microscopiques, où $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{B}$). Dans ce cas nous avons que $\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})'$ et $\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})'$ et (1.62) peut être écrite sous la forme

$$\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (1.64)$$

où

$$u := \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}).$$

Si nous intégrons cette identité sur un ouvert $G \subset \mathbb{R}^3$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \int_G u d^3x + \int_{\partial G} \mathbf{S} \cdot \mathbf{e} ds = - \int_G \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (1.65)$$

Le dernier terme est moins le travail effectué aux charges par le champ. Si la région G et les champs électromagnétiques sont tels que l'intégrale de surface peut être négligée, une perte de l'intégrale de u correspond alors au travail fourni par le champ. Ceci motive l'interprétation de u comme la *densité d'énergie du champ électromagnétique*.

Donc le premier terme de gauche dans (1.64) est la dérivée temporelle de l'énergie électromagnétique, et le terme de droite est le travail effectué par le champ électromagnétique sur les courants par unité de temps *prise avec le signe négatif*. Si \mathbf{J} est

parallel à \mathbf{E} , le champ perd de l'énergie car il effectue un *travail* sur les courants. Il faut donc interpréter \mathbf{S} comme le *flux d'énergie*: l'équation (1.65) signifie donc que l'énergie du champ électrique dans G change en fonction du flux d'énergie vers l'extérieur de la région G et du travail effectué sur les courants.

Si les effets non-linéaires sont importants, (1.65) n'est plus valable pour les champs macroscopiques et il faut utiliser la forme (1.62).

Conservation de l'impulsion

La *densité de force* appliquée sur les charges et sur les courants par le champ électromagnétique est

$$\mathbf{k} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \wedge \mathbf{B}.$$

Nous éliminons ρ et \mathbf{J} avec les équations de Maxwell (lois de Coulomb et d'Ampère) pour obtenir

$$4\pi \mathbf{k} = \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + (\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}) \wedge \mathbf{B}.$$

A cette équation on ajoute le terme nul

$$0 = \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{D} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}})$$

ce qui donne

$$4\pi \mathbf{k} = [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E})] + [\mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{H})] - \frac{1}{c} \partial_t (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}).$$

Considérons d'abord la théorie microscopique où

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} \equiv \mathbf{B}.$$

Avec $\mathbf{\Pi} := \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$ nous trouvons que

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = -\mathbf{k} + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})]. \quad (1.66)$$

Calculons la i -ème composante de l'expression pour \mathbf{E} dans []. Par la suite, nous n'écrivons plus le signe de somme \sum , mais s'il y a deux indices identiques dans un terme, on sous-entendra une somme de 1 à 3 sur ces indices (convention d'Einstein).

Par exemple:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^3 \partial_i A_i \equiv \partial_i A_i \\ (\nabla \wedge \mathbf{A})_i &= \sum_{j,\ell=1}^3 \varepsilon_{ij\ell} \partial_j A_\ell \equiv \varepsilon_{ij\ell} \partial_j A_\ell. \end{aligned}$$

Nous allons aussi utiliser les identités (la démonstration est laissée comme exercice)

$$\varepsilon_{ilm} = \varepsilon_{lmi} = \varepsilon_{mil},$$

$$\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk} = \delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{jm}.$$

Avec ceci nous avons que

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E})]_i &= E_i \partial_j E_j - \underbrace{\varepsilon_{ijk} E_j \varepsilon_{klm}}_{(\delta_{li}\delta_{jm} - \delta_{lm}\delta_{ji})E_j} \partial_l E_m \\ &= E_i \partial_j E_j - E_j \partial_i E_j + E_j \partial_j E_i \\ &= \partial_j [E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2]. \end{aligned}$$

Comme l'expression pour \mathbf{B} est exactement la même, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})]_i &= \\ \frac{1}{4\pi} \partial_j (E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{E}^2 + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{B}^2) &= -\partial_j T_{ij} \end{aligned}$$

avec

$$T_{ij} := \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_i E_j - B_i B_j \right]. \quad (1.67)$$

Finalement, l'équation (1.66) se réduit alors à

$$\dot{\Pi}_i + \partial_j T_{ij} = -k_i.$$

En utilisant que $\int_G \mathbf{k} = \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{(\text{méc})}$ on trouve que

$$\int_G (\dot{\Pi} + \mathbf{k})_i d^3x = \frac{d}{dt} \left(P_i^{(\text{champ})} + P_i^{(\text{méc})} \right) = - \int_{\partial G} T_{ik} e^k ds. \quad (1.68)$$

Si on interprète cette expression comme l'équation de la *conservation de l'impulsion* dans un ouvert G , $\int_G \Pi d^3x$ représente *l'impulsion du champ électromagnétique*. Le membre de droite, $T_{ik} e^k$, est le flux de force du champ par unité de surface et $P_i^{(\text{champ})}$ est la i -ème composante de l'impulsion du champ électromagnétique dans G . D'après (1.63),

$$\frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}. \quad (1.69)$$

Dans un milieu linéaire et isotrope où $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ et $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ avec $\varepsilon = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$, on trouve l'équation (1.68) avec

$$\Pi = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D} \wedge \mathbf{B} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \mathbf{S}$$

et

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) - E_i D_j - H_i B_j \right].$$

Si ε et μ dépendent de la position (mais pas du temps !) des forces supplémentaires, $\mathbf{k}_E = -\frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2 \nabla \varepsilon$ et $\mathbf{k}_M = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2 \nabla \mu$ s'ajoutent.

De la même façon, on peut discuter la conservation du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{L}^{(\text{champ})} + \mathbf{L}^{(\text{méc})})_i = - \int_{\partial G} M_{ij} e^j ds$$

ou

$$\partial_t (\mathcal{L}^{(\text{champ})} + \mathcal{L}^{(\text{méc})})_i = -\partial_j M_{ji} . \quad (1.70)$$

Si on peut négliger les susceptibilités électrique et magnétique, $\varepsilon \equiv \mu \equiv 1$, on trouve (1.70) avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^{(\text{champ})} &= \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{x} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}))_i \\ &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{\Pi})_i \\ \mathcal{L}^{(\text{méc})} &= \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \\ L_i^{(\cdot)} &= \int_G \mathcal{L}_i^{(\cdot)} d^3x \\ M_{ij} &= \varepsilon_{jlm} T_{il} x_m . \end{aligned}$$

La démonstration de l'équation (1.70) est laissée comme *exercice*. M_{ij} est un (pseudo) tenseur de rang deux qui décrit le flux de moment cinétique du champ électromagnétique.

1.6 Le formalisme relativiste de l'électrodynamique

(Jackson, chap. 11)

Transformations de Lorentz

Le principe de base de la relativité restreinte est que les lois physiques sont les mêmes dans tout référentiel (ou repère) inertiel. Par rapport à un référentiel inertiel une particule qui ne subit aucune force se meut à vitesse constante. (Ceci est souvent donné comme définition d'un repère inertiel, mais pour la contrôler il faut à priori connaître toutes les forces... qui sont en général définies comme ce

qui accélère une particule par rapport à un référentiel inertiel...) Je ne connais pas de définition satisfaisant de repère inertiel, mais si un repère inertiel est fixé tous les autres sont obtenus par des 'boosts' (voir en bas), rotations, réflexions et inversions du temps. (En réalité ne pas toutes les lois physiques sont invariantes sous ces dernières transformations discrètes, les réflexions et l'inversion du temps. Les interactions faibles, qui sont responsables pour la désintégration β des isotopes instables ne le sont pas!)

Si Σ est un référentiel inertiel, donc aussi Σ' , qui bouge avec une vitesse constante et rectiligne (boost) par rapport à Σ , ou qui est tourné par rapport à Σ , est un référentiel inertiel. Un physicien dans le référentiel Σ , qui fait la même expérience que la physicienne dans le référentiel Σ' , obtient exactement le même résultat. Ce principe a été formulé pour la première fois par Galilée (principe de Galilée) qui a alors postulé que les lois de la mécanique soient invariantes sous la transformation:

$$\Sigma \rightarrow \Sigma' \\ \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} - t\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (\text{transformation de Galilée}). \quad (1.71)$$

Ici Σ et Σ' sont deux référentiels inertiels qui coïcident à $t = 0$ et Σ' bouge avec vitesse \mathbf{v} par rapport à Σ . Si une particule a la vitesse $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ dans Σ , elle a la vitesse $\mathbf{u}' = d\mathbf{x}'/dt' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ dans Σ' .

D'après les équations de Maxwell, l'invariance des lois physique implique que la vitesse de la lumière est la même dans chaque repère inertiel. Et c'est exactement cette condition que Einstein voulait assurer avec des nouvelles transformations au lieu de (1.71). Des nouvelles transformations sont certainement nécessaires, car nous voulons que $c' = c \neq c - v$.

Une conséquence élémentaire mais très importante de la constance de la vitesse de la lumière est la relativité de la simultanéité des événements qui ont lieu à des positions différentes. Pour illustrer ceci, nous considérons un éclair qui a lieu exactement au milieu entre deux écrans posés à droite et à gauche. Pour une expérimentatrice au repos par rapport aux écrans, les deux écrans s'illuminent au même instant. Un expérimentateur qui, lui aussi se trouve au milieu entre les écrans quand les raies réfléchis y arrivent, mais qui se propage vers la droite voit l'écran droit s'approcher vers le milieu et donc il a été plus loin au moment où le photon y été réfléchi. Les photons de droite ont donc parcouru donc un chemin plus long pour arriver au milieu que ceux de la gauche. Comme aussi pour lui, la vitesse de la lumière est la même, l'écran droit s'est illuminé avant l'écran gauche, les deux événements ne sont pas simultanés dans son repère. Ceci indique que ces nouvelles transformations transformerons aussi le temps, et ne pas juste \mathbf{x} .

Nous voulons déterminer comment les coordonnées, t et \mathbf{x} changent sous un changement de référentiel. Pour ceci nous utilisons seulement que la vitesse de la lumière,

c , qui sort des équations de Maxwell est la même dans tout repère. L'équation $(ct)^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ est alors indépendant du repère. Cet équation est aussi invariant si un repère est dilaté par rapport à l'autre, $t' = \alpha t$, $\mathbf{x}' = \alpha \mathbf{x}$ pour une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Mais nous savons que la physique n'est pas invariante sous dilatations (par exemple les lignes de l'atome d'hydrogène sont les mêmes dans tout repère inertiel). Pour éliminer ces dilatations qui sont en désaccord avec les phénomènes, nous supposons que $(ct)^2 - \mathbf{x}^2$ est indépendant du référentiel pour toute valeur de cette invariante³. Nous demandons aussi que la transformation soit linéaire et nous considérons Σ' qui bouge avec vitesse $v = \text{const.}$ en direction $x = x^1$. Nous supposons

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t - c^{-1}\delta x) \\ \gamma(x - c\beta t) \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

et demandons que $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$. Si nous insérons les expressions de (1.72) dans $(ct)^2 - \mathbf{x}^2$, nous trouvons

$$c^2t^2 - x^2 = c^2\alpha^2t^2 - 2c\alpha\delta tx + \alpha^2\delta^2x^2 - \gamma^2x^2 + 2c\gamma\beta xt - c^2\gamma^2\beta^2t^2 \quad \forall x, t.$$

En demandant que les coefficients des deux cotés soient les mêmes, nous obtenons $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ et

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.73)$$

Il reste la fonction a-dimensionnelle, inconnue $\beta(v)$. A petite vitesse, $v \ll c$, nous voulons retrouver le résultat de Galilée, ce qui requiert $\beta = v/c + \mathcal{O}((v/c)^2)$. Un 'boost' avec v en direction x alors transforme

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

avec

$$\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

³C'est un exercice mathématique de montrer que les transformations qui conservent $(ct)^2 - \mathbf{x}^2 = 0$ sont juste ceux qui laissent invariant $(ct)^2 - \mathbf{x}^2 = s^2$ pour toute s et les dilatations. Si on ne considère que des transformations linéaires, l'exercice est simple. Il est intéressant que c'est encore vrai si on admet aussi des transformations non-linéaires (mais différentiables) mais c'est beaucoup plus difficile à démontrer. Ceci est le théorème de Alexandrov, 1975 (Voir: W. Benz, 'Geometrische Transformationen', BI Wissenschaftsverlag, 1992).

Le boost inverse est celui avec vitesse $-v$ et il est facile à vérifier que la matrice $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$. Donc $\beta(-v) = -\beta(v)$ et β ne peut pas acquérir des termes quadratiques en v/c . Il est un fait expérimental que β n'a aucune correction, c'est-à-dire, $\beta = v/c$.

Nous définissons le quadri-vecteur

$$x = (x^\mu) = (ct, \mathbf{x}), \quad x^0 = ct, \quad x^i = x^i \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

et la 'métrique'

$$g \equiv (g_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (g_{\mu\nu})^{-1} \equiv (g^{\mu\nu}) \equiv g^{-1}. \quad (1.76)$$

Dans ce cours nous avons choisi la signature métrique $(-, +, +, +)$, nous dénommons l'inverse de la métrique par $(g^{\mu\nu})$.

Il est alors $(ct)^2 - \mathbf{x}^2 = -x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$, qui est invariant du repère⁴. Comme

$$x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = [(x + y)^\mu g_{\mu\nu} (x + y)^\nu - (x - y)^\mu g_{\mu\nu} (x - y)^\nu]/4,$$

il suit que $x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu$ est invariant pour tous quadri-vecteurs (x^μ) , (y^ν) . Pour un boost,

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu,$$

ceci implique que $\Lambda^\alpha_\nu x^\nu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\mu y^\mu = x^\nu g_{\nu\mu} y^\mu$ pour tout quadri-vecteur (x^μ) , $(y^\nu) \in \mathbb{R}^4$, et alors

$$\Lambda^\alpha_\nu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\mu = g_{\nu\mu}. \quad (1.77)$$

En notation matricielle (1.77) s'écrit $\Lambda^T g \Lambda = g$. A part des boost en direction x^1 , il est évident que les rotations et réflexions avec

$$\Lambda(R) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

où $RR^T = \mathbb{1}$ c'est à dire $R \in O(3)$ aussi satisfont à la condition (1.77).

Un boost dans une direction quelconque peut être composé d'une rotation suivie par un boost en direction x^1 et la rotation inverse. On peut montrer que chaque matrice Λ qui satisfait $\Lambda^T g \Lambda = g$ avec $\det(\Lambda) = 1$ et $\Lambda^0_0 \geq 1$ peut être composée d'un boost et d'une rotation.

Pour tout quadri-vecteur (v^μ) qui transforme comme $v^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu v^\nu$ l'éq (1.77) implique que $v^2 \equiv g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$ est invariant sous transformations de Lorentz. Nous

⁴Sur toutes les indices grecs qui apparaissent deux fois dans une expression il faut effectuer la somme de 0 à 3.

dénommons $v_\mu \equiv g_{\mu\nu}v^\nu$, tel que $v^2 = v_\mu v^\mu$ est invariant sous transformations de Lorentz.

Exemples

$(v^\mu) = (x^\mu) = (ct, \mathbf{x})$. Donc $v^2 = -c^2t^2 + \mathbf{x}^2 = \text{constant}$ est l'équation de mouvement pour un rayon lumineux. Qu'elle soit indépendant du référentiel est la base de la relativité restreinte.

$(v^\mu) = (p^\mu) = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$. Ici ε est l'énergie de la particule (voir cours de mécanique I).

$$\begin{aligned} (p^\mu) &= (mv^\mu) = (m\gamma c, m\gamma \mathbf{v}) \text{ et} \\ p^2 &= -(p^0)^2 + \mathbf{p}^2 = -m^2c^2, \end{aligned}$$

m signifie toujours la masse de la particule au repos.

En multipliant l'éq. (1.77) à droite par $(\Lambda^{-1})^\mu_\sigma$ et à gauche par $g^{\rho\nu}$ on trouve

$$(\Lambda^{-1})^\rho_\sigma = g^{\rho\beta} \Lambda^\nu_\beta g_{\nu\sigma}. \quad (1.78)$$

En notation matricielle ceci est $\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g$. Avec l'éq. (1.78) nous trouvons que

$$v'_\mu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma v^\sigma = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma g^{\sigma\rho} v_\rho = ((\Lambda^{-1})^T)_\mu^\rho v_\rho.$$

Souvent nous dénommons

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma g^{\sigma\rho} \equiv \Lambda_\mu^\rho \equiv ((\Lambda^{-1})^T)_\mu^\rho, \quad \text{tel que} \quad v'_\mu = \Lambda_\mu^\nu v_\nu. \quad (1.79)$$

Des quadri-vecteurs (v^μ) sont des vecteurs dites *contravariants*, ils transforment avec $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)$ sous des transformations de Lorentz. Par contre, des quadri-vecteurs (v_μ) sont des vecteurs dites *covariants*, ils transforment avec $(\Lambda^{-1})^T = (\Lambda_\mu^\nu)$ sous des transformations de Lorentz.

Nous ne considérons pas seulement des quadri-vecteurs mais aussi des tenseurs, par exemple $T_{\mu\nu}$, telles que $T_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$ est un scalaire, donc invariant sous une transformation de Lorentz, pour des quadri-vecteurs (v^μ) et (w^ν) quelconques. Avec $v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu$ et de même pour w^ν nous avons que

$$T'_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha v^\alpha \Lambda^\nu_\beta w^\beta = T_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \quad \text{donc} \quad T'_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = T_{\mu\nu}. \quad (1.80)$$

En multipliant avec $(\Lambda^{-1})^\alpha_\rho (\Lambda^{-1})^\beta_\sigma$ en utilisant (1.79), nous trouvons

$$T'_{\rho\sigma} = \Lambda_\rho^\alpha \Lambda_\sigma^\beta T_{\alpha\beta}. \quad (1.81)$$

Pour un quadri-tenseur de rang n nous définissons la façon générale de "monter et descendre des indices":

$$T_{\mu_1}^{\mu_2 \dots \mu_n} = g_{\mu_1 \nu} T^{\nu \mu_2 \dots \mu_n},$$

ce qui implique

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n} = g^{\mu_1 \nu} T_{\nu}^{\mu_2 \dots \mu_n},$$

et de même avec tous les autres indices. Donc pour un quadri-tenseur chaque indice de bas se transforme avec (Λ_{μ}^{ν}) tandis que chaque indice de haut se transforme avec (Λ^{μ}_{ν}) sous transformation de Lorentz. Si nous avons une équation de la forme

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = S^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

cette équation reste valable dans tout référentiel. D'autre part, si nous voulons qu'une équation garde la même forme dans chaque référentiel, il faut pouvoir l'écrire comme équation quadri-tensorielle. D'après la *relativité restreinte* les lois naturelles de base sont valables dans n'importe quel référentiel inertiel donc elles doivent s'exprimer sous forme quadri-tensorielle (*covariante*).

Temps propre Nous considérons une particule/un objet en mouvement avec vitesse \mathbf{v} dans Σ . Dans un temps dt la particule bouge de $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$. L'invariance de la vitesse de la lumière implique que

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2(1 - \beta^2)dt^2 = \frac{c^2}{\gamma^2} dt^2, \quad \beta^2 = \mathbf{v}^2/c^2$$

est le même dans tous les référentiels. Dans le référentiel où la particule est au repos ceci donne $d\tau^2 = c^{-2} ds^2 = dt'^2$, donc on appelle τ le temps propre de la particule. Dans un référentiel générique $dt = \gamma d\tau$. Le différentiel $d\tau$ et donc le temps propre τ est indépendant du référentiel. C'est un scalaire sous transformation de Lorentz, un quadri-scalaire. Le temps qui passe entre deux temps propres τ_1 et τ_2 est alors

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau \geq \tau_2 - \tau_1. \quad (1.82)$$

Donc une montre en mouvement est plus lente qu'une montre au repos. Ce fait a été testé expérimentalement pas seulement avec des particules élémentaires qui vivent plus longtemps dans un accélérateur, mais aussi avec des montres très précis dans un avion.

Addition de vitesses Nous considérons de nouveau Σ' qui bouge avec vitesse v en direction x^1 par rapport à Σ . Pour des différentiels des coordonnées nous avons alors

$$\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v(dx'^0 + \beta dx'^1) \\ \gamma_v(dx'^1 + \beta dx'^0) \\ dx'^2 \\ dx'^3 \end{pmatrix}. \quad (1.83)$$

Considérons une particule qui bouge avec vitesse $\mathbf{u}' = d\mathbf{x}'/dt' = cd\mathbf{x}'/dx'^0$ dans Σ' . Nous supposons que la partie de la vitesse qui est normale à x'^1 soit parallèle à $y' = x'^2$. Sa vitesse dans Σ est alors

$$u_{\parallel} \equiv u^1 = \frac{dx^1}{dt} = c \frac{dx'^1 + \beta dx'^0}{dx'^0 + \beta dx'^1} = \frac{u'^1 + c\beta}{1 + \beta u'^1/c} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + (vu'_{\parallel})/c^2} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}')/c^2}$$

$$u_{\perp} \equiv u^2 = \frac{dx^2}{dt} = \frac{c}{\gamma_v} \frac{dx'^2}{dx'^0 + \beta dx'^1} = \frac{1}{\gamma_v} \frac{u'_{\perp}}{1 + (vu'_{\parallel})/c^2} = \frac{1}{\gamma_v} \frac{u'_{\perp}}{1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}')/c^2}$$

où $\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Cette expression n'a pas l'aire symétrique en v et u' . Mais il est facile à démontrer que $\gamma_u = \gamma_v \gamma_{u'} (1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2})$ et donc les équations précédentes deviennent

$$\gamma_u u_{\parallel} = \gamma_v \gamma_{u'} (u'_{\parallel} + v)$$

$$\gamma_u u_{\perp} = \gamma_{u'} u'_{\perp},$$

ce qui est parfaitement symétrique en v et u' .

Formulé sous forme d'exercice, le paragraphe suivante sur le groupe de Lorentz est plutôt destinée aux étudiants de la physique théorique:

Définition: L'ensemble des matrices $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 4} | \Lambda g \Lambda^T = g\} \equiv O(1, 3) \equiv L$, avec $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ est le groupe de Lorentz.

Montrer les énoncés suivants.

- $\Lambda^T g \Lambda = g$ si Λ est une rotation ou un boost de direction x^1 et si $\Lambda = T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ou $\Lambda = P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. (C'est-à-dire, les rotations, boosts direction x^1 , T et P sont des éléments de L .)
- L est vraiment un groupe dans le sens mathématique du terme.
- Pour $\Lambda \in O(1, 3)$, $|\det \Lambda| = 1$ et $|\Lambda_0^0| \geq 1$.
- $O(1, 3) \subset \mathbb{R}^{4 \times 4} \cong \mathbb{R}^{16}$ consiste en quatre composantes non connexes:

$$L_+^{\uparrow} = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \geq 1\}$$

$$L_-^{\uparrow} = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \geq 1\}$$

$$L_-^{\downarrow} = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = -1, \Lambda_0^0 \leq -1\}$$

$$L_+^{\downarrow} = \{\Lambda \in O(1, 3) | \det \Lambda = 1, \Lambda_0^0 \leq -1\}.$$

- Dans un voisinage de l'identité, le groupe $O(1,3)$ est paramétrisé par 6 paramètres. C'est-à-dire, le groupe de Lorentz est 6 dimensionnel.

Les boost et les rotations forment un groupe de matrices dénommé L_+^\uparrow , le *groupe de Lorentz propre*. D'autres transformations de Lorentz sont l'*inversion du temps*, T et la parité, P . Le groupe de Lorentz intégral est

$$\begin{aligned} L &= L_+^\uparrow \oplus PL_+^\uparrow \oplus TL_+^\uparrow \oplus PTL_+^\uparrow \\ &= L_+^\uparrow \oplus L_-^\uparrow \oplus L_-^\downarrow \oplus L_+^\downarrow. \end{aligned}$$

Ici \pm indique le signe du déterminant et \uparrow ou \downarrow indique $\Lambda_0^0 \geq 1$ ou $\Lambda_0^0 \leq -1$ respectivement.

L'électrodynamique covariante

Nous voulons alors trouver la formulation covariante (formulation relativiste) des lois de l'électrodynamique.

D'abord, pour trouver une formulation relativiste de la conservation de la charge nous posons $(j^\mu) = (c\rho, \mathbf{J})$. Comme $(x^\mu) = (ct, \mathbf{x})$ aussi les dérivées partielles $(\partial_\mu) \equiv (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_i)$ forment un quadri-vecteur. Avec ces définitions, la conservation de la charge, éq. (1.59) s'écrit

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0). \quad (1.84)$$

Comme 0 est un scalaire invariant de Lorentz, ceci implique que (j^μ) est aussi un quadri-vecteur.

Nous aimerions trouver une forme covariante pour les équations de Maxwell en \mathbf{E} et \mathbf{B} . Dans ce but, considérons d'abord le cas statique où ρ est constant et \mathbf{J} est nul. Nous verrons que la *covariance* va entièrement déterminer la forme des équations de Maxwell à partir des équations de l'électrostatique. Les équations de l'électrostatique sont

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Pour généraliser l'équation de Coulomb à une équation covariante, il faut se rendre compte que ρ est la composante "0" du quadri-vecteur j^μ . L'équation recherchée doit alors être de la forme

$$-(\partial \cdot F)^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Ici $\partial \cdot F$ est la divergence d'un champ tensoriel de rang deux qui est linéaire en \mathbf{E} . (Le signe $-$ est une pure convention.) Nous avons alors l'équation

$$-\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu. \quad (1.85)$$

En plus, nous voulons assurer la conservation de la charge, $\partial_\mu j^\mu = 0$, ce qui implique que

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0.$$

Ceci nous pousse à postuler un tenseur $F^{\mu\nu}$ antisymétrique,

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

(Nous pourrions ajouter à $F_{\mu\nu}$ une partie symétrique $S_{\mu\nu}$, qui satisfait à $\partial_\mu \partial_\nu S^{\mu\nu} = 0$, mais $S^{\mu\nu}$ est entièrement découplée de la partie antisymétrique et de la source (j^μ). Il est donc cohérent avec les équations de Maxwell de poser $S_{\mu\nu} \equiv 0$, ce que nous faisons pour des raisons d'économie.)

Un tenseur antisymétrique quadri-dimensionnel a 6 composantes indépendantes. Les composantes F^{i0} sont à identifier avec le champ électrique à cause de (1.85) pour $\mu = 0$. Nous posons alors

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

où l'interprétation des composantes B_i n'est pas claire *a priori*. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} F^{i0} &= -E^i = -F^{0i} \\ F^{ij} = F_{ij} &= \varepsilon_{ijl} B_l = -F_{ji}, \quad B_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} F^{ij}. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Avec ça, $-\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0$ est équivalent à la loi de Coulomb.

En posant $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$, l'équation (1.85) pour $\mu = i$ nous donne

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{0i} + \partial_\ell F^{\ell i} &= -\frac{4\pi}{c} j^i \\ \frac{1}{c} \dot{E}^i + \underbrace{\partial_\ell \varepsilon^{\ell ij} B_j}_{-\varepsilon^{ijl} \partial_\ell B_j} &= -\frac{4\pi}{c} j^i \\ &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la loi d'Ampère, si nous interprétons \mathbf{B} comme le champ d'induction. L'existence du champ d'induction \mathbf{B} est alors une pure conséquence de la *covariance* de l'électrodynamique! Ceci est un exemple très net de la puissance des symétries en physique: l'exigence que les équations soient les mêmes dans tous les référentiels inertiels, c'est-à-dire qu'elles soient *covariantes*, nous mène de l'électrostatique aux équations de Maxwell dynamiques et implique l'existence de

l'induction magnétique. Le tenseur $F^{\mu\nu}$ s'appelle le tenseur du champ électromagnétique ou le tenseur de Faraday.

(Bien sûr, historiquement, la chose ne s'est pas passée comme ça!)

Pour trouver la généralisation de l'équation statique homogène, $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$, nous définissons d'abord le tenseur dual à $F^{\mu\nu}$,

$$*F^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (1.88)$$

où

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} \text{sgn}(0, 1, 2, 3 \mapsto \mu\nu\alpha\beta) & \text{si } \mu, \nu, \alpha, \beta \text{ sont tous différents,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$(*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

De cette représentation il suit que $F^{\mu\nu} \rightarrow *F^{\mu\nu}$ si $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \rightarrow (\mathbf{B}, -\mathbf{E})$.

On a alors que

$$(*F)^{ij} = \frac{1}{2} (\epsilon^{ij\ell 0} F_{\ell 0} + \epsilon^{ij 0\ell} F_{0\ell}) = -\epsilon^{ij\ell} E_\ell$$

et $0 = (\nabla \wedge \mathbf{E})_i = \epsilon_{ij\ell} \partial_j E_\ell$ est équivalent à

$$0 = (\nabla \wedge \mathbf{E})_i = -\partial_j (*F)^{ij}.$$

La généralisation covariante de cette équation est évidemment

$$\partial_\mu (*F)^{\nu\mu} = 0, \quad (1.90)$$

ce qui est équivalent aux équations de Maxwell homogènes (exercice). En conclusion: les équations de Maxwell sont compatibles avec la relativité restreinte et leur forme explicitement covariante est

$$\begin{aligned} \partial_\nu (*F^{\nu\mu}) &= 0 && \text{(équations homogènes),} \\ \partial_\nu F^{\nu\mu} &= -\frac{4\pi}{c} j^\mu && \text{(équations inhomogènes).} \end{aligned}$$

Les équations homogènes, (1.90), sont équivalentes à

$$F_{\alpha\beta,\nu} + F_{\beta\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta} = 0$$

(le montrer comme exercice). En 4 dimensions ceci implique (*Lemme de Poincaré*) l'existence d'un potentiel A_μ tel que

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (1.91)$$

Nous posons $(A^\mu) = (\phi, \mathbf{A})$ ce qui donne

$$\begin{aligned} E_i &= F_{i0} = -\partial_i\phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i \\ B_\ell &= \frac{1}{2}\varepsilon_\ell^{ij}F_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_\ell^{ij}(\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= (\nabla \wedge \mathbf{A})_\ell. \end{aligned}$$

L'*Ansatz* (1.91) satisfait automatiquement les équations de Maxwell homogènes. Les équations inhomogènes deviennent

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= \partial^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu = -\frac{4\pi}{c}j_\nu \\ -\square A_\nu - \partial^\mu \partial_\nu A_\mu &= -\frac{4\pi}{c}j_\nu. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Ici nous avons posé

$$\square = -\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta,$$

le d'Alembertien ou l'opérateur d'onde. Une transformation de jauge est maintenant une transformation de la forme:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

et la condition de jauge de Lorentz est simplement (cf. éq. (1.54))

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (1.93)$$

Dans la jauge de Lorentz les équations inhomogènes (1.92) donnent

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu. \quad (1.94)$$

Dans le vide, $j^\mu = 0$, nous avons que (dans la jauge de Lorentz)

$$\square F_{\mu\nu} = \square(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\mu \square A_\nu - \partial_\nu \square A_\mu = 0.$$

Comme $F_{\mu\nu}$ est indépendant de la jauge, ce résultat est valable dans une jauge quelconque. En effet, sans recours aux potentiels A_μ , nous avons que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial^\alpha (\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu}) \\ &= -\square F_{\mu\nu} + \partial_\mu \underbrace{\partial^\alpha F_{\nu\alpha}}_0 + \partial_\nu \underbrace{\partial^\alpha F_{\alpha\mu}}_0. \end{aligned}$$

Alors

$$\square F_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{pour } j^\mu = 0). \quad (1.95)$$

Dans le vide chaque composante du champ électromagnétique satisfait l'équation d'onde.

Transformations de Lorentz du champ électromagnétique

$F^{\mu\nu}$ est un tenseur de rang deux. Sous une transformation de Lorentz Λ , il se transforme alors comme

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}. \quad (1.96)$$

Nous considérons d'abord une rotation,

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & | & & 0 \\ - & + & - & - \\ 0 & | & & R \\ & | & & \end{pmatrix}, \quad (1.97)$$

avec $R \cdot R^T = \mathbb{I}$ et $\det R = 1$ ($R \in SO(3)$). Comme \mathbf{E} et \mathbf{B} sont des vecteurs à trois dimensions, (1.96) doit impliquer $(E^i)' = R^i_j E^j$ et de même pour \mathbf{B} . On veut vérifier ceci:

$$(E^i)' = (-F^{i0})' = -\Lambda^i_\alpha \Lambda^0_\beta F^{\alpha\beta} = -\Lambda^i_j F^{j0} = R^i_j E^j;$$

$$F^{ij} = \varepsilon^{ij}_\ell B^\ell \Rightarrow \varepsilon^k_{ij} F^{ij} = \varepsilon^k_{ij} \varepsilon^{ij}_\ell B^\ell = 2B^k,$$

$$\begin{aligned} (B^k)' &= \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} (F^{ij})' = \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} \Lambda^i_\alpha \Lambda^j_\beta F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} R^i_m R^j_n F^{mn} = \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} R^i_m R^j_n \varepsilon^{mn}_\ell B^\ell. \end{aligned}$$

Maintenant utilisons que ε_{mnl} est un tenseur invariant sous rotations:

$$R_p^k R_m^j R_n^i \varepsilon_k^{mn} = \varepsilon_p^{ji}$$

$$\Rightarrow R_\ell^p \varepsilon_p^{ji} = R_m^j R_n^i R_k^p R_\ell^p \varepsilon_k^{mn} = R_m^j R_n^i \varepsilon_\ell^{mn}.$$

Pour le dernier signe d'égalité nous avons fait appel à $R \cdot R^T = \mathbb{I}$, ce qui est équivalent à $R^p_k R^p_\ell = \delta_{k\ell}$.

Alors $R^i_m R^j_n \varepsilon_\ell^{mn} = R_\ell^p \varepsilon_p^{ij}$. Donc

$$(B^k)' = \frac{1}{2} \varepsilon^k_{ij} \underbrace{R_\ell^p \varepsilon_p^{ij}}_{2\delta^k_\ell} B^\ell = R^k_\ell B^\ell.$$

Nous avons donc trouvé que \mathbf{B} et \mathbf{E} transforment comme des vecteurs tridimensionnels sous une rotation; ce qui est en accord avec le comportement attendu de l'électrodynamique dans sa formulation non-covariante.

Maintenant, nous étudions le comportement de \mathbf{E} et \mathbf{B} sous un boost de vitesse v dans la direction x_1 . Cette transformation de Lorentz est donnée par

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.98)$$

où $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

$$\begin{aligned} (F^{\mu\nu})' &= \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \\ (E_1)' &= (-F^{10})' = -\Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1 F^{01} - \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 F^{10} \\ (E_1)' &= \underbrace{(\Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1)}_{\gamma^2(1-\beta^2)} E_1 = E_1 \\ (E_2)' &= (-F^{20})' = -\Lambda_2^2 (\Lambda_0^0 F^{20} + \Lambda_1^0 F^{21}) \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$(E_2)' = \gamma E_2 - \gamma\beta B_3 \quad (1.100)$$

et de même

$$(E_3)' = \gamma E_3 + \gamma\beta B_2 \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} (B_1)' &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij1} F^{ij})' = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij1} \Lambda^i{}_\alpha \Lambda^j{}_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{231} F^{23} + \varepsilon_{321} F^{32}) = B_1 \\ B_1' &= B_1 \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} (B_2)' &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij2} F^{ij})' = (\varepsilon_{132} F^{13})' = \varepsilon_{132} \Lambda^1{}_\alpha \Lambda^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = \varepsilon_{132} (\Lambda_0^1 F^{03} + \Lambda_1^1 F^{13}) \\ B_2' &= \gamma B_2 + \gamma\beta E_3 \end{aligned} \quad (1.103)$$

et de même

$$B_3' = \gamma B_3 - \gamma\beta E_2. \quad (1.104)$$

Exemple: le champ électromagnétique d'une charge ponctuelle en mouvement uniforme

Nous considérons une charge e qui bouge avec une vitesse v en direction x^1 dans le référentiel Σ . Dans le référentiel Σ' , qui bouge avec une vitesse v en direction x^1 , la charge est au repos. En Σ' elle crée alors le champ

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \frac{e\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3}, \quad \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = 0.$$

En utilisant la transformation de (x^μ) sous un boost en direction x^1 à vitesse v on a que

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'^1), \quad ct' = \gamma(ct - \beta x^1) \quad (1.105)$$

$$x^1 = \gamma(x'^1 + \beta t'), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta ct) \quad (1.106)$$

$$x^2 = x'^2 \quad (1.107)$$

$$x^3 = x'^3 \quad (1.108)$$

et en utilisant les équations (1.100) à (1.104) nous obtenons que

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{x}, t) &= E'_1(\mathbf{x}', t') = \frac{e\gamma(x^1 - vt)}{\left[\gamma^2(x^1 - vt)^2 + \underbrace{(x^2)^2 + (x^3)^2}_{b^2} \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{e\gamma(x^1 - vt)}{[\gamma^2(x^1 - vt)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad b^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2 \end{aligned} \quad (1.109)$$

$$E_2(\mathbf{x}, t) = \frac{e\gamma x^2}{[\gamma^2(x^1 - vt)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.110)$$

$$E_3(\mathbf{x}, t) = \frac{e\gamma x^3}{[\gamma^2(x^1 - vt)^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.111)$$

Au temps $t = 0$, nous obtenons

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) = \frac{e(1 - \beta^2)\mathbf{x}}{[r^2 - \beta^2 b^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad r = |\mathbf{x}|. \quad (1.112)$$

Avec $\sin \vartheta = \frac{b}{r}$ ceci donne

$$|\mathbf{E}|(\mathbf{x}, t = 0) = \frac{e(1 - \beta^2)}{r^2(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.113)$$

Pour r fixé, $|\mathbf{E}|$ est alors maximal dans la direction $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $b = r$, donc dans le plan normal à la direction du mouvement. $|\mathbf{E}|$ est minimal dans la direction $\pm x^1$, $\vartheta = 0$ et π :

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{E}| &= \frac{e}{r^2(1 - \beta^2)^{1/2}} & \vartheta &= \frac{\pi}{2} \\ |\mathbf{E}| &= \frac{e(1 - \beta^2)}{r^2} & \vartheta &= 0, \pi \end{aligned} \right\}. \quad (1.114)$$

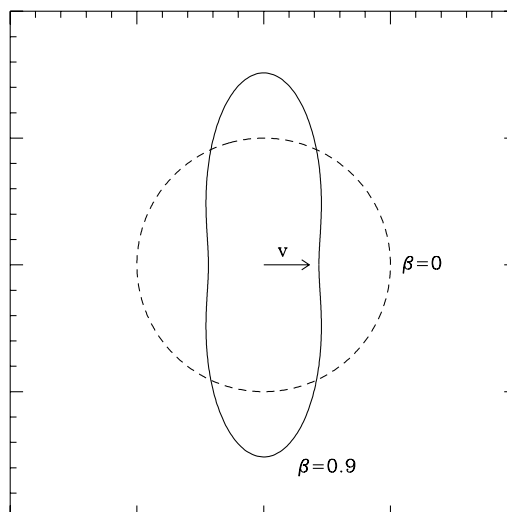


Figure 1.1: Surfaces $|\mathbf{E}| = \text{constante}$ pour une charge ponctuelle au repos (tirets) et pour une charge ponctuelle de vitesse \mathbf{v} constante (trait plein).

Les surfaces $|\mathbf{E}| = \text{const.}$ sont contractées dans la direction du mouvement et dilatées dans les directions orthogonales (voir figure 1.1).

Pour le champ magnétique, nous obtenons

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -\beta\gamma E'_3 = -\beta E_3, \quad B_3 = \beta\gamma E'_2 = \beta E_2,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E} \quad (\mathbf{B} \perp \mathbf{E}). \quad (1.115)$$

Une charge en mouvement crée un champ magnétique de direction perpendiculaire à \mathbf{v} avec une amplitude proportionnel à $\frac{v}{c}$.

La force de Lorentz relativiste

Pour compléter le formalisme relativiste, nous cherchons encore la forme relativiste pour l'équation de la force de Lorentz. Pour des particules de charge q à petite vitesse $v \ll c$ nous avons la limite non-relativiste

$$m \frac{dv^i}{dt} = q \left(E^i + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})^i \right). \quad (1.116)$$

De la mécanique relativiste, vous connaissez la quadri-vitesse

$$(u^\mu) = (c\gamma, \mathbf{v}\gamma), \quad u^2 = -(u^0)^2 + \sum_i (u^i)^2 = -c^2, \quad p = mu.$$

Mais, comme ct est la composante zéro d'un quadri-vecteur, donc $\frac{du^\mu}{dt}$ n'est pas un quadri-vecteur. Il faut remplacer dt par le *temps propre* de la particule, $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, qui est, comme nous avons vu un quadri-scalaire. Evidemment, $u^\mu = dx^\mu/d\tau$. Avec $dt = \gamma d\tau$ (1.116) devient

$$m \frac{du^i}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{i\alpha} u_\alpha.$$

La formulation quadri-dimensionnelle de cette équation est

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu. \quad (1.117)$$

La composante zéro de (1.117) décrit le changement d'énergie ε d'une particule dans un champ électromagnétique:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{0i} v_i \gamma = q\gamma \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (1.118)$$

$$\varepsilon = p^0 c, \quad \frac{d\varepsilon}{d\tau} = q\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.119)$$

$(p^\mu) = (\frac{\varepsilon}{c}, \mathbf{p})$ est le quadri-vecteur d'énergie-impulsion de la particule. $d\varepsilon/d\tau$ est le changement d'énergie de la particule du au travail fourni par le champ électrique.

Le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

Nous définissons encore un autre tenseur de rang deux, le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique T_μ^ν , donné par

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = u \\ T_{i0} &= \frac{-1}{4\pi} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i = -c\Pi_i = T_{0i} \\ T_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + B^2) - E_i E_j - B_i B_j \right) = T_{ji} \end{aligned} \right\}. \quad (1.120)$$

Exercice: Montrer que l'expression donnée pour les composantes de $T_{\mu\nu}$ est équivalente à

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right]. \quad (1.121)$$

Comme d'habitude, les indices de $T_{\mu\nu}$ sont montés et descendus avec la métrique de Lorentz:

$$T_{\mu\nu} = T_\mu^\alpha g_{\alpha\nu}, \quad (g_{\alpha\nu}) = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (1.122)$$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu. \quad (1.123)$$

Comme pour le tenseur électromagnétique, $F^{\mu\nu}$, pour montrer que $T_{\mu\nu}$ est vraiment un quadri-tenseur, il faut démontrer que sous une transformation de Lorentz (Λ_μ^ν) , $(T_{\mu\nu})$ change comme

$$(T^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (1.124)$$

Nous considérons d'abord une rotation R ,

$$(\Lambda_\mu^\nu) = (\Lambda_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} 1 & | & & 0 \\ - & + & - & - \\ 0 & | & & R \end{pmatrix}, \quad (1.125)$$

avec $R \cdot R^T = \mathbb{I}$. Nous savons que \mathbf{E} et \mathbf{B} se transforment sous rotation comme des vecteurs tridimensionnels,

$$E'^i = R^i_j E^j, \quad B'^i = R^i_j B^j,$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'^2 &= E'^i E'^i = R^i_j E^j R^i_\ell E^\ell \\ &= (R^T \cdot R)_{j\ell} E^j E^\ell = \delta_{j\ell} E^j E^\ell = E^j E^j = \mathbf{E}^2 \end{aligned}$$

et de même pour \mathbf{B} . Donc $T_{00} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ est invariant sous les rotations. Pour les composantes T_i^0 , nous utilisons

$$(\mathbf{E}' \wedge \mathbf{B}')_q = \varepsilon_{q\ell m} E'^\ell B'^m = \varepsilon_{q\ell m} R^\ell_k R^m_j E^k B^j. \quad (1.126)$$

Comme pour le tenseur $F^{\mu\nu}$, l'invariance du tenseur ε_{ijl} implique

$$R_q^i \varepsilon_{i\ell m} = R_\ell^k R_m^n \varepsilon_{qkn}.$$

Avec (1.126) cela donne

$$(\mathbf{E}' \wedge \mathbf{B}')_q = R_q^i \varepsilon_{i\ell m} E^\ell B^m = R_q^i (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_i.$$

Nous avons donc montré que $(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$ se transforme comme un vecteur. Maintenant nous vérifions (1.124). Pour la composante "00" nous avons

$$T'_{00} = \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu T_{\mu\nu} = T_{00}.$$

Ce qui est correct car

$$\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2) = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2).$$

Pour les composantes “ i_0 ” nous utilisons que

$$T'_{i0} = \Lambda_i^\mu \Lambda_0^\nu T_{\mu\nu} = \Lambda_i^j T_{j0} = \frac{-1}{4\pi} R_i^j (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})_j = \frac{-1}{4\pi} (\mathbf{E}' \wedge \mathbf{B}')_i.$$

De même pour les composantes “ ij ” :

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= \Lambda_i^\mu \Lambda_j^\nu T_{\mu\nu} = \Lambda_i^k \Lambda_j^\ell T_{k\ell} \\ &= R_i^k R_j^\ell T_{k\ell} \\ &= R_i^k R_j^\ell \left(\frac{1}{2} \delta_{k\ell} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - E_k E_\ell - B_k B_\ell \right) \end{aligned}$$

mais $R_i^k E_k = E'_i$, $R_i^k B_k = B'_i$, $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}'^2$, $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}'^2$ et $R_i^k R_j^\ell \delta_{k\ell} = R_i^k (R^T)^k_j = \delta_{ij}$. Tout cela donne

$$T'_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2) - E'_i E'_j - B'_i B'_j.$$

Nous avons alors vérifié que sous une rotation $\Lambda_\nu^\mu(R)$, donnée par (1.125), $T_{\mu\nu}$ se transforme selon (1.124).

Maintenant nous démontrons que $T_{\mu\nu}$ se transforme aussi comme un tenseur de rang deux sous des *boost* de direction x_1 à vitesse v . Soit de nouveau $\beta = \frac{v}{c}$ et

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Si $\chi := \text{arcth}\beta$ on a que $\gamma = \cosh \chi$ et $\beta\gamma = \sinh \chi$ où χ est la *rapidité* du boost).
Considérons d'abord T_{00} :

$$\begin{aligned} (T^{00})' &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^0_\beta T^{\alpha\beta} = \gamma^2 T^{00} - 2\gamma^2 \beta T^{01} + \gamma^2 \beta^2 T^{11} \\ &= \frac{1}{8\pi} [\gamma^2 (E^2 + B^2) - 4\gamma^2 \beta (E_2 B_3 - B_2 E_3) + \gamma^2 \beta^2 (E^2 + B^2 \\ &\quad - 2(E_1^2 + B_1^2))] \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[\overbrace{\gamma^2 (1 - \beta^2)}^1 (E_1^2 + B_1^2) + \gamma^2 (1 + \beta^2) (E_2^2 + E_3^2 + B_2^2 + B_3^2) \right. \\ &\quad \left. - 4\gamma^2 \beta (E_2 B_3 - B_2 E_3) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} [(E_1^2 + B_1^2) + \gamma^2 (E_2 - \beta B_3)^2 + \gamma^2 (E_3 + \beta B_2)^2 + \gamma^2 (B_2 + \beta E_3)^2 \\ &\quad + \gamma^2 (B_3 - \beta E_2)^2] \\ &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}'^2 + \mathbf{B}'^2). \end{aligned}$$

La dernière égalité suit des équations (1.100) à (1.104). Pour T^{01} , nous obtenons

$$\begin{aligned}
(T^{01})' &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta T^{\alpha\beta} \\
&= \gamma^2 T^{01} - \beta \gamma^2 \left(\overbrace{T^{00}}^{1/8\pi(E^2+B^2)} + \overbrace{T^{11}}^{1/4\pi(1/2(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)-E_1^2-B_1^2)} \right) + \gamma^2 \beta^2 T^{10} \\
&= \frac{1}{4\pi} [\gamma^2(1+\beta^2)(E_2 B_3 - B_2 E_3) - \beta \gamma^2(E_2^2 + E_3^2 + B_2^2 + B_3^2)] \\
&= \frac{1}{4\pi} [\gamma^2(E_2 - \beta B_3)(B_3 - \beta E_2) - \gamma^2(B_2 + \beta E_3)(E_3 + \beta B_2)] \\
&= \frac{1}{4\pi} (E'_2 B'_3 - B'_3 E'_2) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}' \wedge \mathbf{B}')_1
\end{aligned}$$

et de même avec les autres composantes.

Nous calculons encore $(T^{23})'$

$$\begin{aligned}
(T^{23})' &= \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta T^{\alpha\beta} = T^{23} = \frac{-1}{4\pi} (E_2 E_3 + B_2 B_3) \\
&= \frac{-1}{4\pi} [\gamma^2(E_2 - \beta B_3)(E_3 + \beta B_2) + \gamma^2(B_2 + \beta E_3)(B_3 - \beta E_2)] \\
&= \frac{-1}{4\pi} (E'_2 E'_3 + B'_2 B'_3).
\end{aligned}$$

Les autres composantes sont laissées comme exercice.

La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrit maintenant tout simplement comme

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -k^\nu, \quad \text{avec} \quad k^0 = \frac{1}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad k^i = (\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \wedge \mathbf{B})^i. \quad (1.127)$$

k^0 est le travail effectué sur les charges et \mathbf{k} est la densité de force de Lorentz. Il est facile à voir que $k_\mu = F_{\mu\nu} j^\nu$, et donc (k_μ) est un quadri-vecteur.

Nous avons discuté le comportement de $T_{\mu\nu}$ et $F^{\mu\nu}$ (tenseurs de rang deux) sous des rotations et sous des boost de direction x^1 . Un boost dans une direction quelconque \mathbf{n} est toujours le produit d'une rotation R_1 qui tourne \mathbf{n} en direction de x^1 , d'un boost $\Lambda(\beta, \mathbf{e}_1)$ de direction x^1 et finalement de la rotation inverse, R_1^{-1} :

$$\Lambda(\beta, \mathbf{n}) = R_1^{-1} \Lambda(\beta, \mathbf{e}_1) R_1.$$

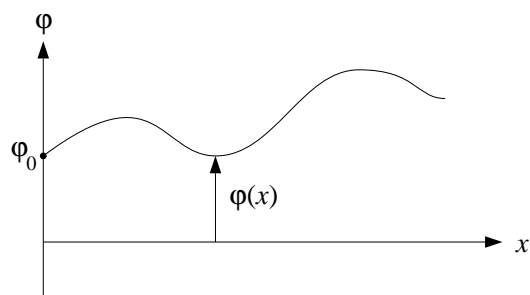
Il suit alors que $T_{\mu\nu}$ se transforme correctement lors d'un boost de direction arbitraire.

Chapitre 2

Ondes électromagnétiques

2.1 Ondes à une dimension

Afin de nous en tenir à un exemple concret, nous considérons une corde dont l'un des points est fixe (aucun mouvement translatore) en deux dimensions:



Nous cherchons une équation qui décrive le mouvement “ondulatoire” de la corde, une équation pour l’accélération $d^2\varphi/dt^2$ en chaque point x , en tenant compte des forces de tension dans la corde. Nous posons:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \varphi(x, t).$$

- Comme le choix de la position φ_0 est arbitraire, la force ne dépend pas de l’amplitude φ et donc $\alpha_0 = 0$.
- Si $\varphi(x)$ décrit une *droite*, aucune tension ne s’applique, la force ne dépend pas de la pente, et donc $\alpha_1 = 0$.

- Le terme d'ordre le plus bas est α_2 : la courbure implique une tension.

Pour beaucoup d'applications, α_2 est le terme dominant et nous obtenons ($\alpha_2 \equiv v^2$):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

L'éq. (2.1) est l'équation d'onde à une dimension. Elle s'applique aussi pour le mouvement d'un ressort ou les compressions de l'air dans un tube, ainsi que dans beaucoup d'autres problèmes unidimensionnels.

La solutions générale de (2.1) qui satisfait aux conditions initiales

$$\varphi(x, t = 0) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \dot{\varphi}(x, t = 0) = \varphi_1(x)$$

est

$$\varphi(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt) \quad (2.2)$$

tel que

$$f(x) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x) + \frac{1}{v} \int^x \varphi_1(x') dx'] \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x) - \frac{1}{v} \int^x \varphi_1(x') dx'] .$$

La fonction f décrit la partie de l'onde qui propage vers la direction $-x$, "left mover" et la fonction g décrit le "right mover", v est la vitesse de propagation de l'onde. Dans tous les cas physiques (à énergie finie) on peut écrire f et g comme intégral de Fourier,

$$f(x + vt) = \int dk A(k) \exp(i(kx + \omega t)) , \quad (2.3)$$

avec $\omega = vk$. La fonction $|A(k)|^2$ est le *spectre* de l'onde f .

Modes propres, ondes harmoniques, ondes stationnaires

Les modes propres, aussi appelés 'ondes harmoniques', dépendent du temps comme $\cos(\omega t + \beta)$. Nous cherchons alors une solution de (2.1) de la forme

$$\varphi(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \beta).$$

En utilisant (2.1) on trouve

$$-\omega^2 A(x) = v^2 \frac{d^2 A}{dx^2},$$

dont la solution est

$$A(x) = A_0 \cos(kx + \alpha) \quad (2.4)$$

$$k^2 v^2 = \omega^2. \quad (2.5)$$

Nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= A_0 \cos(\omega t + \beta) \cos(kx + \alpha) \\ &= \frac{A_0}{2} [\cos(\omega t + kx + \gamma_1) + \cos(\omega t - kx + \gamma_2)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec $\gamma_1 = \beta + \alpha$ et $\gamma_2 = \beta - \alpha$.

L'équation (2.5) est la *loi de dispersion* pour l'équation d'onde (2.1). Une loi de dispersion est une relation entre ω et k . Nous allons en rencontrer de plus compliquées que (2.5). La quantité ω est la *fréquence angulaire* (ou pulsation), dont la dimension est [1/s]. k est le nombre d'onde, de dimension [1/cm]. A_0 est l'amplitude; sa dimension dépend du phénomène physique considéré. Pour la corde, par exemple, ce sont des [cm]. γ_1 et γ_2 sont des phases, déterminées par les conditions initiales. $T = 2\pi/\omega$ est la période, le temps nécessaire pour une oscillation complète et $\nu = 1/T$ est la fréquence. La distance $\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde, la longueur d'une oscillation complète. D'après (2.5) on a

$$\frac{\omega}{k} = \lambda \nu = v. \quad (2.7)$$

Comme la relation de dispersion (2.5) possède les solutions $k = \pm\omega/v$, on peut ajouter à (2.6) un terme $B_0 [\cos(\omega t - kx + \gamma_1) + \cos(\omega t + kx + \gamma_2)]$. Ceci mène à la solution générale

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= A \cos(\omega t + kx + \delta_1) + B \cos(\omega t - kx + \delta_2) \\ &= A_1 \cos(\omega t + kx) + A_2 \sin(\omega t + kx) + B_1 \cos(\omega t - kx) + B_2 \sin(\omega t - kx). \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos \delta_1, & A_2 &= -A \sin \delta_1, \\ B_1 &= B \cos \delta_2, & B_2 &= -B \sin \delta_2. \end{aligned}$$

Une autre façon d'écrire cette solution est

$$\varphi(x, t) = \text{Re} [C_1 e^{i(\omega t + kx)} + C_2 e^{i(\omega t - kx)}] \quad (2.8)$$

où $C_1 = A(\cos \delta_1 + i \sin \delta_1)$ et $C_2 = B(\cos \delta_2 + i \sin \delta_2)$. Le premier terme décrit une onde qui se propage vers la gauche ("left mover") et le deuxième terme représente une onde qui se propage vers la droite ("right mover"). La position x_c de la crête

d'une oscillation est donnée par $\omega t + kx_c + \delta_1 = 2\pi N$, alors $dx_c/dt = -\omega/k = -v$ pour le premier terme; et $\omega t - kx_c + \delta_2$, $dx_c/dt = \omega/k = v$ pour le deuxième terme. C'est pourquoi on appelle v la *vitesse de phase* de l'onde.

La solution générale est une superposition d'ondes harmoniques,

$$\varphi(x, t) = \operatorname{Re} \left[\int dk (C_1(k)e^{i(\omega t + kx)} + C_2(k)e^{i(\omega t - kx)}) \right]. \quad (2.9)$$

Nous considérons maintenant une corde fixée aux deux extrémités: $\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0$. Pour $x = 0$ ceci donne $C_2 = -C_1$. Pour un t arbitraire et $x = L$, nous avons

$$\operatorname{Re} [C_1 e^{i\omega t} (e^{ikL} - e^{-ikL})] = 0 \quad \text{et alors} \quad 2iC_1 \sin(kL) = 0. \quad (2.10)$$

Ceci implique que $\sin(kL) = 0$, autrement dit que k ne peut prendre que les valeurs discrètes

$$k_j = \frac{j\pi}{L}, \quad \lambda_j = \frac{2L}{j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

La fréquence angulaire correspondant à k_j est donnée par $\omega_j = vk_j$. La solution générale de notre problème avec les conditions aux bords $\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = 0$ est donc finalement

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^{\infty} C_j e^{i\omega_j t} (e^{ik_j x} - e^{-ik_j x}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t) \sin k_j x \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec $A_j = -2\operatorname{Im}[C_j]$ et $B_j = -2\operatorname{Re}[C_j]$. Dans cette situation on parle d'un spectre *discret*. La fonction A définie dans l'équation (2.3) est zéro sauf pour des valeurs discrètes de $k = j\pi/L$.

Exercice: Déterminer les coefficients C_j pour une solution $\varphi(x, t)$ donnée.

Remarque: Pour la corde, φ est une amplitude dans une direction *transverse* à la direction de propagation. Ceci s'appelle une *onde transverse*. Dans un ressort en contraction et en expansion, la grandeur oscillante (le nombre de spirales par centimètre) est parallèle à la direction de propagation. Une telle onde s'appelle longitudinale. D'autres ondes longitudinales sont les ondes acoustiques.

2.2 Ondes à trois dimensions, ondes électromagnétiques

Pour discuter des ondes à trois dimensions, nous nous libérons de la corde et pensons, pour l'instant, à une onde de compression dans un gaz, une onde acoustique. La quantité φ n'est donc plus la position de la corde, mais la densité du gaz. Pour une onde harmonique qui se propage dans une direction quelconque $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbf{n}^2 = 1$) nous avons donc

$$\varphi = \text{Re} [C e^{i(\omega t - k\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})}] = \text{Re} [C e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}] \quad (2.13)$$

où $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ s'appelle le *vecteur onde*. Par simple inspection, on vérifie que φ satisfait à l'équation

$$\partial_t^2 \varphi = v^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \varphi$$

avec $v^2 = \omega^2 / \mathbf{k}^2$, qu'on peut réécrire

$$(\partial_t^2 - v^2 \Delta) \varphi = 0. \quad (2.14)$$

L'équation (2.14) est l'équation d'onde à trois dimensions. La vitesse v est la *vitesse de phase* de l'onde. Il y a aussi ce que l'on appelle la vitesse de groupe de l'onde:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Dans les cas considérés jusqu'ici on avait $v_g = \pm v$ car la relation entre ω et k était linéaire. Nous rencontrerons des circonstances où ce ne sera plus le cas.

Remarque: Il y a aussi des ondes bi-dimensionnelles, par exemple les ondes sur une surface d'eau ou des ondes acoustiques d'un disque métallique.

Venons au sujet qui nous intéresse le plus ici, les ondes électromagnétiques. Nous avons déjà vu [équation (1.32)] que le champ électrique et le champ magnétique dans le vide satisfont des équations d'onde:

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - c^2 \Delta) \mathbf{E} &= 0 \\ (\partial_t^2 - c^2 \Delta) \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Considérons d'abord une solution correspondant à une onde plane:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}] \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} [\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \sigma t)}]. \end{aligned}$$

L'équation (2.15) exige que $\omega^2 = c^2 k^2$ et $\sigma^2 = c^2 q^2$. Donc c est la vitesse de phase (et de groupe) de l'onde. Les équations $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ impliquent

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Les ondes électromagnétiques sont donc des ondes *transverses*. De plus, la loi d'Ampère donne

$$0 = -\partial_t \mathbf{E} + c \nabla \wedge \mathbf{B} = \text{Re} \left[i\omega \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + ci \mathbf{q} \wedge \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \sigma t)} \right].$$

Pour que cette équation puisse être satisfaite, par exemple en $\mathbf{x} = 0$, pour chaque instant t , il faut que $\sigma = \omega$. En plus, pour qu'elle puisse être satisfaite en chaque point \mathbf{x} de l'espace, il faut que $\mathbf{q} = \mathbf{k}$. Donc, les équations de Maxwell impliquent que les champs soient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} \left[\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 \\ \omega \mathbf{E}_0 + c \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou, en utilisant $\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2$ et $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$,

$$\mathbf{E}_0 = -\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{B}_0. \quad (2.18)$$

La loi d'Ampère, $\partial_t \mathbf{B} - c \nabla \wedge \mathbf{E} = 0$ donne de même

$$\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_0$$

(ce qui suit aussi de (2.18) après multiplication par $\hat{\mathbf{k}} \wedge \dots$).

Donc, les vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{E}_0 , et \mathbf{B}_0 sont mutuellement orthogonaux et $\mathbf{E}_0^2 = \mathbf{B}_0^2$. Les vecteurs \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 sont en général des vecteurs *complexes*, $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$ et $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{C}^3$, et les équations que nous avons dérivées sont valables pour la partie réelle et la partie imaginaire (pourquoi aussi la partie imaginaire?!).

Polarisation, paramètres de Stokes

Décomposons $\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_1 - i\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_{1,2} \in \mathbb{R}^3$. Dans une position \mathbf{x} fixe (soit $\mathbf{x} \equiv 0$), nous avons

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{A}_1 \cos \omega t + \mathbf{A}_2 \sin \omega t. \quad (2.19)$$

a) *Polarisation linéaire*

Si $\mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2$, seule l'amplitude mais pas la *direction* du champ électrique change au cours du temps $\mathbf{E}(t) \parallel \mathbf{E}(t')$. Il en va de même pour \mathbf{B} . Une telle onde électromagnétique est dite d'avoir une 'polarisation linéaire'.

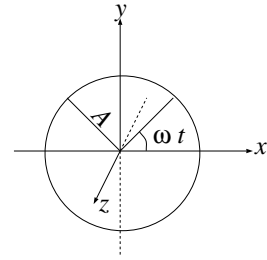
b) *Polarisation circulaire*

Considérons le cas opposé, $\mathbf{A}_1 \perp \mathbf{A}_2$, mais avec la condition spéciale $\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}_2^2 = A^2$. Nous choisissons notre système de coordonnées tel que \mathbf{A}_1 soit dans la direction x et \mathbf{A}_2 dans la direction y . Donc notre onde se propage dans la direction z (\mathbf{k} est parallèle à la direction z). D'après (2.19), nous avons donc (à une position \mathbf{x} fixe)

$$E_x = A \cos \omega t, \quad E_y = A \sin \omega t, \quad E_z = 0,$$

c'est-à-dire que \mathbf{E} parcourt un cercle de rayon A dans le plan (x, y) .

Si $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{k})$ forment un système à hélice positive, c'est-à-dire $(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{k} > 0$, le sens du parcours coïncide avec le sens trigonométrique (de l'axe x vers l'axe y , "counter clockwise"). En optique on appelle une telle onde *gauche*. Dans le cas opposé, si $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{k})$ forment une hélice négative, $(\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{k} < 0$, l'onde est *droite*. (Elle tourne "clockwise" pour un observateur qui reçoit l'onde.) Parce que la direction de \mathbf{E} détermine celle de \mathbf{B} , $\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_0$, la polarisation de \mathbf{B} est la même que celle de \mathbf{E} .

c) *Cas général*

Soit $(\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \hat{\mathbf{k}})$ un système orthonormé à hélice positive. La forme générale de \mathbf{E} est

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} [(E_1 \boldsymbol{\epsilon}_1 + E_2 \boldsymbol{\epsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] \quad (2.20)$$

$$= \text{Re} [(E_+ \boldsymbol{\epsilon}_+ + E_- \boldsymbol{\epsilon}_-) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] \quad (2.21)$$

$$\text{où } \boldsymbol{\epsilon}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\boldsymbol{\epsilon}_1 \pm i \boldsymbol{\epsilon}_2), \quad E_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 \mp i E_2).$$

Les équations (2.20) et (2.21) sont les décompositions explicites en ondes linéairement polarisées ($E_1 = 0$ ou $E_2 = 0$) et en ondes circulairement polarisées ($E_- = 0$, onde gauche; $E_+ = 0$, onde droite).

Nous démontrons maintenant que dans le cas général \mathbf{E} décrit une ellipse et nous déterminons sa direction et la longueur de ses axes. Choisissons $\boldsymbol{\epsilon}_1 = \mathbf{e}_x$ et $\boldsymbol{\epsilon}_2 = \mathbf{e}_y$. Les composantes X et Y de $\mathbf{E}(t) = X \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_y$ (à la position $\mathbf{x} = 0$, fixe) sont donc

$$X = \frac{1}{2} (E_1 e^{-i\omega t} + E_1^* e^{+i\omega t})$$

$$Y = \frac{1}{2} (E_2 e^{-i\omega t} + E_2^* e^{+i\omega t})$$

$$\begin{aligned} X \pm iY &= \frac{1}{2} ((E_1 \pm i E_2) e^{-i\omega t} + (E_1^* \pm i E_2^*) e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (E_\mp e^{-i\omega t} + E_\pm^* e^{i\omega t}). \end{aligned}$$

Si nous tournons le système $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ d'un angle α dans le sens de la montre, nous obtenons les composantes

$$(X', Y') = (X \cos \alpha - Y \sin \alpha, X \sin \alpha + Y \cos \alpha).$$

Donc $X' \pm iY' = (X \pm iY)e^{\pm i\alpha}$, et de même pour les nouveaux E'_{\pm} ;

$$(X' \pm iY') = \frac{1}{\sqrt{2}}(E'_{\mp}e^{-i\omega t} + E'_{\pm}e^{i\omega t})$$

avec $E'_{\pm} = e^{\mp i\alpha}E_{\pm}$. Donc $E'_+/E'_- = (E_+/E_-)e^{-2i\alpha}$. Nous pouvons donc choisir α tel que $\rho = E'_+/E'_-$ devienne réel et positif. L'angle α et le rayon ρ sont alors déterminés par

$$\frac{E_+}{E_-} = \rho e^{2i\alpha}.$$

Soit $E'_- = \sqrt{2}Be^{i\delta}$ avec $B, \delta \in \mathbb{R}$, $B > 0$ la décomposition polaire du nombre complexe E'_- (nous supposons $E'_- \neq 0$, sinon l'onde a la polarisation circulaire déjà discutée). Alors

$$\begin{aligned} X' + iY' &= Be^{i\delta}e^{-i\omega t} + \rho Be^{-i\delta}e^{i\omega t} \\ X' - iY' &= \rho Be^{i\delta}e^{-i\omega t} + Be^{-i\delta}e^{i\omega t} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} X' &= B(1 + \rho) \cos(\omega t - \delta) \\ Y' &= B(1 - \rho) \sin(\omega t - \delta) \\ \frac{X'^2}{B^2(1 + \rho)^2} + \frac{Y'^2}{B^2(1 - \rho)^2} &= 1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\mathbf{E}(t)$ décrit une ellipse avec les demi-axes $B(1 + \rho)$ et $B(1 - \rho)$ qui sont tournés d'un angle α par rapport à ϵ_1 et ϵ_2 . Leur longueurs sont

$$B(1 \pm \rho) = \frac{|E_-|}{\sqrt{2}} \left(1 \pm \frac{|E_+|}{|E_-|} \right).$$

Si $\rho = 1$ cette ellipse est dégénérée en une ligne en direction de X' . C'est-à-dire, dans ce cas la polarisation est linéaire en direction de X' . Si, par contre, $\rho = 0$, la polarisation est circulaire.

Soit comme avant $\epsilon_1 = \mathbf{e}_x$, $\epsilon_2 = \mathbf{e}_y$ et $\epsilon_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_1 \pm i\epsilon_2)$. De plus, nous définissons $\epsilon_3 = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \equiv \hat{\mathbf{k}}$. Il est facile de vérifier que

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\pm}^* \epsilon_{\mp} &= 0 \\ \epsilon_{\pm} \epsilon_3 = \epsilon_{\pm}^* \epsilon_3 &= 0 \\ \epsilon_{\pm}^* \epsilon_{\pm} &= 1 \\ \epsilon_{\pm}^* &= \epsilon_{\mp} \end{aligned} \right\}. \quad (2.22)$$

D'après ce que nous avons démontré, l'état de polarisation d'une onde est connu si nous pouvons l'écrire sous la forme (2.20) ou (2.21) avec des amplitudes E_1 , E_2 ou E_+ , E_- connues. Nous posons maintenant la question inverse: soit une onde donnée sous la forme (2.16), $\mathbf{E} = \text{Re} [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}]$, comment déterminer l'état de polarisation? Un formalisme utile a été proposé par Stokes: les paramètres de Stokes.

Ce sont quatre paramètres qui sont déterminés par la mesure de l'intensité et deux mesures de polarisation relativement simples (linéaires et circulaires). Soit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= (E_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + E_2\boldsymbol{\epsilon}_2)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \mathbf{E} &= \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}] \\ E_1 &= a_1 e^{i\delta_1}, \quad E_2 = a_2 e^{i\delta_2} \\ E_+ &= a_+ e^{i\delta_+}, \quad E_- = a_- e^{i\delta_-} \\ a_+ e^{i\delta_+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{i\delta_1} - i a_2 e^{i\delta_2}) \\ a_- e^{i\delta_-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 e^{i\delta_1} + i a_2 e^{i\delta_2}).\end{aligned}$$

Nous définissons

$$\left. \begin{aligned} I &= |\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 + |\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 = a_1^2 + a_2^2 = |\mathbf{E}_0|^2 \\ Q &= |\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 - |\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 = a_1^2 - a_2^2 \\ U &= 2\text{Re} [(\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}})^*(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}})] = 2a_1 a_2 \cos(\delta_2 - \delta_1) \\ V &= 2\text{Im} [(\boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}})^*(\boldsymbol{\epsilon}_2 \cdot \tilde{\mathbf{E}})] = 2a_1 a_2 \sin(\delta_2 - \delta_1) \end{aligned} \right\}. \quad (2.23)$$

Ces 4 paramètres ne sont pas indépendants. En effet, $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$. On peut aussi exprimer les paramètres de Stokes dans la base de polarisation circulaire, $\boldsymbol{\epsilon}_\pm$:

$$\left. \begin{aligned} I &= |\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 + |\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 = a_+^2 + a_-^2 \\ Q &= 2\text{Re} [(\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \tilde{\mathbf{E}})^*(\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \tilde{\mathbf{E}})] = 2a_+ a_- \cos(\delta_- - \delta_+) \\ U &= 2\text{Im} [(\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \tilde{\mathbf{E}})^*(\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \tilde{\mathbf{E}})] = 2a_+ a_- \sin(\delta_- - \delta_+) \\ V &= |\boldsymbol{\epsilon}_+^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 - |\boldsymbol{\epsilon}_-^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}|^2 = a_+^2 - a_-^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.24)$$

$I = 2\langle |\mathbf{E}|^2 \rangle$ mesure l'“intensité” $|\mathbf{E}|^2$ de l'onde moyennée pendant la période. Comme $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$, $I = \langle \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \rangle$, où $\langle \dots \rangle$ est la moyenne sur une période $T = 2\pi/\omega$. Donc la densité d'énergie moyennée sur une période est $u = I/(8\pi)$.

Pour une onde qui est linéairement polarisée ($\delta_1 = \delta_2$), $V = 0$ et pour une onde qui est circulairement polarisée ($a_1 = a_2$), $Q = 0$. En général Q mesure la différence

d'intensité dans les directions ϵ_1 et ϵ_2 et V mesure la différence d'intensité des hélicités $+$ et $-$.

Exercice: Montrer que sous une rotation de ϵ_1 et ϵ_2 autour de $\hat{\mathbf{k}}$ avec un angle α les paramètres de Stokes se transforment comme

$$\begin{aligned} I &\rightarrow I \\ Q &\rightarrow Q \cos(2\alpha) + U \sin(2\alpha) \\ U &\rightarrow U \cos(2\alpha) - Q \sin(2\alpha) \\ V &\rightarrow V . \end{aligned}$$

L'effet Doppler, aberration

Pour une onde plane, le champ électromagnétique est de la forme

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu} e^{-i(k_\mu x^\mu)}, \quad F_{\mu\nu}(x) = \text{Re}[\tilde{F}_{\mu\nu}(x)]$$

où nous définissons $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$. Soit $F_{\mu\nu}$ donné dans un système inertiel Σ . Dans un autre système inertiel Σ' , relié à Σ par la transformation de Lorentz Λ_μ^α , il devient

$$\tilde{F}'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \tilde{F}_{\alpha\beta}(x) = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta f_{\alpha\beta} e^{-i(k_\mu x^\mu)}.$$

Pour $k'^\mu = \Lambda^\mu_\nu k^\nu$ on a $(k_\mu x^\mu) = (k'_\mu x'^\mu)$ et donc

$$\tilde{F}'_{\mu\nu}(x') = f'_{\mu\nu} e^{-i(k'_\mu x'^\mu)}, \quad (2.25)$$

avec $f'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta f_{\alpha\beta}$. L'équation (2.25) montre que (k'^μ) est vraiment un quadri-vecteur et qu'une onde plane qui se propage avec le quadri-vecteur d'onde (k^μ) dans Σ , se propage avec le quadri-vecteur d'onde (k'^μ) dans le système transformé Σ' (et est aussi une onde plane dans Σ'). Nous avons alors $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$.

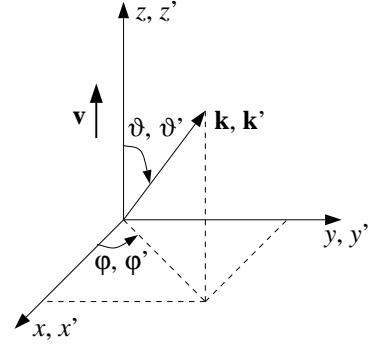
Nous considérons une source de lumière dans un système inertiel Σ et un observateur dans un système Σ' qui se déplace à vitesse v dans la direction z :

Nous avons, $\beta = v/c$,

$$\Lambda^\mu_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$z' = \gamma(z - vt), \quad x' = x, \quad y' = y$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}z\right)$$



et

$$(k'^\mu) \left. \begin{array}{l} k'_x = k_x, \quad k'_y = k_y \\ k'_z = \gamma\left(k_z - \frac{\beta}{c}\omega\right) \\ \omega' = \gamma(\omega - vk_z) \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

Comme $|k| = \omega/c$, $|k'| = \omega'/c$, nous avons

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \vartheta) . \quad (2.27)$$

Ceci est la formule de *l'effet Doppler* relativiste.

Nous voulons aussi déterminer la direction du vecteur d'onde transformé, \mathbf{k}' . Pour déterminer ϑ' nous utilisons

$$\cot \vartheta' = \frac{k'_z}{(k'^2_x + k'^2_y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{k'_z}{(k^2_x + k^2_y)^{\frac{1}{2}}} .$$

Avec (2.26), ceci donne

$$\begin{aligned} \cot \vartheta' &= \frac{\gamma\left(k_z - \beta\frac{\omega}{c}\right)}{(k^2_x + k^2_y)^{\frac{1}{2}}} = \gamma \cot \vartheta - \gamma\beta \frac{k}{(k^2_x + k^2_y)^{\frac{1}{2}}} \\ \cot \vartheta' &= \gamma \left[\cot \vartheta - \beta \frac{1}{\sin \vartheta} \right] = \gamma \frac{\cos \vartheta - \beta}{\sin \vartheta} \\ \tan \vartheta' &= \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta - \beta} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Cette formule décrit *l'aberration* relativiste. L'angle φ n'est pas changé déjà pour des raisons de symétrie, et comme $k_x = k'_x$, $k_y = k'_y$, il vient

$$\varphi' = \varphi. \quad (2.29)$$

La relation (2.28) est équivalente à (exercice)

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta' &= \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta}{1 - \beta \cos \vartheta} \\ \cos \vartheta' &= \frac{\cos \vartheta - \beta}{1 - \beta \cos \vartheta} \\ \tan \frac{\vartheta'}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tan \frac{\vartheta}{2} . \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

L'équation (2.27) est la formule pour *l'effet Doppler relativiste*. Les équations (2.29) et (2.30) décrivent *l'aberration*.

Pour $\vartheta = 0$ (\mathbf{k} parallèle à \mathbf{v}), l'effet Doppler **longitudinal**, on a

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta) = \omega \left(\frac{(1 - \beta)^2}{1 - \beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \omega \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou avec $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda. \quad (2.31)$$

Nous définissons le “décalage vers le rouge” (red shift) Z par

$$1 + Z = \frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}, \quad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda \quad (2.32)$$

$$= \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.33)$$

pour des petits décalages, $Z \ll 1$ on a $Z \simeq \beta = v/c$, la formule qu'on obtient aussi dans une analyse non-relativiste. Le plus grand décalage observé pour des galaxies lointaines est $Z \approx 10$. A quelle vitesse est-ce que cela correspond?

Pour $\vartheta = \pi/2$, effet Doppler **transversal**, (2.27) donne

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \gamma\omega = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ 1 + Z &= \sqrt{1 - \beta^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

pour des petits décalages, $Z \ll 1$ ceci donne $Z \simeq -\frac{1}{2}\beta^2$. L'effet transversal est purement relativiste et beaucoup plus difficile à observer pour des petites vitesses.

Les équations (2.29) et (2.30) déterminent l'aberration de la lumière. Soit, par exemple, Σ le système au repos d'une étoile et soit ϑ l'angle d'incidence par rapport à la surface de la terre. Un observateur sur terre se déplace avec une vitesse \mathbf{v} parallèle à la surface de la terre. Pour $\vartheta = \pi/2$ (incidence verticale) on a

$$\tan \vartheta' = \pm \frac{1}{\beta\gamma}$$

et pour l'angle d'aberration, $\alpha = |\pi/2 - \vartheta'|$,

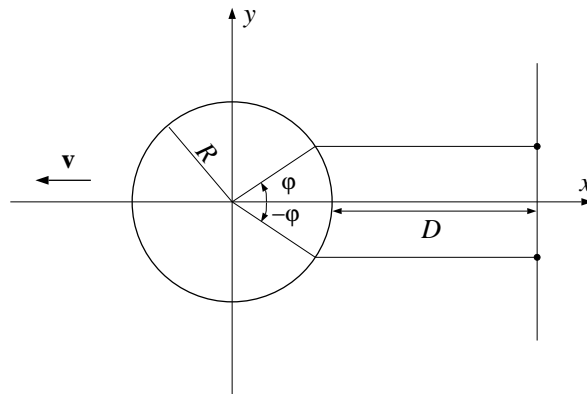
$$\tan \alpha = \beta \gamma. \quad (2.35)$$

Dans la limite non-relativiste on obtient $\tan \alpha \simeq \beta = v/c$, ce qui est corrigé par le facteur γ .

Clairement, déjà pour des raisons de symétrie, il n'y a pas d'aberration si $\vartheta = 0$ ou π . Pour la vitesse de la terre, $\beta \approx 10^{-4}$, la correction relativiste dans (2.35) n'est pas mesurable [$O(10^{-8})$]. Mais pour l'émission des particules élémentaires en mouvement relativiste, ce facteur γ est important (par exemple pour la position des compteurs dans le processus $\pi^0 \rightarrow \gamma, \gamma$ pour des π^0 rapides).

Vitesse “superluminale” en apparence

Dans les années 70, des radio-astronomes ont découvert que les composantes de certains “quasars” s'éloignent à des vitesses 4 ou même 6 fois c . Dans les années 90, le même effet a été observé dans les objets galactiques. Nous montrons avec un exemple simple que les effets de la *retardation* peuvent simuler des vitesses relatives superluminales des objets en mouvement. Pour simplifier la notation, nous supprimons la 3^{ème} dimension, l'axe z qui n'entre pas dans notre analyse. Nous considérons un cercle de gaz dans le plan (x, y) du système Σ , qui est centré en $x = y = 0$ au moment $t = 0$, et qui se déplace à vitesse v en direction de $-x$:



Dans le système Σ' qui se propage avec une vitesse v en direction de $-x$ (co-mobile avec le cercle), le cercle émet un éclair de lumière au temps $t' = 0$. L'observateur à distance D voit d'abord la lumière émise du point $\varphi = 0$. Puis, il observe deux éclairs aux positions $\pm\varphi$, qui s'éloignent d'abord (pour $0 < |\varphi| < \pi/2$) et après se rapprochent (pour $\pi/2 < |\varphi| < \pi$). Nous allons voir que (pour φ suffisamment petit) ces deux éclairs semblent s'éloigner à vitesse superluminale.

Par rapport à Σ' l'événement de l'éclair a les coordonnées

$$t' = 0, \quad x' = R \cos \varphi, \quad y' = R \sin \varphi \quad (-\pi < \varphi \leq \pi).$$

Dans le système Σ ces coordonnées correspondent à

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' - \frac{v}{c^2}x') = -\frac{\gamma v}{c^2}R \cos \varphi \\ x &= \gamma(x' - vt') = \gamma R \cos \varphi \\ y &= y' = R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Le moment de l'éclair, t , dépend de la position, c'est-à-dire, de φ . Le temps t_a d'arrivée à la distance D du centre $x = y = 0$ est donné par

$$c(t_a - t) = [(D - \gamma R \cos \varphi)^2 + R^2 \sin^2 \varphi]^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $R \ll D$,

$$ct_a = -\frac{\gamma v}{c}R \cos \varphi + [\dots]^{\frac{1}{2}} \approx -\frac{\gamma v}{c}R \cos \varphi + D - \gamma R \cos \varphi + O\left(\frac{R^2}{D}\right). \quad (2.36)$$

La distance des éclairs est $2y = 2R \sin \varphi$. Avec (2.36) on trouve

$$\begin{aligned} y(t_a) &= \sqrt{R^2(1 - \cos^2 \varphi)} = R \left[1 - \left(\frac{ct_a - D}{R\gamma(1 + \beta)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[R^2 - (D - ct_a)^2 \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La vitesse relative est alors

$$\begin{aligned} 2 \frac{dy}{dt_a} &= 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1}{y}}_{\frac{1}{R \sin \varphi}} 2c \underbrace{(D - ct_a)}_{\gamma R(1 + \beta) \cos \varphi} \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = 2c\gamma(1 - \beta) \cot \varphi \\ &= 2c \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \cot \varphi + O(R/D). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ceci est proportionnel à $\cot \varphi$ et *diverge* pour $\varphi \rightarrow 0$, même pour de petites vitesses. Pour un observateur, cela donne l'impression d'un objet qui explose en deux fragments qui s'éloignent à une vitesse superluminale (pour autant que φ soit suffisamment petit).

Chapitre 3

Propagation des ondes électromagnétiques

3.1 Introduction, milieux pondérés

Nous considérons un milieu avec une *constante diélectrique* ε et une *perméabilité* μ , mais sans courants ni charges; ε et μ sont supposés indépendants de la position et du temps. On a

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B},$$

et

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\mu \varepsilon}{c} \partial_t \mathbf{E} &= 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} &= 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}. \tag{3.2}$$

v est la vitesse de la lumière dans le milieu. Pour les solutions de type ondes planes nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}] \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}], \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec $\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$, $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{C}^3$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^3$, et la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2.$$

Les équations $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ conduisent à

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0.$$

La loi d'induction donne

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_0 - \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_0 = 0.$$

Avec $\omega = v|\mathbf{k}| = c/\sqrt{\mu\varepsilon}|\mathbf{k}|$ cela donne

$$\mathbf{B}_0 = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B} = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}. \quad (3.4)$$

Le flux d'énergie est donné par le vecteur de Poynting,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi\mu} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E} \wedge (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}).$$

Considérons \mathbf{S} au point $\mathbf{x} = 0$; on a

$$\mathbf{E} = \text{Re}[(\mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2)e^{-i\omega t}] = \mathbf{A}_1 \cos \omega t + \mathbf{A}_2 \sin \omega t$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} &= \sqrt{\mu\varepsilon} \left\{ \mathbf{A}_1 \wedge (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{A}_1) \cos^2 \omega t + \mathbf{A}_2 \wedge (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{A}_2) \sin^2 \omega t \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{A}_1 \wedge (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{A}_2) + \mathbf{A}_2 \wedge (\hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{A}_1)] \sin \omega t \cos \omega t \right\} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon} (\mathbf{A}_1^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{A}_2^2 \sin^2 \omega t + 2\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \sin \omega t \cos \omega t) \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ et $\mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{A}_2 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$. La moyenne temporelle du vecteur de Poynting sur une période $T = 2\pi/\omega$ donne alors

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2) \hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.5)$$

De même, on trouve pour la densité d'énergie

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2 \right) \\ \langle u \rangle &= \frac{1}{16\pi} \left(\varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu} |\mathbf{B}_0|^2 \right) = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

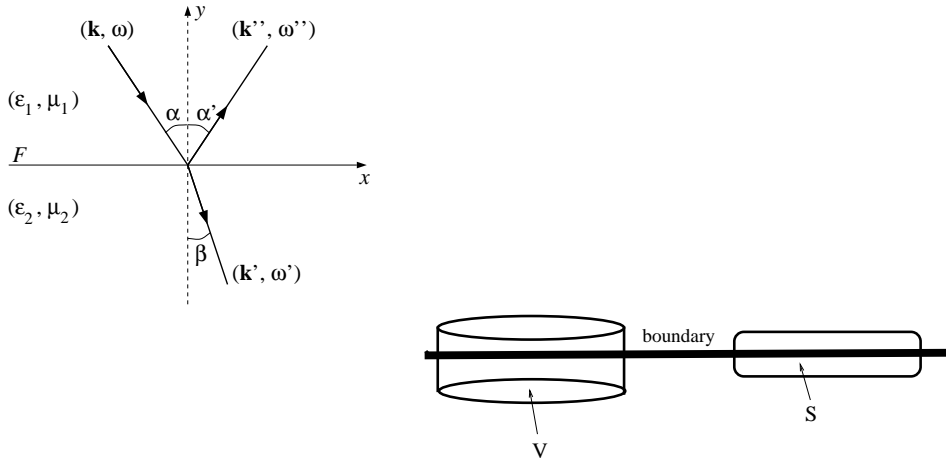
où nous avons utilisé (3.4). La moyenne temporelle de $|\mathbf{S}|$ est aussi appelée l'intensité I de l'onde:

$$I = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tilde{\mathbf{H}} \cdot \tilde{\mathbf{H}}^* = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} c \langle u \rangle = v \langle u \rangle; \quad (3.7)$$

son unité est énergie/(surface \times temps), [erg/(cm² s)].

3.2 Réflexion et réfraction

Comme avant, nous traitons des champs électromagnétiques dans des milieux pondérés homogènes et isotropes, mais nous considérons des interfaces où μ et/ou ε changent de valeur de façon discontinue. En l'absence de charges ρ et courants \mathbf{J} , nous étudions ce qui se passe lorsqu'une onde électromagnétique franchit la limite entre deux milieux pondérés avec des constantes diélectriques différentes ε_1 et ε_2 et des perméabilités différentes μ_1 et μ_2 . Nous considérons la situation suivante avec des ondes planes incidente et réfléchie et une onde plane qui a traversé la surface F délimitant les deux milieux:



La loi de Coulomb, $\int_{\partial V} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}) ds = 0$, et $\int_{\partial V} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}) ds = 0$, intégrés sur le bord du volume ∂V comme indiqué dans la figure, impliquent que $\mathbf{D}_\perp = \varepsilon \mathbf{E}_\perp$ et $\mathbf{B}_\perp = \mu \mathbf{H}_\perp$ sont continus à l'interface. De même, la loi d'Ampère donne, $\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dl = c^{-1} \partial_t \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} ds \rightarrow 0$ pour la limite où l'épaisseur de la surface S indiquée dans la figure tend vers 0. Finalement, la loi d'induction, $\nabla \wedge \mathbf{E} + c^{-1} \partial_t \mathbf{B} = 0$ implique $\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl \rightarrow 0$. Des deux dernières équations nous concluons que \mathbf{E}_\parallel , \mathbf{H}_\parallel sont continus à l'interface.

Pour une composante quelconque qui est continue, nous avons ($A \neq 0$):

$$A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + A'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{x} - \omega'' t)} = A' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t)}, \quad \forall \mathbf{x} \in F.$$

En appelant $\tilde{\mathbf{k}}$, $\tilde{\mathbf{k}}'$ et $\tilde{\mathbf{k}}''$ les projections de \mathbf{k} , \mathbf{k}' et \mathbf{k}'' dans le plan F , ceci est équivalent à:

$$A e^{i(\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + A'' e^{i(\tilde{\mathbf{k}}'' \cdot \mathbf{x} - \omega'' t)} = A' e^{i(\tilde{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{x} - \omega' t)}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Pour $\mathbf{x} = 0$, cela donne $\omega = \omega'' = \omega'$. De même pour $t = 0$, nous obtenons $\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{k}}' = \tilde{\mathbf{k}}''$. Donc, les projections des trois vecteurs d'onde dans le plan F sont

identiques. Ainsi les trois vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{k}' , et \mathbf{k}'' sont dans un plan commun (plan d'incidence),

$$\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \in \mathbb{R}\tilde{\mathbf{k}} \oplus \mathbb{R}\mathbf{e}_y.$$

Comme

$$|\tilde{\mathbf{k}}| = \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha, \quad |\tilde{\mathbf{k}}'| = \frac{\omega}{v_2} \sin \beta \quad \text{et} \quad |\tilde{\mathbf{k}}''| = \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha',$$

l'égalité de ces trois vecteurs conduit à

$$\alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \frac{1}{v_1} \sin \alpha = \frac{1}{v_2} \sin \beta.$$

Utilisons encore $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ et $v_2 = c/\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$, ce qui donne

$$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin \alpha = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \sin \beta,$$

ou mieux

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (\text{loi de Snell}), \quad (3.8)$$

où nous avons introduit l'indice de réfraction:

$$n := \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (\text{relation de Maxwell}). \quad (3.9)$$

Comme vous le voyez, la condition de continuité d'une composante permet d'obtenir les angles de réflexion et de réfraction. Mais l'électrodynamique nous permet aussi de calculer les intensités et les polarisations. Dans ce but, nous distinguons deux cas différents:

(i) $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ est orthogonal au plan soutenu par \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' [plan (x, y) dans le dessin, ou plan d'incidence].

Les directions $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}}'$, $\hat{\mathbf{k}}''$ sont données par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} &= (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) \\ \hat{\mathbf{k}}'' &= (\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \\ \hat{\mathbf{k}}' &= (\sin \beta, -\cos \beta, 0). \end{aligned}$$

De plus, $\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \hat{\mathbf{k}} \wedge \mathbf{E}$ donne

$$H_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \hat{k}_y E_z, \quad H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \hat{k}_x E_z, \quad \text{etc.},$$

ce qui conduit à:

“ E_z ”	“ H_x ”
E_z	$-(\varepsilon_1/\mu_1)^{1/2} E_z \cos \alpha$
E'_z	$-(\varepsilon_2/\mu_2)^{1/2} E'_z \cos \beta$
E''_z	$+(\varepsilon_1/\mu_1)^{1/2} E''_z \cos \alpha$

Puisque E_z et H_x sont continus à l'interface, nous avons $E_z + E_z'' = E_z'$ et $H_x + H_x'' = H_x'$, donc

$$\begin{aligned} E_z + E_z'' &= E_z' \\ E_z - E_z'' &= E_z' \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \\ E_z &= \frac{E_z'}{2} \left(1 + \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \\ E_z'' &= \frac{E_z'}{2} \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

(ii) \mathbf{H} est orthogonal au plan d'incidence.

Dans ce cas, on trouve (par simple substitution $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}$, $\varepsilon \rightarrow \mu$ et $\mu \rightarrow \varepsilon$)

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{H_z'}{2} \left(1 + \left(\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) \\ H_z'' &= \frac{H_z'}{2} \left(1 - \left(\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

Dans le cas important où $\mu_1 = \mu_2 = 1$, on a

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Cela mène aux relations suivantes pour les deux cas (i) et (ii):

(i) \mathbf{E} normal au plan d'incidence:

$$\left. \begin{aligned} E_z' &= E_z \left(\frac{2}{1 + \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha}} \right) = 2E_z \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ E_z'' &= E_z \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \left(1 - \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} \right) = E_z \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

(ii) \mathbf{H} normal au plan d'incidence:

$$\left. \begin{aligned}
 H'_z &= H_z \left(\frac{2}{1 + \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha}} \right) = 2H_z \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \\
 H''_z &= H_z \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \underbrace{\left(1 - \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)}_{1 - \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}} \\
 &= H_z \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta} \\
 &= H_z \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta} = H_z \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

La dernière équation est obtenue en utilisant les identités trigonométriques $\sin 2\alpha = 2 \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ et $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$.

Les relations (3.10) et (3.11) sont *les formules de Fresnel* (elles ont été dérivées de la théorie de Maxwell pour la première fois par Lorentz en 1875).

Remarques:

- Nous n'avons pas utilisé les conditions $\varepsilon \mathbf{E}_\perp = \mathbf{D}_\perp$ et $\mu \mathbf{H}_\perp = \mathbf{B}_\perp$ qui doivent aussi être continues aux interfaces, mais il est facile de vérifier que ces conditions sont aussi satisfaites.
- Dans le cas (i), pour toute valeur $0 < \alpha < \pi/2$ il y a un rayon réfléchi (si $n_1 \neq n_2$) tandis que dans le cas (ii) \mathbf{H}'' et donc l'intensité du rayon réfléchi disparaît pour $\alpha = \alpha_B$ qui est défini par $\alpha_B + \beta_B = \frac{\pi}{2}$. Pour $\alpha_B + \beta_B = \frac{\pi}{2}$, $\sin \beta_B = \cos \alpha_B$, et

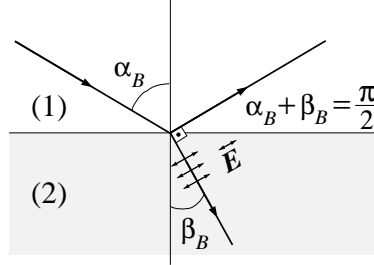
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta_B} = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B}.$$

Cet angle est appelé *l'angle de Brewster*, α_B :

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.12)$$

Si de la lumière non polarisée atteint la surface qui sépare deux milieux avec un angle d'incidence α_B , le rayon réfléchi est linéairement polarisé (son champ électrique est normal au plan d'incidence). L'explication microscopique (lorsque le milieu (1) est le vide, $\varepsilon_1 = 1$) de ce phénomène est la suivante: le rayon réfléchi est engendré par les oscillations des dipôles (atomes, molécules) dans la matière du milieu (2), parallèles au champ transmis. Si

le champ électrique \mathbf{E} produit de cette façon est parallèle à \mathbf{k}'' , l'intensité de l'onde réfléchie (qui, lorsqu'elle se propage dans la direction \mathbf{k}'' , doit être normale à \mathbf{k}'') disparaît.



Réflexion totale

Ce phénomène peut se produire lorsque $n_1 > n_2$. Dans ce cas, l'équation $\sin \beta = (n_1/n_2) \sin \alpha$ n'a pas de solution réelle pour β si $\alpha > \alpha_T$, où

$$\sin \alpha_T = \frac{n_2}{n_1}.$$

Comme $\sin \beta$ doit être réel, seuls les β complexes de la forme $\beta = \pi/2 + i\gamma$ sont admis. Donc

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}-\gamma} - e^{-i\frac{\pi}{2}+\gamma}}{2i} = \frac{e^{-\gamma} + e^{\gamma}}{2} = \cosh \gamma \\ \cosh \gamma &= \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Avec l'éq. (3.13), γ est déterminé à un signe près. Le vecteur d'onde du rayon transmis est maintenant complexe:

$$\mathbf{k}' = \frac{n_2\omega}{c}(\sin \beta, -\cos \beta, 0) = \frac{n_2\omega}{c}(\cosh \gamma, i \sinh \gamma, 0).$$

La phase de l'onde transmise est donc

$$e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = e^{\omega(\frac{in_2}{c}x \cosh \gamma - \frac{n_2}{c}y \sinh \gamma - it)}. \quad (3.14)$$

Pour que l'amplitude de cette onde décroisse lorsque $y \rightarrow -\infty$, il faut choisir γ négatif. L'onde réfractée (3.14) se propage alors dans la direction \mathbf{e}_x , le long de la surface limite, et elle est amortie exponentiellement pour $y < 0$ (onde évanescente).

Pour le cas (i) nous trouvons

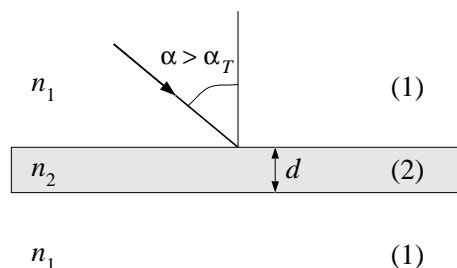
$$\frac{E_z''}{E_z} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + i\gamma)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha + i\gamma)} = \frac{\cos \alpha \cosh \gamma + i \sin \alpha \sinh \gamma}{\cos \alpha \cosh \gamma - i \sin \alpha \sinh \gamma}.$$

Comme c'est le rapport entre deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre, nous trouvons que les intensités sont égales:

$$\frac{I''}{I} = \frac{E_z'' E_z''^*}{E_z E_z^*} = 1. \quad (3.15)$$

La même situation se répète dans le cas (ii).

On peut vérifier expérimentalement l'existence de l'onde dans le milieu (2). Si on choisit une lame mince de matériel (2) et on continue de l'autre côté avec le milieu (1) comme montré ci-dessous,



on trouve une atténuation de l'onde d'un facteur:

$$e^{-\frac{n_2 \omega}{c} d \sinh \gamma} = e^{-\frac{d}{d_2}};$$

$$d_2(\omega) := \frac{c}{n_2 \omega \sinh \gamma} \quad \text{est la longueur d'atténuation.}$$

Intensité

L'intensité est donnée par Eq. (3.7), $I = |\mathbf{S}| = (c/8\pi)n|\mathbf{E}|^2$. Pour étudier l'intensité des ondes, considérons d'abord deux cas limites.

(a) *Incidence rasante*, $\alpha = \pi/2$

D'après (3.8)

$$\sin \beta = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta, \quad \sin(\beta - \alpha) = -\cos \beta.$$

D'après (3.10) et (3.11), nous avons alors dans les deux cas (i) et (ii)

$$\frac{I''}{I} = 1, \quad I' = 0. \quad (3.16)$$

Donc, dans le cas de l'incidence rasante, la réflexion est toujours totale (par exemple l'image miroir des montagnes à la rive opposée dans un lac ou l'image miroir

du soleil couchant dans la mer).

(b) *Incidence normale*, $\alpha \approx 0$

Dans ce cas, $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\sin \beta \approx \beta$, donc $n_1 \alpha \approx n_2 \beta$. Dans le cas (i), l'équation (3.10) donne

$$\frac{E_z''}{E_z} \approx \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad \frac{I''}{I} = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (3.17)$$

De même,

$$\begin{aligned} \left| \frac{E_z'}{E_z} \right|^2 &\approx \left(\frac{2\beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \approx \frac{4n_1^2}{(n_1 + n_2)^2} \\ I' &= \frac{c}{8\pi} n_2 E_z'^2 \\ I &= \frac{c}{8\pi} n_1 E_z^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{I'}{I} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (3.18)$$

Des résultats identiques sont obtenus dans le cas (ii).

Les *coefficients de réflexion et de transmission* sont définis par les rapports

$$R = \left| \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}''}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}} \right| = \frac{E_z''^2}{E_z^2} = \frac{I''}{I}, \quad T = \left| \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}'}{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{S}} \right| = \frac{n_2 \cos \beta E_z'^2}{n_1 \cos \alpha E_z^2} = \frac{I' \cos \beta}{I \cos \alpha}.$$

Dans les cas d'incidence rasante et normale, les coefficients de réflexion et de transmission ne dépendent pas de la polarisation; ils sont les mêmes pour les deux polarisations linéaires (i) et (ii). Cela n'est plus le cas dans la situation générale. En effet, en général, comme l'intensité réfléchi dépend de la polarisation, le rayon réfléchi est partiellement polarisé même si la lumière incidente ne l'est pas (voir figure et exercices).

Clairement, pour chaque angle d'incidence α , $R + T = 1$ pour des raisons de conservation d'énergie. Le comportement des intensités transmises et réfléchies en fonction de l'angle d'incidence est représenté sur la figure 3.1.

Exercice: Montrer que $R + T = 1$ dans tous les cas.

3.3 L'optique des métaux

Dans ce paragraphe nous considérons de bons conducteurs (comme les métaux). Puisque le champ électrique effectue un travail sur les courants, il est amorti très

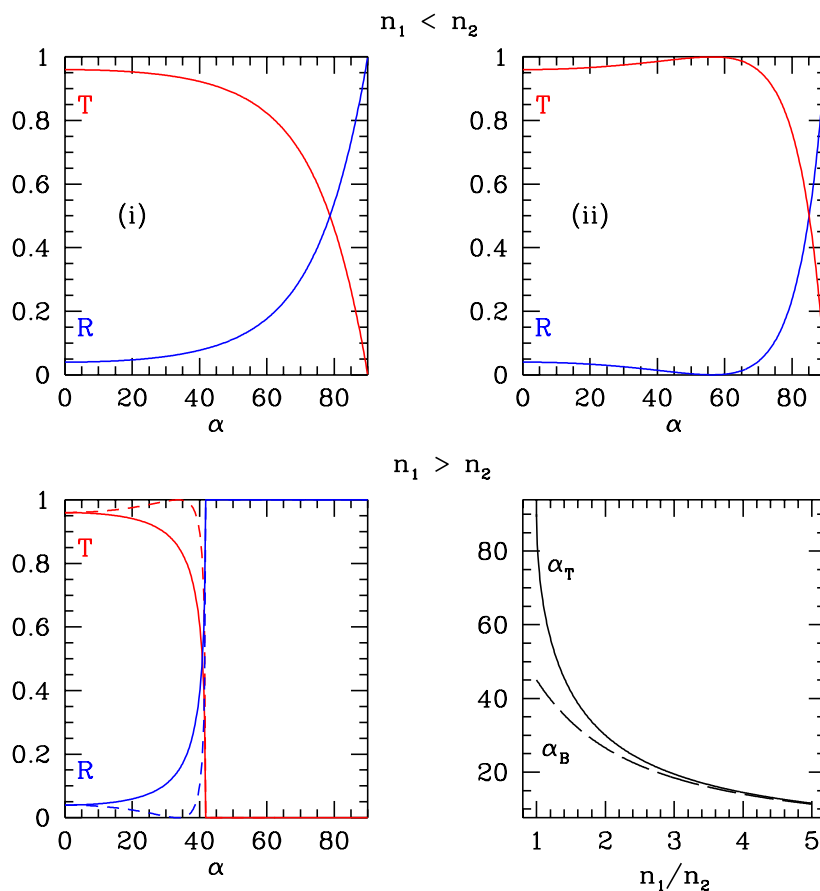


Figure 3.1: Les coefficients de transmission et réflexion sont représentés pour $n_1 < n_2$ (en haut) et pour $n_1 > n_2$ (en bas à gauche, le cas (ii) en lignes traitillées). Les angles α_B et α_T pour $n_1 > n_2$ sont aussi indiqués (en bas à droite).

vite avec production de chaleur si la conductivité σ est élevée (*phénomène de dissipation*). Pour cette raison les métaux ne sont pas transparents mais ce sont de bons réflecteurs.

Pour une discussion quantitative, posons $\mu = 1$ et négligeons la dispersion de ε et σ , c'est-à-dire la dépendance de ε et σ en fréquence. (Cela n'est pas une bonne approximation pour des ondes électromagnétiques visibles, mais elle est assez bonne dans l'infrarouge). Nous pouvons de toute façon considérer une onde qui a une fréquence donnée (onde monochromatique), $\mathbf{E} \propto e^{-i\omega t}$. Nous utilisons la loi d'Ohm, valable dans de bons conducteurs:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Les équations de Maxwell donnent

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho & \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}.\end{aligned}$$

La divergence de la dernière équation donne

$$\frac{\varepsilon}{c} \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

ce qui conduit à

$$\dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho = 0,$$

équation qui peut être déduite aussi à partir de la conservation de la charge $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Sa solution est

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}, \quad (3.19)$$

où τ est le temps de relaxation. Pour une conductivité élevée, τ est un temps très court, la densité de charge à l'intérieur disparaît très vite et on retrouve $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, ce que nous posons pour la suite.

Prenons le rotationnel de la loi d'induction et la dérivée par rapport au temps de la loi d'Ampère. La différence de ces deux équations conduit à:

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon}{c^2} \partial_t^2 \right) \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \dot{\mathbf{E}}. \quad (3.20)$$

Le membre de droite agit comme une atténuation. Dans le cas monochromatique, \mathbf{E} et $\mathbf{H} \propto e^{-i\omega t}$, éq. (3.20) donne

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2 \varepsilon'}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0. \quad (3.21)$$

avec

$$\varepsilon' = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (n_{old} = \sqrt{\varepsilon}). \quad (3.22)$$

Nous définissons

$$\left. \begin{aligned} n'^2 &= \varepsilon', & n' &= n(1 + i\kappa) \\ \operatorname{Re}(n'^2) &= \varepsilon = n^2(1 - \kappa^2) = n_{old}^2 \\ \operatorname{Im}(n'^2) &= \frac{4\pi\sigma}{\omega} = 2n^2\kappa \end{aligned} \right\}. \quad (3.23)$$

De plus, nous avons que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{i\omega}{c} \mathbf{H} = \nabla \wedge \mathbf{E}. \quad (3.24)$$

Les équations (3.21) et (3.24) sont formellement identiques aux équations de Maxwell pour les isolants, sauf qu'ici *la constante diélectrique, ε' , est complexe*. Ainsi, les solutions pour les isolants sont valables ici. Pour une onde plane, le vecteur d'onde est maintenant complexe:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' = \frac{\omega^2}{c^2} n'^2, \\ \mathbf{k} &= \frac{\omega}{c} n' \hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Le champ électrique est donné par

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\kappa n \omega}{c} (\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x})} e^{i(\frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}.$$

Une onde plane est donc atténuée avec constante d'atténuation:

$$\chi = 2 \frac{\kappa n \omega}{c}, \quad I = I_0 e^{-\chi \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.26)$$

$d = 1/\chi$ est la profondeur de pénétration. Pour le cuivre, par exemple, on a:

$c \frac{2\pi}{\omega} = \lambda_0$ (vide)	1 Å = 10^{-8} cm	1 μ = 10^{-4} cm	1 cm
d	0.18×10^{-4} cm	0.18×10^{-2} cm	0.18 cm

Une onde électromagnétique ne peut pas pénétrer dans un métal. C'est pour cette raison qu'une auto vous protège de la foudre! Si la conductivité est très élevée, $4\pi\sigma/\omega \gg \varepsilon$, nous trouvons de l'éq. (3.23)

$$\kappa \approx 1 \quad \text{et} \quad n \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}.$$

Réflexion de la lumière sur une surface métallique

Comme les équations pour les conducteurs sont formellement identiques à celles des isolants, en remplaçant la constante diélectrique ε par la constante complexe ε' et n par n' , nous pouvons répéter les arguments qui ont conduit aux équations de la réflexion et de la réfraction, et nous pouvons en particulier reproduire les formules de Fresnel. Il faut toutefois faire bien attention à l'interprétation et la signification physique de nos résultats!

De la loi de Snell on a que

$$\sin \alpha = n' \sin \beta.$$

n' et donc également β sont complexes et cela a des conséquences intéressantes. D'abord, nous nous rappelons que $n'^2 = \varepsilon + i4\pi\sigma/\omega$ est très grand pour de bons conducteurs (puisque σ est très grand) et donc:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n'^2}} \approx 1.$$

Pour l'onde réfractée, nous obtenons

$$\mathbf{k}' = \frac{\omega}{c} n' \hat{\mathbf{k}}', \quad \hat{\mathbf{k}}' = (\sin \beta, -\cos \beta, 0) \approx (\sin \beta, -1, 0),$$

ce que l'on peut écrire

$$\mathbf{k}' = k_0 n' \left(\frac{\sin \alpha}{n'}, -1, 0 \right)$$

où $k_0 = \omega/c$ est le nombre d'onde dans le vide. Avec $n' = n(1 + i\kappa)$ cela conduit à

$$e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \exp\{i[k_0(x \sin \alpha - ny) - \omega t] + n\kappa k_0 y\}. \quad (3.27)$$

On trouve donc que l'onde transmise est atténuée exponentiellement pour $y < 0$. Les formules de Fresnel donnent dans le cas (i), éq. (3.10)

$$\begin{aligned} E'_z &= E_z \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = E_z \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta} \\ &\approx E_z \frac{(2/n') \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha/n' + \sin \alpha} \approx E_z \frac{2 \cos \alpha}{n'} \quad (|n'| \gg 1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pour H'_x nous trouvons (de $H'_x = -\sqrt{\varepsilon'} E'_z \cos \beta$) que

$$H'_x \approx -2E_z \cos \alpha. \quad (3.29)$$

La composante H'_x reste donc finie en $y = 0$ dans la limite $|n'| \rightarrow \infty$, ($\sigma \rightarrow \infty$). D'autre part, on vérifie facilement que la composante H'_y décroît. L'onde réfractée ne pénètre pas dans le métal et n'est donc pas très intéressante. L'onde réfléchie est plus intéressante: comme β est complexe, des différences de phases entre l'onde incidente et l'onde réfléchie apparaissent (voir exercice).

Relations d'intensité. Nous nous limitons à l'incidence normale ($\alpha \approx 0$) comme en (3.17), avec $n_1 = 1$:

$$\frac{I''}{I} = \left| \frac{E''_z}{E_z} \right|^2 = \left| \frac{n' - 1}{n' + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + n^2 \kappa^2}{(n + 1)^2 + n^2 \kappa^2}$$

et donc

$$1 - \frac{I''}{I} = \frac{4n}{(n + 1)^2 + n^2 \kappa^2} \approx \frac{2}{n} \approx 2 \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} = 2 \sqrt{\frac{c}{\lambda\sigma}} \quad (3.30)$$

où on a utilisé que $\frac{\sigma}{\omega}$ est très grand et donc $\kappa^2 \approx 1$, $n \approx 2\pi\sigma/\omega \gg 1$. Pour cette raison, les métaux sont des réflecteurs idéaux. Par exemple, pour le cuivre, on trouve pour $\lambda = 12\mu$ ($= 12000 \text{ \AA}$, infrarouge),

$$1 - \frac{I''}{I} \Big|_{\text{exp}} = 1.6 \times 10^{-2}$$

$$1 - \frac{I''}{I} \Big|_{(3.30)} = 1.4 \times 10^{-2}.$$

Exercice: A quelle longueur d'onde un métal de conductivité σ perd-il sa propriété de bon réflecteur? Que se passe-t-il donc ici?

3.4 Dispersion

Jusqu'ici, nous avons décrit les propriétés de matériaux avec des ε , μ et σ constants. Cette approximation est souvent insuffisante, surtout pour les ondes électromagnétiques qui représentent des champs rapidement variables: ε , μ et σ ont besoin d'un certain temps pour réagir aux variations du champ. Un exemple de la vie quotidienne est la décomposition de la lumière blanche par un prisme, un phénomène qui n'est pas compatible avec un indice de réfraction constant (indépendant de la fréquence). Pour la lumière monochromatique, c.à.d. composée d'une seule fréquence ω constante, les résultats de la section précédente restent valables.

Pour examiner les effets qui résultent de la dépendance de ε et μ en ω , nous discutons d'abord un modèle simple.

Modèle simple pour $\varepsilon(\omega)$

Supposons que le mouvement d'un électron dans la matière est comparable à celui d'un oscillateur harmonique amorti,

$$m[\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}] = -e\mathbf{E}(\mathbf{x}, t). \quad (3.31)$$

Le membre de gauche de cette équation est l'approximation linéaire la plus générale, et elle est donc toujours valable pour des déviations \mathbf{x} par rapport à la position d'équilibre suffisamment petites. Pour des oscillations \mathbf{x} de petite amplitude, le champ \mathbf{E} peut être évalué à la position moyenne de l'électron, $\mathbf{x} = 0$. Considérons un champ qui oscille harmoniquement, $E \propto e^{-i\omega t}$. Le même *ansatz* pour $\mathbf{x}(t)$ mène à

$$m\mathbf{x}(-\omega^2 - i\omega\gamma + \omega_0^2) = -e\mathbf{E}.$$

La contribution au moment dipolaire de cet électron est alors donnée par

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{x} = \frac{e^2}{m}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)^{-1}\mathbf{E}.$$

Considérons une substance constituée de N molécules par unité de volume avec chacune Z électrons. Dans chaque molécule, nous avons f_j électrons qui ont une fréquence propre ω_j (*énergie de liaison* = $\hbar\omega_j$) et une constante de frottement (amortissement) γ_j . Il suit que $\sum_j f_j = Z$, et la polarisation par unité de volume est

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \sum_j f_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1} \mathbf{E} = \chi_e \mathbf{E}. \quad (3.32)$$

Nous obtenons alors la constante diélectrique

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \sum_j f_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j)^{-1}. \quad (3.33)$$

Clairement, les constantes f_j , ω_j et γ_j sont déterminées par une description quantique de la substance. N'étant pas capables de calculer ces constantes en détail, nous ne discutons que quelques propriétés générales.

Dispersion anormale et absorption résonante

En général, les constantes γ_j sont très petites par rapport aux fréquences résonantes, $\gamma_j/\omega_j \ll 1$, et alors $\varepsilon(\omega)$ est presque réel pour la plupart des fréquences. Pour $\omega < \omega_j$, le facteur $(\omega_j^2 - \omega^2)$ est positif et pour $\omega > \omega_j$ il est négatif (voir Jackson §7).

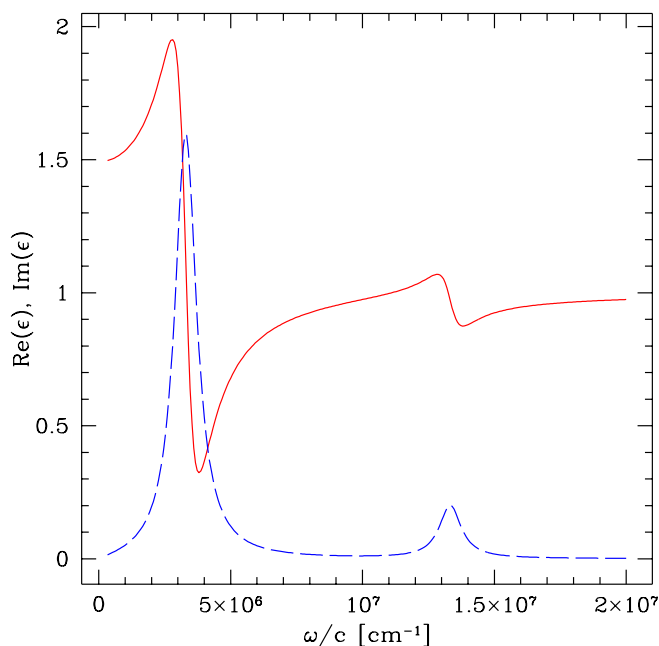


Figure 3.2: Les parties réelle (ligne continue) et imaginaire (ligne traitillée) de la constante diélectrique en fonction de la fréquence.

A basse fréquence, $\omega < \min_j\{\omega_j\}$, chaque terme de la somme (3.33) est positif, et donc

$$\varepsilon(\omega) > 1 \quad \text{à basse fréquence.}$$

Avec des fréquences de plus en plus élevées, de plus en plus de termes dans la somme sont négatifs, jusqu'à ce que finalement la somme devienne négative:

$$\varepsilon(\omega) < 1 \quad \text{à haute fréquence.}$$

Dans le voisinage d'une fréquence résonante ω_j , le comportement est très intéressant: la partie réelle du dénominateur s'annule et le terme devient grand et imaginaire (voir figure 3.2).

La croissance de $\text{Re}[\varepsilon(\omega)]$ avec la fréquence ω s'appelle *dispersion normale*, tandis que la décroissance s'appelle *dispersion anormale*. Au voisinage d'une fréquence résonante nous avons donc de la dispersion anormale. En plus, $\text{Im}[\varepsilon(\omega)]$ conduit à une absorption résonante. Comme nous l'avons déjà vu, cela s'exprime facilement en parties réelle et imaginaire du nombre d'onde:

$$k = \beta + i\alpha$$

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 - \alpha^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \text{Re}(\varepsilon) \\ 2\beta\alpha &= \frac{\omega^2}{c^2} \text{Im}(\varepsilon) \end{aligned} \right\} k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon.$$

Si l'absorption n'est pas très forte, $\alpha \ll \beta$, on trouve que

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{\text{Im}(\varepsilon)}{\text{Re}(\varepsilon)} \beta; \quad \beta = \sqrt{\text{Re}(\varepsilon)} \frac{\omega}{c}.$$

Sur une distance d , l'intensité de l'onde décroît comme

$$I = I_0 e^{-2\alpha d} = I_0 e^{-\left(\frac{\text{Im}(\varepsilon)}{\text{Re}(\varepsilon)}\right)\beta d} = I_0 e^{-\frac{\omega d}{c} \frac{\text{Im}(\varepsilon)}{\sqrt{\text{Re}(\varepsilon)}}}.$$

Conductivité électrique à basse fréquence

Dans la limite des basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$, le comportement de $\varepsilon(\omega)$ est qualitativement différent si une fraction f_0 des électrons de chaque molécule sont libres, c'est-à-dire, s'ils ont la fréquence résonante $\omega_0 = 0$. Dans ce cas, qui correspond précisément aux métaux, la constante diélectrique à basse fréquence a une partie imaginaire importante:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi N e^2 f_0}{m\omega(\gamma_0 - i\omega)}, \quad (3.34)$$

où $\varepsilon_0(\omega)$ contient la contribution à la constante diélectrique des électrons liés. Si nous comparons ce résultat avec notre discussion sur les métaux de la section précédente, il est clair que la conductivité est donnée par

$$\sigma = \frac{f_0 N e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}. \quad (3.35)$$

Cela correspond à peu près au modèle de Drude (1900) pour la conductivité. $N f_0$ est le nombre d'électrons libres par volume; γ_0 est la *constante de frottement* qui dépend des processus de collision des électrons libres entre eux et avec les ions du métal. Pour le cuivre, par exemple, on a

$$\begin{aligned} N &\approx 8 \times 10^{22} \text{ atomes/cm}^3 \\ \sigma &\approx 5 \times 10^{17} \text{ sec}^{-1} \quad \text{à basse fréquence,} \end{aligned}$$

et donc pour $\omega < 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ (micro-ondes)

$$\frac{\gamma_0}{f_0} \approx \gamma_0 \approx 3 \times 10^{13} \text{ sec}^{-1}.$$

Limite des hautes fréquences, la fréquence de plasma

Dans le domaine $\omega \gg \max_j \{\omega_j\}$, la formule (3.33) prend la forme:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (3.36)$$

avec

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi NZe^2}{m}. \quad (3.37)$$

La fréquence ω_p^2 , qui dépend seulement de la densité électronique NZ , est la *fréquence plasma* du matériel. La relation de dispersion dans cette situation se réduit à

$$ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2. \quad (3.38)$$

Dans les milieux diélectriques, la limite (3.36) n'est réalisée que pour des fréquences $\omega \gg \omega_p$. La constante diélectrique est donc très proche de 1, mais toujours inférieure à 1. Elle converge vers 1 pour $\omega \rightarrow \infty$. Dans d'autres situations, comme dans la ionosphère de notre atmosphère ou à l'intérieur des étoiles, (comme aussi dans certains plasmas de laboratoire), les électrons sont tous libres et le frottement est négligeable. Dans ce cas, la relation (3.36) est valable même pour des fréquences $\omega \ll \omega_p$.

Pour $\omega < \omega_p$ le nombre d'onde k devient entièrement imaginaire. Des ondes électromagnétiques incidentes à un tel plasma sont alors entièrement réfléchies. L'intensité décroît exponentiellement à l'intérieur du plasma avec une constante d'atténuation:

$$\alpha_{\text{plasma}} \approx \frac{2\omega_p}{c} \quad \text{pour} \quad \omega \ll \omega_p.$$

A des fréquences très élevées la constante diélectrique des métaux (3.34) prend aussi la forme

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega \gg \gamma_0$$

avec
$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N f_0 e^2}{m}.$$

Pour $\omega \ll \omega_p$ cela donne une constante diélectrique négative et la lumière ne pénètre pas dans le métal. Mais si la fréquence est suffisamment élevée, $\varepsilon(\omega) > 0$ et le métal devient transparent! Cela se passe typiquement dans le domaine des ondes ultraviolettes (phénomène de la *transparence ultraviolette des métaux*).

3.5 Propriétés générales de la “constante” diélectrique

Nous travaillons sous l'hypothèse que la densité de polarisation \mathbf{P} dépend linéairement de \mathbf{E} (réponse linéaire) (ce qui n'est pas le cas pour des champs très forts). La relation la plus générale entre \mathbf{P} et \mathbf{E} est alors de la forme:

$$P_i(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' dt' K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t, t') E_j(\mathbf{x}', t').$$

Si les propriétés du milieu sont indépendantes du temps, K_{ij} ne dépend que de la différence $t - t'$. Par ailleurs, si le milieu est homogène et isotrope, K_{ij} prend la forme $K_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t - t') = \delta_{ij}K(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t')$. De plus, la dépendance spatiale est très souvent *locale*,

$$K(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; t - t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \chi(t - t')$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \int dt' \chi(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{x}, t'), \quad i.e. \quad (3.39)$$

$$\mathbf{P} = \chi * \mathbf{E}. \quad (3.40)$$

Ici “*” représente la convolution par rapport au temps¹.

Nous nous limitons au cas $\mu = 1$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, et nous ne discutons que des diélectriques.

Nous effectuons la transformation de Fourier par rapport au temps:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t}.$$

Supposons que $\chi(t) \in L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$\int |\chi(t)| dt < \infty.$$

Maintenant, nous utilisons le résultat mathématique que pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\hat{f}, \hat{g} \in C_0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$. Pour les transformées de Fourier nous trouvons alors les relations

$$\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\chi}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.41)$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{x}, \omega) = \hat{\varepsilon}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) \quad (3.42)$$

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + 4\pi \hat{\chi}(\omega). \quad (3.43)$$

En principe, la dépendance en fréquence de $\hat{\varepsilon}(\omega)$ est déterminée par la mécanique quantique. Nous avons discuté dans le paragraphe précédent un modèle classique simple. Ici nous voulons discuter quelques conditions générales qu'on peut poser et qui sont valables même dans les situations où les effets quantiques ne sont pas négligeables.

¹La convolution de deux fonction, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ est définie par $(f * g)(t) = \int f(t - t')g(t')dt'$. Il est facile à démontrer que $f * g = g * f$; $(f * g)' = f' * g = f * g'$.

(a) *Dissipativité*: La polarisation de la matière absorbe de l'énergie; le travail effectué sur le milieu est *positif*. Dans un milieu où $\mu = 1$, $\mathbf{J} = \rho = 0$, avec

$$\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}}) = \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{P}},$$

la conservation de l'énergie donne

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{P}}$$

où on a utilisé $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Le travail effectué sur le milieu par le champ électromagnétique est donc

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \int d^3x \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{P}}, \\ W &= \int d^3x dt \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{P}} > 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

L'équation de Parseval ($\int |f|^2 dt = \int |\hat{f}|^2 d\omega$) conduit à $\int f^* g dt = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}^* \hat{g} d\omega$.

$$\begin{aligned} 0 < W &= \frac{1}{2\pi} \int d^3x d\omega \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{x}, \omega)(-i\omega)\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{x}, \omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i\omega) \int d^3x \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{x}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) \hat{\chi}(\omega). \end{aligned}$$

Comme $\chi(t)$ est réel, $\hat{\chi}^*(\omega) = \hat{\chi}(-\omega)$ et de même pour \mathbf{E} . Ainsi

$$\begin{aligned} 2\pi W &= \int d^3x \int_0^{\infty} d\omega [-i\omega\hat{\chi}(\omega) + i\omega\hat{\chi}^*(\omega)] |\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)|^2 \\ &= \int d^3x \int_0^{\infty} d\omega 2\omega \text{Im} [\hat{\chi}(\omega)] |\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)|^2 \\ &= \int d^3x \int_0^{\infty} d\omega 2\omega \text{Im} [\hat{\varepsilon}(\omega)] |\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)|^2 > 0. \end{aligned}$$

Comme cela doit être correct pour tout champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$, nous concluons que

$$\text{Im} [\hat{\chi}(\omega)] = \frac{\text{Im} [\hat{\varepsilon}(\omega)]}{4\pi} > 0 \quad \text{pour } \omega > 0. \quad (3.45)$$

Comme nous l'avons déjà vu dans notre modèle simple, la partie imaginaire de $\hat{\varepsilon}$ détermine la dissipation (l'absorption). Tout processus non stationnaire dans un milieu réaliste est quelque part irréversible. C'est pourquoi il y a toujours des pertes, de la dissipation, *i.e.* $\text{Im} [\hat{\varepsilon}(\omega)] > 0$ pour tout $\omega > 0$. Les fréquences où $\text{Im} [\hat{\varepsilon}(\omega)]$ est très petit s'appellent les domaines de transparence du milieu: il y a très peu de pertes, donc les ondes électromagnétiques passent à travers le milieu.

(b) *Causalité*: La polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ ne peut pas dépendre de la valeur du champ électrique dans le futur. Dès lors,

$$\chi(t) = 0 \quad \text{pour } t < 0. \quad (3.46)$$

3.6 Les relations de dispersion de Kramers-Kronig

(Jackson, 7.10)

Ici, nous déduisons à partir de la condition de causalité ($\chi(t) = 0$ pour $t < 0$) des propriétés de la transformée de Fourier de $\chi(t)$,

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_0^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}. \quad (3.47)$$

Dans cette équation, nous considérons ω comme une variable complexe et nous supposons que $\int_0^{\infty} |\chi(t)| dt < \infty$. Dans ce cas (3.47) est bien définie pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im}(\omega) \geq 0$, car $|e^{i\omega t}| = e^{-\text{Im}(\omega)t} \leq 1$ pour $t \geq 0$. Pour $\text{Im}(\omega) > 0$, la fonction (3.47) est même analytique (holomorphe). En plus, $\hat{\chi}(\omega)$ est continu et borné dans le plan $\text{Im}(\omega) \geq 0$ et $\hat{\chi}(\omega) \rightarrow 0$ pour $|\omega| \rightarrow \infty$ uniformément dans toutes les directions du plan complexe où $\text{Im}(\omega) \geq 0$. (C'est une conséquence élémentaire du *lemme de Riemann-Lebesgue*:² $\chi \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\chi} \in C_0(\mathbb{R})$ et pour tout $\text{Im}(\omega) > 0$ la convergence est encore plus rapide.)

Récapitulons les propriétés de la susceptibilité $\hat{\chi}(\omega)$:

- (i) $\hat{\chi}(\omega)$ est analytique dans la région du plan complexe où $\text{Im}(\omega) > 0$.
- (ii) $\hat{\chi}$ est continu et borné dans le demi-plan $\text{Im}(\omega) \geq 0$ et $|\hat{\chi}(\omega)| \rightarrow 0$ pour $|\omega| \rightarrow \infty$ uniformément dans toutes les directions telles que $\text{Im}(\omega) \geq 0$. (3.48)
- (iii) $\hat{\chi}^*(\omega) = \hat{\chi}(-\omega^*)$.
- (iv) $\text{Im}[\hat{\chi}(\omega)] > 0$ pour $0 < \omega < \infty$.
- (v) $\hat{\chi}(0) = \int_0^{\infty} \chi(t) dt > 0$.

La dernière propriété suit du fait que la polarisation statique “coûte” du travail. Pour $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = H(t)\mathbf{E}(\mathbf{x})$, H étant la fonction Heavyside, ce travail est donné par (3.44)

$$\int d^3x \int_0^{\mathbf{P}(\infty)} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{P} = \int_0^{\infty} dt \chi(t) \int d^3x \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) = \hat{\chi}(0) \int d^3x \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) > 0.$$

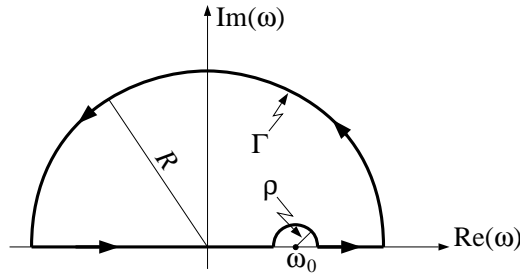
²Voir compl. de math.

Les relations de Kramers-Kronig sont des liens entre les parties réelle et imaginaire de $\hat{\chi}(\omega)$. Pour les dériver nous avons besoin de quelques résultats de la théorie des fonctions complexes que vous avez dérivés en mathématiques (j'espère):

Théorème de Cauchy — Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ une fonction analytique (holomorphe) et soit $\Gamma : [0, 1] \rightarrow D$ un chemin fermé dont l'intérieur appartient à D . Pour $\omega_0 \in D$, nous avons

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_0 \text{ se trouve à l'extérieur de } \Gamma \\ 2\pi i f(\omega_0) & \text{si } \omega_0 \text{ se trouve à l'intérieur de } \Gamma. \end{cases}$$

Nous considérons le chemin suivant



D'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = 0. \quad (3.49)$$

Dans la limite $\rho \rightarrow 0$, la contribution du petit demi-cercle $\omega = \omega_0 + \rho e^{i\phi}$, $\pi \geq \phi \geq 0$ donne

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\rho} \frac{\hat{\chi}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \hat{\chi}(\omega) d\phi = -i\pi \hat{\chi}(\omega_0). \quad (3.50)$$

D'autre part, la valeur principale de l'intégral (3.49) est définie par

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega_0 - \rho} \frac{\hat{\chi}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega_0 + \rho}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \right\} \equiv P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0}.$$

Dans la limite $R \rightarrow \infty$ le cercle à l'infini *ne contribue pas* à cause de la propriété (ii) de (3.48) et la décroissance exponentielle pour $\text{Im}(\omega) > 0$, et (3.49) donne

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} - i\pi \hat{\chi}(\omega_0) = 0. \quad (3.51)$$

Les parties réelle et imaginaire de cette équation sont les relations de Kramers-Kronig:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re} [\hat{\chi}(\omega_0)] &= \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} [\hat{\chi}(\omega)]}{\omega - \omega_0} d\omega \\ \text{Im} [\hat{\chi}(\omega_0)] &= -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re} [\hat{\chi}(\omega)]}{\omega - \omega_0} d\omega \end{aligned} \right\}. \quad (3.52)$$

De la propriété (iii) nous concluons (pour $\omega \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} [\hat{\chi}(\omega)] &= \operatorname{Re} [\hat{\chi}(-\omega)] \\ \operatorname{Im} [\hat{\chi}(\omega)] &= -\operatorname{Im} [\hat{\chi}(-\omega)] .\end{aligned}$$

Nous pouvons encore écrire (3.52) sous la forme

$$\left. \begin{aligned}\operatorname{Re} [\hat{\chi}(\omega_0)] &= \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Im} [\hat{\chi}(\omega)]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \operatorname{Im} [\hat{\chi}(\omega_0)] &= -\frac{2\omega_0}{\pi} P.V. \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re} [\hat{\chi}(\omega)]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega .\end{aligned}\right\} \quad (3.53)$$

Nous écrivons encore la première équation pour la fonction diélectrique $\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + 4\pi\hat{\chi}(\omega)$:

$$\operatorname{Re} [\hat{\varepsilon}(\omega_0)] = 1 + \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^\infty \frac{\omega \operatorname{Im} [\hat{\varepsilon}(\omega)]}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega. \quad (3.54)$$

Les équations (3.52) à (3.54) sont les relations de dispersion de Kramers et Kronig. Elles montrent que les propriétés d'absorption ($\operatorname{Im} [\hat{\chi}]$) en lien avec la causalité déterminent entièrement la dispersion $\operatorname{Re} [\hat{\chi}]$ et vice-versa. Elles jouent aussi un rôle important en physique des particules: la diffusion et l'absorption sont intimement liées par la condition de causalité. Les relations (3.53) ont été dérivées pour la première fois par Kramers (1927) et Kronig (1926) qui les ont écrites comme relations pour l'indice de réfraction $n(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}(\omega)}$. (La relation (3.51) se laisse aussi justifier dans le cas où $\chi(t)$ est une distribution.)

Théorème — Les propriétés (3.48) de la susceptibilité conduisent aux résultats suivants:

- $\hat{\chi}(\omega)$ ne prend pas de valeur réelle dans le demi-plan $\operatorname{Im}(\omega) \geq 0$ en dehors de l'axe imaginaire.
- Sur l'axe imaginaire $\hat{\chi}(\omega)$ décroît de façon monotone de $\chi_0 \equiv \hat{\chi}(0) > 0$ jusqu'à $\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{\chi}(is) = 0$.

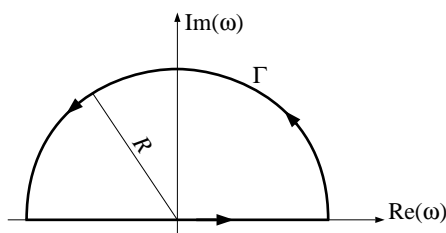
En particulier, $\hat{\chi}$ n'a pas de zéros dans le demi-plan supérieur.

Démonstration — Nous utilisons un résultat de la théorie des fonctions complexes: soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe (analytique hors de points z_i isolés auxquels la fonction diverge comme $(z - z_i)^{-n_i}$, z_i s'appellant un pôle d'ordre n_i). Soit Γ le bord d'un sous-ensemble compact de D , $K \subset D$, tel que f n'ait pas de pôle sur Γ et $f(z) \neq a \forall z \in \Gamma$. Dans cette situation on montre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z) - a} = Z - P$$

où Z est le nombre de zéros (multipliés par leur ordre) et P le nombre de pôles (multipliés par leur ordre) de $f - a$ dans K . (Ce résultat est un corollaire simple du théorème des résidus.)

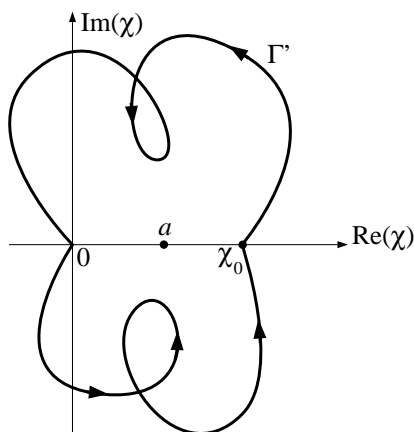
Nous appliquons ce résultat à la fonction $\hat{\chi}(\omega)$ en choisissant Γ comme sur le dessin ci-dessous:



Dans le demi-plan supérieur $\hat{\chi}$ n'a pas de pôle. Donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}'(\omega) d\omega}{\hat{\chi}(\omega) - a} = Z.$$

Soit Γ' l'image de Γ sous l'application $\omega \mapsto \hat{\chi}(\omega)$. Nous effectuons la limite $R \rightarrow \infty$. Puisque $\text{Im} [\hat{\chi}(\omega)] > 0$ pour $0 < \omega < \infty$ [propriété (iv)] et donc $\text{Im} [\hat{\chi}(\omega)] < 0$ pour $-\infty < \omega < 0$, $\Gamma' = \hat{\chi}(\Gamma)$ n'intersecte l'axe réel qu'à $\chi_0 = \hat{\chi}(0)$ et $0 = \hat{\chi}(\infty)$. Γ' a donc l'aspect suivant



Nous concluons

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}'(\omega) d\omega}{\hat{\chi}(\omega) - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{d\hat{\chi}}{\hat{\chi} - a} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < a < \chi_0 \\ 0 & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus [0, \chi_0]. \end{cases}$$

Donc tout $a \in [0, \chi_0]$ est atteint exactement une fois par la fonction $\hat{\chi}$. Mais comme $[\chi_0, 0]$ est l'image du demi-axe imaginaire $i\mathbb{R}_+$, il existe un $x \in \mathbb{R}_+$ tel

que $\hat{\chi}(ix) = a$. Donc $\hat{\chi}$ (qui est réel sur l'axe imaginaire) est *monotoniquement* décroissant sur l'axe imaginaire. Et des valeurs réelles de $\hat{\chi}$ ne sont que les images de $i\mathbb{R}_+$ (sur le demi-plan supérieur).

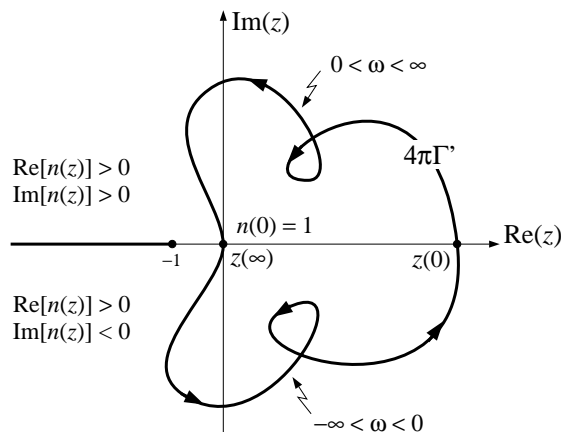
Ce théorème permet une définition non-ambigue de l'indice de réfraction complexe donné par

$$n(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}(\omega)}. \quad (3.55)$$

Pour $z \equiv 4\pi\hat{\chi}(\omega)$ nous avons donc

$$n(z) = \sqrt{1+z}.$$

Nous choisissons la racine par une coupure dans le plan z de -1 à $-\infty$



Dans le plan coupé, $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \leq -1\}$ nous définissons la racine uniquement par $n(0) = 1$. Cela donne $\text{Re}(n) > 0$ et $\text{Im}(n) \geq 0$ pour $\text{Im}(z) \geq 0$, $\text{Re}(n) > 0$ et $\text{Im}(n) \leq 0$ pour $\text{Im}(z) \leq 0$.

Si nous choisissons le chemin Γ dans le plan ω comme dans le théorème, nous trouvons son image ci-dessus dans le plan $z = 4\pi\hat{\chi}(\omega)$. Tout le cercle supérieur $|\omega| = R$ dans la limite $R \rightarrow \infty$ est appliqué sur 0. L'axe imaginaire, $i\mathbb{R}_+$ est appliqué sur l'intervalle réel $[0, z(0)]$. L'image du demi-plan $\text{Im}(\omega) > 0$ est l'intérieur du chemin $4\pi\Gamma'$.

De ces faits nous pouvons tirer les conclusions suivantes:

- (i) $n(\omega)$ est analytique pour $\text{Im}(\omega) > 0$.
- (ii) $n(\omega)$ est continu et borné pour $\text{Im}(\omega) \geq 0$ et $|n(\omega) - 1| \rightarrow 0$ pour $|\omega| \rightarrow \infty$ uniformément dans toutes les directions telles que $\text{Im}(\omega) \geq 0$.
- (iii) $n^*(\omega) = n(-\omega^*)$.
- (iv) $1 \leq n(0) < \infty$.
- (v) $\text{Im}[n(\omega)] > 0$ pour $\omega \in \mathbb{R}_+$ et $\text{Im}[n(\omega)] < 0$ pour $\omega < 0$
 $\text{Re}[n(\omega)] > 0$ pour tout ω avec $\text{Im}(\omega) \geq 0$.

(3.56)

De la même façon que (3.53), nous pouvons donc dériver une relation de dispersion pour n :

$$\text{Re}[n(\omega)] = 1 + \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^\infty \frac{\omega' \text{Im}[n(\omega')]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \quad (3.57)$$

$$\text{Im}[n(\omega)] = -\frac{2\omega}{\pi} P.V. \int_0^\infty \frac{\text{Re}[n(\omega') - 1]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (3.58)$$

3.7 Les ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs

(Jackson, 7.11)

Nous considérons pour commencer un milieu homogène et isotrope, avec une fonction diélectrique dynamique $\varepsilon(\omega)$, avec $\mu = 1$ et sans charges ni courants, $\rho = \mathbf{J} = 0$. Nous décomposons les champs $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ en modes de fréquence ω , $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega)$ (les transformées de Fourier de \mathbf{E} et \mathbf{B} par rapport au temps). $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ sont complexes, mais ils satisfont la condition de réalité $\hat{\mathbf{E}}^*(\omega) = \hat{\mathbf{E}}(-\omega)$ et de même pour $\hat{\mathbf{B}}$.

Dans les équations de Maxwell pour $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$ les dérivées sont remplacées par des facteurs $-i\omega$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{E}} &= 0 & \nabla \wedge \hat{\mathbf{E}} - \frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} &= 0 & \nabla \wedge \hat{\mathbf{B}} + \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}} &= 0. \end{aligned}$$

Comme auparavant, ces équations mènent aux équations d'onde pour $\hat{\mathbf{E}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$:

$$(\Delta + k^2) \hat{\mathbf{E}} = (\Delta + k^2) \hat{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.59)$$

avec

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega). \quad (3.60)$$

Comme $\varepsilon = n^2$, aussi k^2 est complexe. Les équations (3.59) ont pour solutions des ondes planes:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_0(\omega) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

avec $\mathbf{k} = (\omega/c)n(\omega)\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^3$, $|\hat{\mathbf{k}}| = 1$ et $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ où cette racine est définie comme dans le paragraphe précédent:

$$\operatorname{Re}[n(\omega)] > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[n(\omega)] > 0 \quad \text{pour} \quad \omega > 0$$

$$\operatorname{Re}[n(\omega)] > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[n(\omega)] < 0 \quad \text{pour} \quad \omega < 0.$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \mathbf{E}_0(\omega) e^{i\left(\frac{\omega}{c}\operatorname{Re}[n(\omega)]\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right)} e^{-\frac{\omega}{c}\operatorname{Im}[n(\omega)]\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{x}}.$$

Comme $\omega \operatorname{Im}[n(\omega)]$ est *toujours* positif, le dernier facteur représente toujours un *amortissement* dans la direction de propagation de l'onde. Comme dans l'optique des métaux, nous obtenons alors une onde propageante de direction $\hat{\mathbf{k}}$ qui est amortie exponentiellement. La longueur d'onde qui correspond à une fréquence ω donnée est déterminé par $\operatorname{Re}[n(\omega)]$ (*dispersion*). L'amortissement est déterminé par $\operatorname{Im}[n(\omega)]$ (*atténuation*). Si la fonction $\operatorname{Re}[n(\omega)]$ est croissante, la dispersion est dite "normale". Si la fonction $\operatorname{Re}[n(\omega)]$ est décroissante, la dispersion est dite "anormale".

Plusieurs vitesses différentes jouent un rôle pour la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux dispersifs.

Vitesse de phase

Comme déjà vu, la "crête" (une surface de phase constante) d'une onde électromagnétique de la forme $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)\}$ avec $\mathbf{k} = (\omega/c)n(\omega)\hat{\mathbf{k}}$ se propage dans la direction $\hat{\mathbf{k}}$ avec la vitesse

$$v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{|\operatorname{Re}[\mathbf{k}]|} = \frac{c}{\operatorname{Re}[n(\omega)]}.$$

Pour un indice de réfraction $\operatorname{Re}[n(\omega)] < 1$, la vitesse de phase est plus grande que c (exemple: le plasma à haute fréquence, $\omega > \omega_p$, ou $ck = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$).

Vitesse de groupe $v_g \equiv \partial\omega/\partial k$

Nous considérons ω comme fonction de $k = |\mathbf{k}|$: $\omega = \omega(k)$. Pour simplifier, nous étudions une onde scalaire (par exemple la composante E_1 du champ électrique).

En particulier, nous considérons un paquet d'ondes de la forme

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Re}[\psi(\mathbf{x}, t)] \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)},\end{aligned}$$

où $a(\mathbf{k})$ est concentré autour d'une valeur \mathbf{k}_0 , autrement dit $a(\mathbf{k})$ est différent de 0 seulement pour les valeurs de \mathbf{k} suffisamment proches de \mathbf{k}_0 . La densité d'énergie est proportionnelle à ϕ^2 . Nous définissons le *centre d'énergie*, $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ par

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle \equiv \frac{\int d^3x \mathbf{x} \phi^2(\mathbf{x}, t)}{\int d^3x \phi^2(\mathbf{x}, t)}.$$

$\phi = \frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ et donc $\phi^2 = \frac{1}{4}\psi^2 + \frac{1}{4}(\psi^*)^2 + \frac{1}{2}\psi\psi^*$. Les deux premiers termes oscillent rapidement à des fréquences proches de $2\omega(k_0)$ (*Zitterbewegung*, "mouvement de tremblement") tandis que le terme $|\psi|^2$ ne varie que lentement par rapport au temps. Nous négligeons les deux premiers termes qui sont éliminés dans une moyenne temporelle sur une période beaucoup plus longue que la période de l'onde $T_0 \approx 2\pi/\omega(k_0)$. A ces contributions oscillantes près, nous avons alors:

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \frac{\int d^3x \mathbf{x} |\psi(\mathbf{x}, t)|^2}{\int d^3x |\psi(\mathbf{x}, t)|^2}.$$

Pour le calcul du dénominateur, nous utilisons

$$\int d^3x x_j |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x d^3k d^3k' \underbrace{x_j e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}}_{-i\frac{d}{dk_j} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}} a(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}') e^{-i(\omega-\omega')t}.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\langle x_j(t) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3x d^3k d^3k' e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \left[\left(a^*(\mathbf{k}') i \frac{\partial a}{\partial k_j} \right) e^{-i(\omega-\omega')t} + \right. \\ &\quad \left. + t a^*(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}) \frac{\partial \omega}{\partial k_j} e^{-i(\omega-\omega')t} \right] / \int d^3x |\psi(\mathbf{x}, t)|^2.\end{aligned}$$

L'intégration sur d^3x donne la distribution $(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ et nous trouvons alors, avec $\int d^3x |\psi|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |a|^2$:

$$\langle x_j(t) \rangle = \frac{\int d^3k a^*(\mathbf{k}) i \frac{\partial a}{\partial k_j}}{\int d^3k |a|^2} + t \frac{\int d^3k \frac{\partial \omega}{\partial k_j} |a|^2}{\int d^3k |a|^2}.$$

Pour la vitesse de propagation du centre d'énergie, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t) \rangle &= \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right\rangle &\equiv \frac{\int d^3k \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} |a|^2}{\int d^3k |a|^2},\end{aligned}$$

la moyenne de la vitesse de groupe, \mathbf{v}_g , définie par $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$. Dans le cas isotrope, $\omega = \omega(|\mathbf{k}|)$, $\mathbf{v}_g = \hat{\mathbf{k}} \frac{d\omega}{dk}$, $v_g = |\mathbf{v}_g| = \frac{d\omega}{dk}$ ou, avec $\omega = v_{\text{phase}} k$, $v_g = v_{\text{phase}} + k \frac{dv_{\text{phase}}}{dk}$. La relation $\omega = \frac{ck}{\text{Re}[n(\omega)]}$ donne

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{dk/d\omega} = \frac{c}{\text{Re}(n) + \omega \frac{d[\text{Re}(n)]}{d\omega}}. \quad (3.61)$$

Pour dispersion normale $\left(\frac{d[\text{Re}(n)]}{d\omega} > 0 \right)$ et $\text{Re}(n) > 1$ cela conduit à

$$v_g < v_{\text{phase}} < c.$$

Pour dispersion anormale $\frac{d[\text{Re}(n)]}{d\omega}$ peut devenir très négatif. Dans cette situation, il est possible que $v_g \gg v_{\text{phase}}$ et même que $v_g > c$. Des grandes valeurs de $\left| \frac{d[\text{Re}(n)]}{d\omega} \right|$ signifient une variation rapide de ω comme fonction de \mathbf{k} . Dans cette situation, les termes oscillants dans l'expression de $\langle \mathbf{x}(t) \rangle$ ne peuvent pas être négligés et le centre d'énergie bouge d'une façon très compliquée!

Vitesse de propagation

Ici nous démontrons que la vraie vitesse de propagation est toujours $\leq c$, même si v_g et v_{phase} peuvent être supérieurs à c . C'est une conséquence des propriétés analytiques de $n(\omega)$ (qui sont de leur côté une conséquence de la causalité).

Nous considérons une onde linéairement polarisée qui représente une superposition d'ondes planes de direction $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$, telle que le vecteur \mathbf{E} n'a qu'une composante selon y , $E(\mathbf{x}, t) = E(x, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E(x, t), 0) \\ E(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} \\ A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt E(0, t) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Nous supposons que cette onde ne parvienne en $x = 0$ qu'au temps $t = 0$, c'est-à-dire,

$$E(0, t) = 0 \quad \text{pour } t < 0,$$

donc

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} dt E(0, t) e^{i\omega t}.$$

Nous démontrons que dans ce cas $E(x, t) = 0$ pour $t < \frac{x}{c}$, c'est à dire, que $v_{\text{signal}} \leq c$. Pour la démonstration, nous supposons (pour simplifier!) que $|E(0, t)|$,

$|\frac{d}{dt}E(0, t)|$ et $|\frac{d^2}{dt^2}E(0, t)|$ sont intégrables sur $0 \leq t < \infty$. Ceci est le cas si, par exemple, $E(0, t)$ décrit un pulse d'une durée finie. Avec cela, $A(\omega)$ est analytique pour $\text{Im}(\omega) > 0$ et continue et bornée pour $\text{Im}(\omega) \geq 0$. Comme la dérivée de $E(0, t)$ par rapport au temps correspond à une multiplication de A par $-i\omega$, les mêmes propriétés sont valables pour ωA et $\omega^2 A$. Comme A et $\omega^2 A$ sont bornés pour $\text{Im}(\omega) \geq 0$, il existe une constante $a > 0$, telle que

$$|A(\omega)| \leq \frac{a}{1 + |\omega|^2} \quad \text{pour } \text{Im}(\omega) \geq 0.$$

$n(\omega)$ est analytique pour $\text{Im}(\omega) > 0$ et donc $e^{i(kx - \omega t)} = e^{(\frac{i\omega n(\omega)}{c}x - i\omega t)}$ est aussi analytique pour $\text{Im}(\omega) > 0$.

$$\begin{aligned} |e^{i(kx - \omega t)}| &= e^{-\text{Im}(\omega)(\frac{x}{c} - t)} e^{-\text{Im}[\omega(n(\omega) - 1)]\frac{x}{c}} \\ \text{Im}[\omega(n(\omega) - 1)] &= \text{Im}(\omega)(\text{Re}(n) - 1) + \text{Re}(\omega)\text{Im}(n). \end{aligned}$$

Le dernier terme n'est jamais négatif d'après la propriété (v) de (3.56). Nous trouvons alors

$$|A(\omega) e^{i(kx - \omega t)}| \leq \frac{a}{1 + \omega^2} \exp \left[-\text{Im}(\omega) \left(\frac{x}{c} - t + (\text{Re}[n(\omega)] - 1)\frac{x}{c} \right) \right].$$

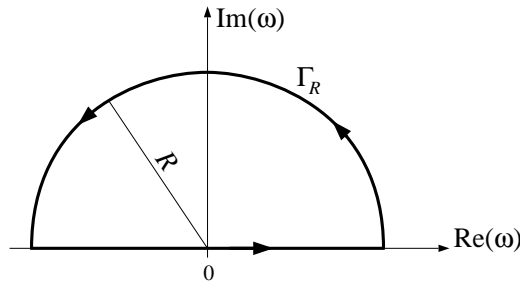
Pour $|\omega| \rightarrow \infty$, $\text{Re}[n(\omega)] \rightarrow 1$. Si $\frac{x}{c} - t > 0$ l'inégalité suivante est satisfaite pour des valeurs de $|\omega|$ suffisamment grandes:

$$|A(\omega) e^{i(kx - \omega t)}| \leq \frac{a}{1 + |\omega|^2} e^{-\alpha \text{Im}(\omega)}$$

avec $\alpha = \frac{x}{c} - t + (\text{Re}[n(\omega)] - 1)\frac{x}{c} > 0$. Si nous remplaçons l'intégrale

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) e^{i(kx - \omega t)}$$

par l'intégrale le long du chemin Γ_R ,



dans la limite $R \rightarrow \infty$, le grand cercle ne contribue pas et

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} d\omega A(\omega) e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{pour } \frac{x}{c} - t > 0.$$

Mais $A(\omega) e^{i(kx - \omega t)}$ est analytique dans le demi-plan supérieur et donc, d'après le théorème de Cauchy, l'intégrale de cette fonction le long du chemin Γ_R disparaît, ce qui donne

$$E(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{x}{c} - t > 0.$$

On peut démontrer de la même façon que pour une onde telle que $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0$ pour $|x| > L$ à $t < 0$, $\mathbf{E}(\mathbf{y}, t) = 0$ pour $|\mathbf{y}| > L + ct$, indépendamment de la forme particulière de la loi de dispersion.

Même si les vitesses de phase et de groupe peuvent être supérieures à c , un signal électromagnétique ne se propage jamais plus vite que c .

3.8 La limite optique

La longueur d'onde de la lumière *visible* est de $(4 - 7) \times 10^{-5}$ cm. Du point de vue macroscopique, c'est une petite distance et la limite $\lambda \rightarrow 0$ est souvent une bonne approximation pour la propagation de la lumière. Dans cette limite, on obtient les lois de l'optique géométrique (l'optique des rayons), que nous dérivons dans ce paragraphe. Les considérations suivantes sont absolument équivalentes à celles qui mènent à la mécanique classique comme limite de la mécanique quantique.

L'équation de l'eikonal

En plus de la longueur d'onde λ , nous considérons une distance macroscopique L sur laquelle l'amplitude et la polarisation de l'onde changent de façon significative. L'optique géométrique est une bonne approximation si

$$\lambda \ll L.$$

Nous considérons un milieu isotrope et isolant, mais en général inhomogène sur l'échelle L . Nous négligeons la partie imaginaire de ε (l'absorption). Une onde "presque plane" est un champ électromagnétique de la forme

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) e^{i\phi(\mathbf{x}, t)} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) e^{i\phi(\mathbf{x}, t)} \end{aligned} \right\}, \quad (3.62)$$

où \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , $\nabla\phi$ et $\partial_t\phi$ changent beaucoup plus lentement que ϕ . Pour une vraie onde plane, toutes ces grandeurs sont constantes: \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 sont constants; $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ et donc $\nabla\phi = \mathbf{k}$ et $\partial_t\phi = \omega$.

$$L^{-1} = \max \left\{ \partial_i \varepsilon, \partial_i \mu, \frac{\partial_i E_{0j}}{E_{0j}}, \frac{\partial_i B_{0j}}{B_{0j}}, \frac{\partial_j \partial_i \phi}{\partial_i \phi}, \frac{\partial_i \partial_t \phi}{\partial_t \phi} \right\}.$$

Les équations de Maxwell (en l'absence de charges et courants) sont

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}} &= 0.\end{aligned}$$

Nous y insérons les champs (3.62) et négligeons toutes les dérivées de ε , μ , \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 . Cela conduit à

$$\left. \begin{aligned}\nabla \phi \cdot \mathbf{B}_0 &= 0 & \nabla \phi \wedge \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} \dot{\phi} \mathbf{B}_0 &= 0 \\ \nabla \phi \cdot \mathbf{E}_0 &= 0 & \nabla \phi \wedge \mathbf{B}_0 - \frac{\mu \varepsilon}{c} \dot{\phi} \mathbf{E}_0 &= 0\end{aligned}\right\}. \quad (3.63)$$

Nous concluons que \mathbf{E}_0 , $\nabla \phi$ et \mathbf{B}_0 forment un système orthogonal au sens trigonométrique. De (3.63) nous obtenons $-\mathbf{B}_0 = \frac{c}{\dot{\phi}} (\nabla \phi \wedge \mathbf{E}_0)$ et donc

$$\begin{aligned}\nabla \phi \wedge \left(\frac{c}{\dot{\phi}} \nabla \phi \wedge \mathbf{E}_0 \right) &= -\frac{\mu \varepsilon}{c} \dot{\phi} \mathbf{E}_0, \\ -\nabla \phi \wedge (\nabla \phi \wedge \mathbf{E}_0) &= \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \dot{\phi}^2 \mathbf{E}_0, \\ \mathbf{E}_0 (\nabla \phi)^2 &= \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \dot{\phi}^2 \mathbf{E}_0\end{aligned}$$

ou

$$(\nabla \phi)^2 = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \dot{\phi}^2 \quad (3.64)$$

(3.64) est l'équation de l'eikonal (ϕ est l'eikonal de l'optique géométrique).

Dans la plupart des applications, ε et μ sont indépendants du temps. Dans ce cas, l'onde a une fréquence constante,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{x}) - \omega t.$$

Avec $n^2 = \varepsilon \mu$, l'équation de l'eikonal mène alors à

$$(\nabla \chi)^2 = \frac{n^2(\omega) \omega^2}{c^2}. \quad (3.65)$$

Ceci est l'équation de base de l'optique géométrique. Les surfaces définies par $\chi(\mathbf{x}) = \text{constante}$ sont les surfaces de phase constante, les "fronts géométriques" de l'onde.

Les rayons de lumière

Les moyennes temporelles des densités d'énergie électrique et magnétique sont

$$\begin{aligned}\langle u_e \rangle &= \frac{\varepsilon}{16\pi} \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^* \\ \langle u_m \rangle &= \frac{1}{16\pi\mu} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0^*.\end{aligned}$$

Avec (3.63) on trouve [en utilisant $\mathbf{B}_0^* \cdot (\nabla\chi \wedge \mathbf{E}_0) = \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{B}_0^* \wedge \nabla\chi)$]

$$\langle u_e \rangle = \frac{c/\omega}{16\pi\mu} \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{B}_0^* \wedge \nabla\chi) = \langle u_m \rangle. \quad (3.66)$$

Pour la moyenne temporelle du vecteur de Poynting, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re} [\mathbf{E}_0 \wedge \mathbf{B}_0^*] \\ &= \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} \text{Re} [\mathbf{E}_0 \wedge (\nabla\chi \wedge \mathbf{E}_0^*)] \\ &= \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) \nabla\chi \\ &= \frac{2c^2}{n^2\omega} \langle u_e \rangle \nabla\chi\end{aligned}$$

ou, avec $\langle u \rangle \equiv \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle = 2\langle u_e \rangle$,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{n} \langle u \rangle \frac{\nabla\chi}{n\omega/c}.$$

Mais d'après l'équation de l'eikonal (3.65)

$$\hat{\mathbf{s}} \equiv \frac{\nabla\chi}{(n\omega/c)} \quad (3.67)$$

est un vecteur unitaire et

$$\langle \mathbf{S} \rangle = v_{\text{phase}} \langle u \rangle \hat{\mathbf{s}} \quad (3.68)$$

où $v_{\text{phase}} = \frac{c}{n}$ est la vitesse de phase dans le milieu. La direction $\hat{\mathbf{s}}$ est normale aux fronts géométriques de l'onde. La moyenne temporelle du vecteur de Poynting a la même direction que $\hat{\mathbf{s}}$ et son amplitude est la densité d'énergie moyenne multipliée par la vitesse de phase

Les *rayons de lumière* sont des courbes intégrales du champ vectoriel $\hat{\mathbf{s}}$; ils sont donc des trajectoires orthogonales aux surfaces $\chi = \text{constante}$. Ces courbes intégrales satisfont à l'équation

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{s}(\mathbf{x}(s)) \quad \text{ou} \quad \frac{n\omega}{c} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla\chi(\mathbf{x}(s)). \quad (3.69)$$

Comme $(d\mathbf{x}/ds)^2 = \hat{\mathbf{s}}^2 = 1$, s est le paramètre de longueur d'arc. A partir de (3.69) et (3.65), nous pouvons dériver une équation différentielle pour $\mathbf{x}(s)$ qui ne contient que $n(\mathbf{x})$, l'indice de réfraction qui est donné par les propriétés du milieu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[n \frac{dx_j}{ds} \right] &= \frac{c}{\omega} \frac{d}{ds} \left[\partial_j \chi(\mathbf{x}(s)) \right] = \frac{c}{\omega} \frac{dx_i}{ds} \cdot \partial_i \partial_j \chi = \\ &= \frac{(c/\omega)^2}{n} \partial_i \chi \cdot \partial_i \partial_j \chi = \frac{(c/\omega)^2}{2n} \partial_j [\nabla \chi]^2 = \frac{1}{2n} \partial_j n^2 = \\ &= \partial_j n. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé l'équation suivante pour les rayons lumineux:

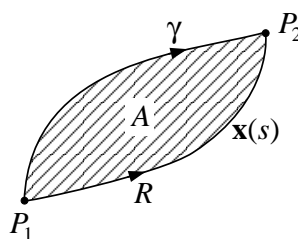
$$\frac{d}{ds} \left[n \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \right] = \nabla n. \quad (3.70)$$

Le principe de Fermat

L'énoncé du principe de Fermat est que la lumière qui arrive au point P_2 en provenance du point P_1 parcourt le chemin le long duquel l'intégral

$$\int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (3.71)$$

prend la valeur minimale, comparée aux valeurs qu'elle prendrait le long des chemins voisins avec les mêmes points de départ et d'arrivée P_1 et P_2 . Considérons un chemin γ voisin au chemin R pris par la lumière:



Comme $(\omega/c) n \hat{\mathbf{s}} = \nabla \chi$, $\nabla \wedge (n \hat{\mathbf{s}}) = (c/\omega) \nabla \wedge (\nabla \chi) = 0$. Donc $\int_A \nabla \wedge (n \hat{\mathbf{s}}) da = 0$. Mais d'après le théorème de Stokes

$$\int_A \nabla \wedge (n \hat{\mathbf{s}}) da = \int_{\gamma} n \hat{\mathbf{s}} \cdot d\mathbf{l} - \int_R n ds = 0.$$

Avec $\left| \int_{\gamma} n \hat{\mathbf{s}} \cdot d\mathbf{l} \right| \leq \int_{\gamma} n dl$ nous obtenons donc

$$\int_R n ds \leq \int_{\gamma} n dl.$$

Dans les exercices, vous démontrerez que (3.70) n'est rien d'autre que l'équation d'Euler-Lagrange pour le lagrangien donné par (3.71)

Formulation hamiltonienne

Nous montrons que l'équation de l'eikonal, $(\nabla\chi)^2 = n^2\omega^2/c^2$ peut être interprétée comme équation Hamilton-Jacobi avec $S^* = \chi - \omega t$. (Voir le cours de mécanique analytique.)

C'est-à-dire, la fonction

$$H(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \omega$$

où $\mathbf{k} = \nabla\chi$ est une fonction de Hamilton, où H est déterminée par la résolution de

$$\mathbf{k}^2 = n^2\omega^2/c^2 \quad (3.72)$$

pour la variable ω .

Nous voulons démontrer que l'équation de l'eikonal implique les équations canoniques pour (\mathbf{k}, \mathbf{x}) . A ce but, nous considérons d'abord un groupe d'ondes avec vecteur d'onde \mathbf{k} bien confiné (qui donc ne varie que faiblement). Pour le centre d'énergie, $\mathbf{x}(t)$, de l'onde, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ est la vitesse de groupe,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\partial H}{\partial\mathbf{k}} ; \quad (3.73)$$

ce qui est déjà la première équation canonique. Pour arriver à la deuxième nous utilisons que $\mathbf{k} = \nabla\chi$ et alors

$$\dot{k}_j = \frac{d}{dt}\partial_j\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^j\partial x^i}\dot{x}^i = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^j\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial k_i}. \quad (3.74)$$

Il nous reste à démontrer que $\frac{\partial^2\chi}{\partial x^j\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial k_i} = -\frac{\partial H}{\partial x^j}$. Pour arriver à ce résultat, nous dérivons d'abord l'éq. (3.72) par rapport à k_j et x^i . Ceci donne

$$2k^j = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\omega}(n^2(\omega)\omega^2)\frac{\partial H}{\partial k_j} \quad (3.75)$$

$$0 = \frac{2n\omega^2}{c^2}\frac{\partial n}{\partial x^j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\omega}(n^2(\omega)\omega^2)\frac{\partial H}{\partial x^j}. \quad (3.76)$$

Ici nous avons utilisé que (\mathbf{k}, \mathbf{x}) sont les variables indépendantes et $\omega = H(\mathbf{k}, \mathbf{x})$. Maintenant nous dérivons l'équation de l'eikonal par rapport à x^j . (Notez que dans l'équation de l'eikonal ω est juste un paramètre et χ et n ne sont des fonctions que de \mathbf{x} .):

$$2\frac{\partial\chi}{\partial x^j}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^i\partial x^j} = \frac{2n\omega^2}{c^2}\frac{\partial n}{\partial x^j}.$$

Avec éq. (3.76) ceci donne

$$2 \frac{\partial \chi}{\partial x^j} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (n^2(\omega)\omega^2) \frac{\partial H}{\partial x^j} .$$

En remplaçant $\frac{\partial \chi}{\partial x^j}$ par k_j nous obtenons avec (3.75)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (n^2(\omega)\omega^2) \frac{\partial H}{\partial k_j} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^j} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (n^2(\omega)\omega^2) \frac{\partial H}{\partial x^j} .$$

Sous l'hypothèse $\frac{\partial(n^2(\omega)\omega^2)}{\partial \omega} \neq 0$ ceci implique

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial H}{\partial k_j} = -\frac{\partial H}{\partial x^j} ,$$

ce que nous avons du démontrer. Avec (3.74) nous arrivons ainsi à la deuxième équation canonique,

$$\dot{k}_j = -\frac{\partial H}{\partial x^j} . \quad (3.77)$$

Pour $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{k}(t)$ nous avons alors les équation canoniques

$$\dot{x}^j = \frac{\partial H}{\partial k_j} , \quad \dot{k}_j = -\frac{\partial H}{\partial x^j} .$$

Exercice: En utilisant (3.75) et (3.76) on peut maintenant re-dériver l'équation (3.70) pour les raies de lumière.

Chapitre 4

Emission d'ondes électromagnétiques

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la *propagation* des ondes électromagnétiques, sans nous soucier de leur origine. Mais des équations de Maxwell, nous savons que des champs électromagnétiques sont créés par des charges et des courants. Dans ce chapitre nous montrerons comment des ondes électromagnétiques sont engendrées par des charges et des courants qui varient au cours du temps.

4.1 Zone d'onde, développement multipolaire

Dans la jauge de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$), les équations de Maxwell (avec $\mu = \varepsilon = 1$) prennent la forme [(1.55) et (1.56)]:

$$\square\phi = 4\pi\rho \quad \text{et} \quad \square\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J},$$

avec comme solution retardée (voir chap. I)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (4.1)$$

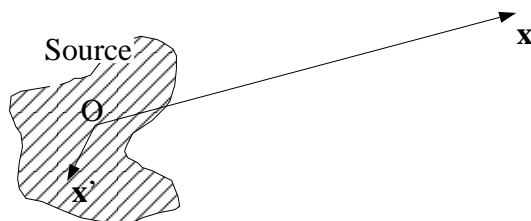
et

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (4.2)$$

Ces équations représentent des potentiels *retardés*, les solutions uniques des équations (1.55) et (1.56), qui satisfont à la condition que

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad & \text{si} \\ \rho(\mathbf{x}', t') = 0, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}', t') = 0 \quad & \forall \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3 \quad \text{avec} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < c(t - t'). \end{aligned}$$

Considérons une région finie de taille d avec des charges et des courants et déterminons l'énergie émise par cette région (qu'on appellera la source) à une grande distance:



On place l'origine des coordonnées en un point de la source. Comme $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$, on peut développer ($\mathbf{n} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $r = |\mathbf{x}|$)

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' + O(\mathbf{x}'^2/r). \quad (4.3)$$

Les termes dominants dans (4.1) et (4.2) décroissent comme $1/r$. Afin de les obtenir, nous pouvons donc remplacer le dénominateur par $1/r$. Pour le temps retardé nous utilisons l'éq. (4.3):

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} + O(\mathbf{x}'^2/rc). \quad (4.4)$$

Le dernier terme, $O(\mathbf{x}'^2/rc)$ n'est négligeable que si la variation temporelle de ρ et \mathbf{J} pendant le temps d^2/rc est petite (d est le diamètre de la source). Dans le cas d'oscillation harmonique ($\sim e^{i\omega t}$), cela signifie que

$$\frac{d^2}{rc} \ll \frac{1}{\omega}.$$

Dans le cas général ω est à remplacer par une fréquence typique de la source. La zone d'onde est définie par les conditions

$$r \gg d \quad \text{et} \quad r \gg \frac{d^2\omega}{c}. \quad (4.5)$$

Dans la zone d'onde, nous pouvons donc approximer les potentiels électromagnétiques par

$$\phi(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{r} \int \rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c}\right) d^3x' \quad (4.6)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{rc} \int \mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c}\right) d^3x'. \quad (4.7)$$

Calculons maintenant les contributions $O(1/r)$ du champ électromagnétique, en sachant que dans la limite $r \rightarrow \infty$, les termes d'ordres supérieurs ne contribuent pas à l'émission d'énergie dans le cône d'angle d'ouverture $\Delta\Omega$ donné:

$$-\nabla\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{n}}{rc} \int \dot{\rho}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c}\right) d^3x' + O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

L'équation de continuité donne [$t' \equiv t - r/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c$]

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}', t') = -\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}', t')|_{t'} = -\nabla' \cdot \mathbf{J} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) \Big|_t + \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t)|_t,$$

où $(\dots)|_{t'}$ signifie que la dérivée est effectuée à t' constant. Le théorème de Gauss donne

$$\int \nabla' \cdot \mathbf{J} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3x' = \int_{\mathcal{S}_\infty} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}' d\Omega = 0.$$

En négligeant les termes d'ordre $1/r^2$, nous obtenons alors

$$-\nabla\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{rc^2} \mathbf{n} \int \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{J}} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3x'; \quad (4.8)$$

de plus

$$-\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{rc^2} \int \dot{\mathbf{J}} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3x'.$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla\phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{rc^2} \left[\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{n} \cdot \int \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t') d^3x' \right) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \int \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{x}', t') d^3x' \right] \\ &= \frac{1}{rc^2} \mathbf{n} \wedge \left[\mathbf{n} \wedge \int \dot{\mathbf{J}} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3x' \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

où on a utilisé la relation $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Pour \mathbf{B} , on tire de $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{rc^2} \mathbf{n} \wedge \int \dot{\mathbf{J}} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3x' + \mathcal{O}(1/r^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{B} \wedge \mathbf{n} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

et

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{rc} \int \dot{\mathbf{J}} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) d^3x'. \quad (4.11)$$

Nous remarquons que un courant \mathbf{J} qui est indépendant du temps, n'émet pas d'ondes électromagnétiques!

Considérons d'abord le cas monochromatique (oscillation harmonique):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \text{Re} [\mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}] \\ \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}) &= \int \mathbf{J}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x. \end{aligned}$$

On a donc

$$A(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{rc} \operatorname{Re} \left[\int \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\omega(t-r/c + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'/c)} d^3x' \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{rc} \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k}) \right]$$

avec $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$. Ceci donne $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}]$ avec $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k})/rc$ et donc

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}} = \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega}{c} \mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \right], \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{n}.$$

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \rangle = \mathbf{n} \frac{c}{8\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 |\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k})|^2. \quad (4.12)$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons utilisé le fait que $\langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \rangle = \langle (\mathbf{B} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{B} \rangle = \mathbf{n} \langle B^2 \rangle$ et pour $A(t) = \operatorname{Re} [Ae^{i\omega t}]$, $\langle A(t)^2 \rangle = |A|^2/2$.

L'énergie moyenne émise par unité de temps et d'angle solide $d\Omega$ dans la direction \mathbf{n} est

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega}(\mathbf{n}) = (\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n}) r^2 = \frac{1}{8\pi c^3} |\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{k})|^2 \omega^2.$$

Développement multipolaire

(Jackson, §§9.2 et 9.3)

Ici, nous supposons la validité de l'éq. (4.5) et nous supposons en plus que

$$\lambda \gg d, \quad \text{donc } T = \lambda/c \gg d/c. \quad (4.13)$$

Dans ce dernier cas, la variation temporelle de ρ et \mathbf{J} est également petite pendant le temps d/c nécessaire à la lumière pour traverser la source; c'est-à-dire que à l'intérieur de la source, le retard est un petit effet. On peut alors développer

$$\mathbf{J} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \right) = \mathbf{J} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \dot{\mathbf{J}} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) + O(d^2/\lambda^2). \quad (4.14)$$

Le premier terme donne la contribution suivante à \mathbf{A} [voir éq. (4.7)]: (Comme la source est confinée, les termes de surface sont nuls et $\int x_\ell (\nabla \cdot \mathbf{J}) = -\int (\nabla x_\ell) \cdot \mathbf{J} = -\int \mathbf{J}_\ell$.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{rc} \int \mathbf{J} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) d^3x' &= -\frac{1}{rc} \int \mathbf{x}' \left[\nabla' \cdot \mathbf{J} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) \right] d^3x' \\ &= \frac{1}{rc} \int \mathbf{x}' \dot{\rho} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) d^3x' \\ &= \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c} \right), \end{aligned}$$

où $\mathbf{P}(t) = \int \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}, t) d^3x$ est le moment dipolaire de la distribution de charge ρ . Le deuxième terme de (4.14) donne à la composante A_j la contribution suivante:

$$\begin{aligned} \frac{1}{rc^2} n_\ell \int x'_\ell J_j d^3x' &= \frac{1}{2rc^2} n_\ell \left[\int (x'_\ell J_j + x'_j J_\ell) d^3x' + \int (x'_\ell J_j - x'_j J_\ell) d^3x' \right] \\ &= \frac{1}{2rc^2} \ddot{I}_{\ell j} n_\ell + \frac{1}{rc} \dot{\mu}_{\ell j} n_\ell \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_{\ell j} &= \frac{1}{2c} \int \left[x'_\ell \dot{J}_j \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) - x'_j \dot{J}_\ell \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) \right] d^3x' \\ \ddot{I}_{\ell j} &= \int \dot{\rho} \left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} \right) x'_\ell x'_j d^3x' = - \int (\nabla' \cdot \mathbf{J}) x'_\ell x'_j d^3x' \\ &= \int J_m \partial_m (x'_\ell x'_j) d^3x' = \int (J_\ell x'_j + J_j x'_\ell) d^3x'. \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé (à des termes d'ordre supérieur près)

$$A_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{rc} \dot{P}_j \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{rc} \dot{\mu}_{\ell j} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_\ell + \frac{1}{2rc^2} \ddot{I}_{\ell j} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_\ell. \quad (4.16)$$

Si nous définissons le dipôle magnétique par

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{J}) d^3x,$$

les contributions dipolaires [les deux premiers termes de (4.16)] donnent

$$\mathbf{A}^{\text{dipole}} = \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc} \mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\mu}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (4.17)$$

Dans la contribution quadrupolaire, $\ddot{I}_{\ell j}$, nous pouvons supprimer la trace, car elle résulte en un terme parallèle à \mathbf{n} dans \mathbf{A} , qui ne contribue pas aux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} (voir 4.10). Nous posons

$$Q_{\ell j} := I_{\ell j} - \frac{1}{3} \delta_{\ell j} I_{mm}.$$

Le terme quadrupolaire donne alors

$$A_m^{\text{quadrupole}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2rc^2} \ddot{Q}_{m\ell} \left(t - \frac{r}{c} \right) n_\ell \equiv \frac{1}{2rc^2} \left(\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_m. \quad (4.18)$$

Cette contribution est en général réduite d'un facteur $\approx d\omega/c \approx d/\lambda$ par rapport au dipôle électrique. En notant \mathbf{Qn} le vecteur dont les composantes sont $Q_{m\ell} n_\ell$, nous trouvons pour les champs [voir les éqs. (4.10)]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{A}} &= \frac{1}{rc^2} \left[\ddot{\mathbf{P}} \wedge \mathbf{n} + (\ddot{\boldsymbol{\mu}} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \ddot{\mathbf{Qn}} \wedge \mathbf{n} \right] \\ \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{n} &= \frac{1}{rc^2} \left[(\ddot{\mathbf{P}} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} + (\mathbf{n} \wedge \ddot{\boldsymbol{\mu}}) + \frac{1}{2c} \left(\ddot{\mathbf{Qn}} \wedge \mathbf{n} \right) \wedge \mathbf{n} \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Les moments \mathbf{P} , $\boldsymbol{\mu}$ et \mathbf{Q} sont à évaluer au temps retardé $t - r/c$. Le rayonnement dipolaire magnétique est tiré du rayonnement dipolaire électrique en remplaçant \mathbf{E} par $-\mathbf{B}$, \mathbf{B} par \mathbf{E} et \mathbf{P} par $\boldsymbol{\mu}$.

Puissance émise

Comme avant, le vecteur de Poynting est ($\mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}$)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{B}|^2 \mathbf{n};$$

donc la puissance (puissance = énergie par seconde) émise par angle dans une direction \mathbf{n} donnée est

$$\frac{dP}{d\Omega} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) r^2 = \frac{1}{4\pi c^3} |[\dots]|^2. \quad (4.20)$$

où $[\dots]$ est l'un des crochets de (4.19). Si le dipôle électrique domine, cela donne

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{dip. él.}} = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\mathbf{P}} \wedge \mathbf{n}|^2 = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\mathbf{P}}|^2 \sin^2 \vartheta, \quad (4.21)$$

où ϑ est l'angle entre $\ddot{\mathbf{P}}$ et \mathbf{n} . Après intégration sur les angles $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, nous obtenons la puissance totale (énergie émise par unité de temps)

$$P_{\text{dip. él.}} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{P}}|^2. \quad (4.22)$$

De même, on trouve pour le dipôle magnétique

$$P_{\text{dip. magn.}} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2. \quad (4.23)$$

Un petit calcul donne le résultat suivant pour le rayonnement quadrupolaire électrique (voir exercice):

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{\text{quad. él.}} = \frac{1}{16\pi c^5} [\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{km} n_\ell n_m - \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{sm} n_s n_\ell n_k n_m];$$

l'intégration sur les angles donne

$$P_{\text{quad. él.}} = \frac{1}{20c^5} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} \equiv \frac{1}{20c^5} |\ddot{\mathbf{Q}}|^2. \quad (4.24)$$

Si on intègre (4.20) sur les angles, tous les termes mixtes disparaissent et on obtient la somme de (4.22), (4.23) et (4.24):

$$P = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{P}}|^2 + \frac{2}{3c^3} |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 + \frac{1}{20c^5} |\ddot{\mathbf{Q}}|^2. \quad (4.25)$$

4.2 Le champ des dipôles

(Voir Jackson 9.2,9.3)

Considérons une petite distribution de charges et de courants de diamètre d ; nous supposons que

$$r \gg d \quad \text{et} \quad \lambda \gg d \quad (4.26)$$

sans faire aucune hypothèse sur la relation entre λ et r comme en (4.5) et (4.13). La deuxième des conditions (4.26) coïncide avec (4.13) et nous pouvons donc développer le retard dans la source comme

$$\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \approx \rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c}\right) \approx \rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{c} \dot{\rho}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right).$$

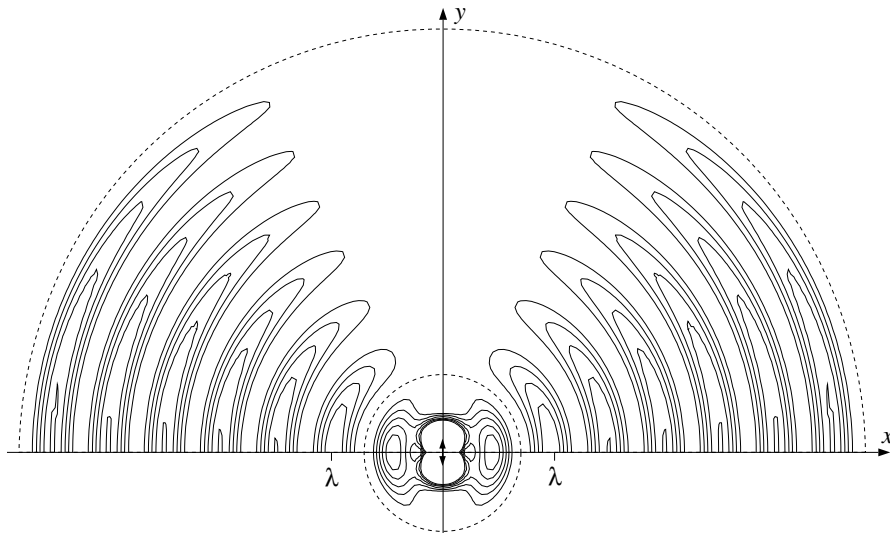
Au premier ordre en d/r et $d/\lambda \approx (d/c)\partial_t$, nous obtenons pour l'intégrand de (4.1):

$$\frac{\rho(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{r} \rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{r^2} \rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'}{rc} \dot{\rho}\left(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c}\right). \quad (4.27)$$

Le deuxième terme de (4.27) est nouveau. Il ne contribue pas à l'émission de rayonnement. A très grande distance il est d'un ordre d/r plus petit que le premier et le 3ème terme est d'un facteur d/λ plus petit que le premier.

Si Q est la charge totale et \mathbf{P} , comme avant, le moment dipolaire, nous trouvons pour le potentiel scalaire [avec (4.1) et (4.27)]

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{rc} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (4.28)$$



Courbes $r^2\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{x}) \rangle = \text{cste}$ représentées dans le plan (x, y) pour un dipôle électrique orienté dans la direction y .

Le potentiel vecteur est obtenu en remplaçant dans (4.27) ρ par $-\mathbf{J}/c$ et en utilisant (4.15)

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{r^2} \mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\mu} \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{rc} \mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\mu}} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (4.29)$$

(Pour obtenir (4.29), les mêmes astuces qui ont mené à (4.15) ont été appliquées).

Nous calculons les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} dans le cas où $Q = 0$ et $\boldsymbol{\mu}$ est négligeable. Une telle configuration s'appelle un *dipôle de Hertz*. En définissant le *vecteur de Hertz*,

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{r} \mathbf{P} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (4.30)$$

nous trouvons pour un dipôle de Hertz

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{Z}}. \quad (4.31)$$

On peut alors déterminer les champs $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$. On trouve après un petit calcul:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\mathbf{n} \wedge \left(\frac{1}{rc^2} \ddot{\mathbf{P}} + \frac{1}{r^2c} \dot{\mathbf{P}} \right) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{rc^2} \left[(\ddot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \ddot{\mathbf{P}} \right] + \frac{1}{r^2c} \left[3(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \dot{\mathbf{P}} \right] + \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{P}] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Partout \mathbf{P} , $\dot{\mathbf{P}}$ et $\ddot{\mathbf{P}}$ sont à évaluer au temps retardé $t - r/c$. Le dernier terme est le champ d'un dipôle électrique *statique* que vous connaissez de l'électrostatique. Si nous considérons une dépendance temporelle harmonique ($\sim e^{i\omega t}$) nous avons

$$\left| \frac{1}{c} \dot{\mathbf{P}} \right| \approx \frac{\omega}{c} |\mathbf{P}| \approx \frac{1}{\lambda} |\mathbf{P}|.$$

Les trois termes du champ électrique (4.32) sont alors dans les rapports

$$\frac{1}{r\lambda^2} : \frac{1}{r^2\lambda} : \frac{1}{r^3}.$$

Dans la *zone proche*, $r \ll \lambda$, le dernier terme domine et $|\mathbf{B}| \ll |\mathbf{E}|$: c'est le champ d'un *dipôle statique*. Dans la *zone d'induction*, $r \approx \lambda$, \mathbf{B} est du même ordre de grandeur que \mathbf{E} . Dans cette zone \mathbf{B} est engendré par le courant de déplacement $\dot{\mathbf{E}}$. Dans la *zone d'onde*, $r \gg \lambda$, les termes d'ordre $1/r$ du paragraphe précédent dominant (voir figure).

4.3 Le champ d'une charge ponctuelle en mouvement

(Voir Jackson Chap. 14)

Ici nous déterminons le champ d'une charge ponctuelle en mouvement. Le résultat est important pour les accélérateurs de particules et pour l'astrophysique (rayonnement synchrotron). Nous considérons une charge ponctuelle e qui parcourt le chemin $\mathbf{z}(t)$. Les densités de charge et de courant sont données par

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= e\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= e\dot{\mathbf{z}}(t)\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}(t)) \end{aligned} \right\}. \quad (4.33)$$

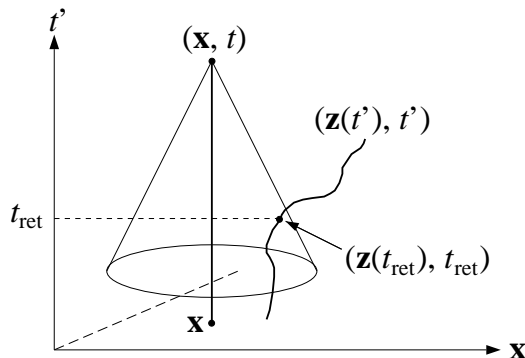
Comme ces sources sont des distributions, les potentiels (4.1) et (4.2) sont aussi des distributions et on peut démontrer mathématiquement et rigoureusement que les convolutions (4.1) et (4.2) existent. Le calcul suivant est formel.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= e \int \frac{\delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c - t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta^{(3)}(\mathbf{x}' - \mathbf{z}(t')) d^3x' dt' \\ &= e \int \frac{\delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')|/c - t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')|} dt', \end{aligned} \quad (4.34)$$

et de même

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{\dot{\mathbf{z}}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')|} \delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')|/c - t') dt'. \quad (4.35)$$

La fonction $f(t') = t' + |\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')|/c - t$ n'a qu'un zéro, $t_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$, ce qui suit du dessin suivant:



$c(t - t_{\text{ret}}) = |\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_{\text{ret}})|$
 Donc $\mathbf{z}(t)$ perce le cône de lumière de (\mathbf{x}, t) seulement une fois. Sinon, la particule avancerait plus vite que c !

En utilisant la relation (voir méthodes math. II)

$$\int g(y)\delta(f(y))dy = \frac{g(y_0)}{|f'(y_0)|}$$

pour une fonction avec un seul zéro y_0 . Lorsque $|\dot{\mathbf{z}}| < c$, la dérivée

$$f'(t')|_{t'=t_{\text{ret}}} = 1 - \frac{\dot{\mathbf{z}}_{\text{ret}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}})}{c|\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}}|} > 0,$$

et la fonction f est donc monotone, ce qui démontre de façon mathématique qu'elle n'a qu'un seul zéro. Pour les potentiels nous obtenons alors

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}}|} \frac{1}{1 - \frac{\dot{\mathbf{z}}_{\text{ret}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}})}{c|\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}}|}};$$

et donc

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}}| - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{z}}_{\text{ret}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}})} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{e\dot{\mathbf{z}}_{\text{ret}}}{c|\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}}| - \dot{\mathbf{z}}_{\text{ret}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}_{\text{ret}})}. \quad (4.37)$$

Ici \mathbf{z}_{ret} signifie $\mathbf{z}(t_{\text{ret}})$ où t_{ret} est déterminé *implicitement* par $f(t_{\text{ret}}) = 0$, c'est-à-dire par l'équation

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t_{\text{ret}})|.$$

(4.36) et (4.37) sont les *potentiels de Liénard et Wiechert*.

On pourrait maintenant calculer les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} à partir de (4.36) et (4.37), mais ceci est compliqué car ϕ et \mathbf{A} dépendent de \mathbf{x} et de t à travers \mathbf{z}_{ret} . Il est plus simple d'utiliser les expressions originales, (4.34) et (4.35). Nous posons

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{z}}}{c}, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')| \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')}{R}.$$

Pour $f(t') = t' - t + R(\mathbf{x}, t')/c$, nous utilisons que $|\boldsymbol{\beta}| < 1$, $|\mathbf{n}| = 1$ et donc

$$\kappa := \frac{df}{dt'} = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} > 0.$$

Avec ces définitions, nous avons que

$$\begin{bmatrix} \phi(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix} = e \int \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\beta}(t') \end{bmatrix} \frac{1}{R(t')} \delta(f(t')) dt'. \quad (4.38)$$

Le membre de droite de (4.38) ne dépend de \mathbf{x} que par R et de t que par f . En utilisant $\nabla = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial R}$, nous trouvons donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= e \int \left[\frac{1}{R^2} \mathbf{n} \delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) + \frac{(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{n})}{Rc} \delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) \right] dt' \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= e \int (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}) \left[-\frac{1}{R^2} \delta \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) + \frac{1}{Rc} \delta' \left(t' + \frac{R}{c} - t \right) \right] dt'. \end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned}
 \delta(f(t')) &= \frac{1}{|f'(t_{\text{ret}})|} \delta(t' - t_{\text{ret}}) = \frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \delta(t' - t_{\text{ret}}) = \frac{1}{\kappa} \delta(t' - t_{\text{ret}}) \\
 \int \underbrace{\delta'(f(t'))}_{\tau} g(t') dt' &= \int \delta'(\tau) g(t'(\tau)) \frac{d\tau}{f'(t'(\tau))}, \quad dt' = \frac{d\tau}{d\tau/dt'} = \frac{d\tau}{f'} \\
 &= - \int \delta(\tau) \frac{d}{d\tau} \left(\frac{g(t'(\tau))}{f'(t'(\tau))} \right) d\tau = - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{g(t'(\tau))}{f'(t'(\tau))} \right) \Big|_{\tau=0} \\
 &= - \left[\frac{1}{f'(t')} \frac{d}{dt'} \left(\frac{g(t')}{f'(t')} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}} = - \left[\frac{1}{\kappa(t')} \frac{d}{dt'} \left(\frac{g(t')}{\kappa(t')} \right) \right]_{t'=t_{\text{ret}}},
 \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= e \left[\frac{1}{\kappa R^2} \mathbf{n} + \frac{1}{\kappa c} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}} \\
 \mathbf{B} &= e \left[\frac{1}{\kappa R^2} \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{n} + \frac{1}{\kappa c} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{n}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}}.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Pour évaluer les dérivées par rapport à t' nous utilisons

$$\frac{dR}{dt'} = -\dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{n} = -c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n},$$

et

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \mathbf{n} = -\frac{\boldsymbol{\beta}}{R} - \frac{\mathbf{n}}{cR} \frac{dR}{dt'} = \frac{1}{R} [-\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})] = \frac{1}{R} \mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta}).$$

Cela conduit à

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) + \frac{1}{\kappa^2 R^2} \underbrace{\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\beta})}_{-\boldsymbol{\beta} + \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right].$$

En utilisant

$$\frac{\mathbf{n}}{\kappa R^2} = \frac{\kappa \mathbf{n}}{\kappa^2 R^2} = \frac{\mathbf{n} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}{\kappa^2 R^2},$$

la somme des premier et troisième termes s'écrit plus simplement:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{\mathbf{n}}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right]_{\text{ret}}. \tag{4.40}$$

Avec des manipulations similaires, on peut trouver \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = e \left[\left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa^2 R^2} + \frac{1}{c\kappa} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa R} \right) \right) \wedge \mathbf{n} \right]_{\text{ret}}; \tag{4.41}$$

donc

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}. \quad (4.42)$$

En posant $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt'$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt'}(\kappa R) &= \underbrace{\frac{\kappa}{c} \frac{dR}{dt'}}_{-\kappa \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} - \underbrace{\frac{1}{c} R \frac{d}{dt'}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})}_{R \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}/c + [-\boldsymbol{\beta}^2 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2]} \\ &= -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \frac{R}{c}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \boldsymbol{\beta}^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \\ &= \boldsymbol{\beta}^2 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \frac{R}{c}(\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}). \end{aligned}$$

La substitution de ce résultat dans (4.40) donne après un petit calcul:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = e \left[(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \frac{(1 - \boldsymbol{\beta}^2)}{\kappa^3 R^2} \right]_{\text{ret}} + \frac{e}{c} \left[\frac{1}{\kappa^3 R} \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right]_{\text{ret}}. \quad (4.43)$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont maintenant déterminés explicitement par (4.43) et (4.42).

Le premier terme de (4.43) est un champ coulombien déformé, un effet purement cinématique. Ce champ est obtenu par la transformation de Lorentz d'un champ coulombien et il décroît comme $1/R^2$. Le deuxième terme qui contient un facteur $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ est nouveau. Il ne décroît que comme $1/R$ et sa contribution au vecteur de poynting donne l'émission (elle décroît comme $1/R^2$ donc $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})R^2$ reste fini pour $R \rightarrow \infty$). Avec $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$, la contribution à $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ qui domine à très grande distance de la particule est alors

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})R^2 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 R^2 = \frac{e^2}{4\pi c} \left[\frac{1}{\kappa^6} \left| \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2 \right]_{\text{ret}}. \quad (4.44)$$

Le vecteur à l'intérieur de $|\dots|$ indique la direction du champ \mathbf{E} (à grande distance).

Nous considérons d'abord la *limite de petite vitesse*, $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$. Alors $\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{n}$ et $\kappa \approx 1$. Pour la puissance émise dans un angle solide $d\Omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})R^2 = \frac{e^2}{4\pi c} |\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta \quad (|\boldsymbol{\beta}| \ll 1). \end{aligned} \quad (4.45)$$

La puissance totale est donc l'intégrale de (4.45) sur les angles $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$,

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (4.46)$$

C'est la *formule de Larmor*.

Pour la discussion du cas général ($v \lesssim c$), il faut se rendre compte que (4.44) donne le flux d'énergie par unité de temps t dans la direction \mathbf{n} . Cette radiation a été émise au temps $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c$. Si nous nous intéressons au rayonnement *émis* dans l'intervalle de temps $T_1 \leq t_{\text{ret}} \leq T_2$, nous obtenons pour l'énergie reçue par l'observateur

$$W = \int_{T_1+R(T_1)/c}^{T_2+R(T_2)/c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) R^2 dt = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) R^2 \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} dt_{\text{ret}}.$$

La puissance angulaire *émise* est alors

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) R^2 \frac{dt}{dt_{\text{ret}}};$$

avec $t = t_{\text{ret}} + R(t_{\text{ret}})/c$, nous obtenons

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = \kappa$$

et en utilisant l'éq. (4.44) il vient

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \left| \mathbf{n} \wedge \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2. \quad (4.47)$$

Il est possible (mais un peu pénible) d'intégrer cette formule sur les directions avec le résultat

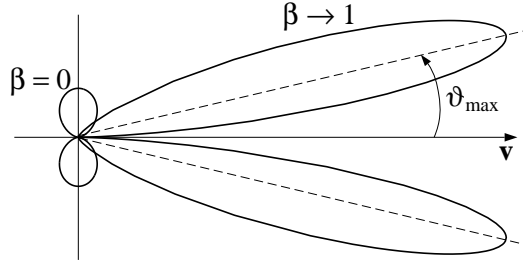
$$\begin{aligned} P &= \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \left[|\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - (\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right] \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

C'est la *formule de Larmor relativiste*. C'est cet effet qui est responsable des énormes pertes dans les accélérateurs comme par exemple au CERN.

L'exemple le plus simple qu'on peut considérer est le mouvement *rectiligne* pour lequel $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ est parallèle à $\boldsymbol{\beta}$. Dans cette situation, $\cos \vartheta = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}$ est constant et $\boldsymbol{\beta} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$. L'équation (4.47) donne alors

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos \vartheta)^5}. \quad (4.49)$$

A cause de la puissance 5 au dénominateur le rayonnement est très concentré vers l'avant pour $|\boldsymbol{\beta}|$ proche de 1.



L'angle pour lequel le rayonnement est maximal est donné par ($\beta \equiv |\boldsymbol{\beta}|$)

$$\cos \vartheta_{\max} = \left[\frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right) \right] \quad \vartheta_{\max} \approx \frac{1}{2\gamma} \quad \text{pour } \beta \rightarrow 1.$$

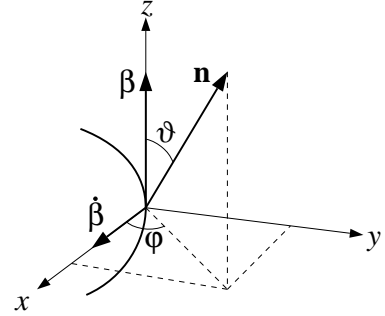
Pour les petits angles, $\vartheta \ll 1$, on obtient pour $\beta \rightarrow 1$:

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{8 e^2}{\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \gamma^8 \frac{(\gamma\vartheta)^2}{[1 + (\gamma\vartheta)^2]^5}. \quad (4.50)$$

Pour la puissance, l'intégrale de (4.49) donne

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \gamma^6 \quad (\text{mouvement rectiligne}). \quad (4.51)$$

Comme deuxième exemple, nous considérons une particule en mouvement circulaire, c'est-à-dire avec $\dot{\boldsymbol{\beta}} \perp \boldsymbol{\beta}$. Soit $\boldsymbol{\beta}$ parallèle à l'axe z et $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ parallèle à x comme ci-contre. L'équation (4.47) donne (après un exercice trigonométrique)



$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \frac{1}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \vartheta)^2} \right]. \quad (4.52)$$

Pour $\beta \rightarrow 1$, nous obtenons de nouveau un rayonnement concentré en avant (voir figure). Pour les petits angles, $\vartheta \ll 1$, et grandes vitesses, $\beta \approx 1$, on obtient

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{2e^2}{\pi c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \frac{\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \vartheta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2 \vartheta^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \gamma^2 \vartheta^2)^2} \right]. \quad (4.53)$$

Pour la puissance totale l'éq. (4.48) donne

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \gamma^4 \quad (\text{mouvement circulaire}). \quad (4.54)$$

Pour un mouvement circulaire de rayon ρ et de fréquence angulaire ω , on a $|\dot{\mathbf{v}}| = v^2/\rho = v\omega$ et donc

$$P = \frac{2e^2}{3} \frac{c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4 = \frac{2e^2}{3c} \omega^2 \beta^2 \gamma^4. \quad (4.55)$$

Le facteur γ^4 mène aux pertes énormes du synchrotron.

Exemple numérique: Pour le LEP au CERN, $\rho \approx 5$ km. L'énergie finale d'un électron était d'environ

$$E_{\text{él.}} \approx 100 \text{ GeV} \Rightarrow \gamma_{LEP} = \frac{E_{\text{él.}}}{\underbrace{mc^2}_{0.5 \text{ MeV}}} \approx 2 \times 10^5.$$

Donc $v \approx c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s et $\beta \approx 1$. La fréquence est $\omega = v/\rho \approx 6 \times 10^4$ s⁻¹. La charge de l'électron peut être exprimée comme $e^2 = m_e r_e c^2 \approx 0.5 \text{ MeV} \times 2.8 \times 10^{-13}$ cm, ce qui donne

$$\frac{2e^2}{3c} \approx 3 \times 10^{-24} \text{ MeV s}.$$

Pour la puissance totale (4.55) donne alors

$$\begin{aligned} P &= 3 \times 10^{-24} \text{ MeV s} \times (6 \times 10^4 \text{ s}^{-1})^2 \times (2 \times 10^5)^4 \approx 2 \times 10^7 \text{ MeV/s} \\ &\approx 3 \times 10^{-6} \text{ J/s} \quad \text{par électron!} \end{aligned}$$

(1 J = 6.242 × 10¹² MeV.) Comme $\gamma = E/mc^2$, pour une énergie fixée, les pertes sont moins importantes si la particule accélérée est plus lourde. C'est pourquoi, les particules qui sont accélérées dans la nouvelle machine, l'LHC qui arrive à des énergies de 13 TeV, sont des protons ($m_p c^2 \simeq 938 \text{ MeV}$) et non des électrons. Avec ceci, $\gamma_{LHC} \simeq 1.4 \times 10^4$ est environ 15 fois plus faible que γ_{LEP} et les pertes sont réduites d'un facteur 5×10^4 par particule.

4.4 Le rayonnement Cherenkov

(Jackson §13.5)

Une particule libre dans le vide (non accélérée) ne rayonne pas ($\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$). Mais une particule de vitesse constante dans un milieu rayonne si sa vitesse est supérieure à la vitesse de la lumière dans ce milieu. Ce rayonnement a été découvert par Cherenkov en 1934 et expliqué théoriquement par Frank et Tamm en 1937. (En 1958, ces trois physiciens ont obtenu le prix Nobel pour ces travaux.) Le rayonnement Cherenkov a une très grande importance pratique, surtout pour l'identification et le comptage des particules élémentaires de haute énergie (compteur Cherenkov).

Ici nous ne discutons que les aspects élémentaires de la théorie de Frank et Tamm (pour une discussion plus approfondie, voir Jackson). Nous considérons un milieu homogène et isotrope avec $\mu = 1$. Nous négligeons la dispersion, $\varepsilon(\omega) = \varepsilon = \text{constante}$. Soit une petite source en mouvement rectiligne à vitesse constante v dans la direction x . Les densités de charge et de courant sont:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \rho_0(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (v, 0, 0).\end{aligned}$$

Les équations de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, & \nabla \wedge \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}}.\end{aligned}\tag{4.56}$$

Avec $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$, nous obtenons de (4.56)

$$\Delta\phi + \frac{1}{c} \nabla \cdot \dot{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{A}} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c} \dot{\phi}) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

Nous utilisons la ‘‘jauge de Lorentz’’, $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{c} \dot{\phi} = 0$, ce qui donne

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon}{c^2} \partial_t^2\right) \phi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho; \quad \left(\Delta - \frac{\varepsilon}{c^2} \partial_t^2\right) \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.\tag{4.57}$$

La vitesse de phase est alors $c/n = c/\sqrt{\varepsilon}$ où n est l’indice de réfraction. Comme les sources sont des fonctions des variables $x - vt$, y et z , nous faisons le même Ansatz pour ϕ et \mathbf{A} :

$$\phi, \mathbf{A} \sim f(x - vt, y, z).$$

Les dérivées par rapport au temps sont $\partial_t f = -v \partial_x f$ et $\partial_t^2 f = v^2 \partial_x^2 f$. Avec $J_y = J_z = 0$, nous obtenons

$$\left(\Delta - \frac{n^2 v^2}{c^2} \partial_x^2\right) A_{y,z} = 0.$$

En cherchant des solutions qui décroissent à l’infini, $|\mathbf{A}(\mathbf{x})| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$, nous posons $A_y = A_z = 0$. Pour A_x et ϕ nous avons

$$\left[\left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}\right) \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right] A_x = -\frac{4\pi}{c} \rho v\tag{4.58}$$

$$\left[\left(1 - \frac{n^2 v^2}{c^2}\right) \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right] \phi = -\frac{4\pi}{n^2} \rho.\tag{4.59}$$

La condition de Lorentz, $\partial_x A_x - \frac{n^2}{c} v \partial_x \phi = 0$ et (4.58) sont satisfaites avec (4.59) et

$$A_x = \frac{n^2}{c} v \phi. \quad (4.60)$$

Il reste l'équation (4.59). Avec $\beta := nv/c = v/v_{\text{phase}}$, nous l'écrivons comme

$$[(1 - \beta^2)\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2] \phi = -\frac{4\pi}{n^2} \rho. \quad (4.61)$$

Pour $\beta < 1$, cette équation est elliptique. Sa solution est un potentiel coulombien contracté dans la direction x . A $\beta = 1$, le caractère de l'équation change et elle devient hyperbolique pour $\beta > 1$. C'est ce dernier cas que nous voulons examiner.

Soit $\beta > 1$. Lors de la transformation de variable $x \rightarrow \tau = (-x + vt)/\sqrt{\beta^2 - 1}$; $\partial_x = -1/(\sqrt{\beta^2 - 1})\partial_\tau$, l'équation (4.61) devient

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2 - \partial_\tau^2)\phi = -\frac{4\pi}{n^2} \rho_0 \left(-\tau\sqrt{\beta^2 - 1}, y, z \right). \quad (4.62)$$

C'est l'équation d'onde à deux dimensions. Dans les compléments de mathématiques, nous avons déterminé sa fonction de Green retardée qui satisfait $(\partial_y^2 + \partial_z^2 - \partial_\tau^2)G = \delta$ et $G = 0$ pour $\tau < 0$:

$$G(y, z, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau^2 - y^2 - z^2}} & \text{pour } \tau^2 > y^2 + z^2, \tau > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\rho_0(\mathbf{x}) = e\delta(\mathbf{x})$, nous avons

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{n^2} \rho_0 \left(-\tau\sqrt{\beta^2 - 1}, y, z \right) &= -\frac{4\pi e}{n^2} \delta \left(\tau\sqrt{\beta^2 - 1} \right) \delta(y)\delta(z) \\ &= -\frac{4\pi e}{n^2\sqrt{\beta^2 - 1}} \delta(\tau)\delta(y)\delta(z). \end{aligned}$$

Convoluté avec G , cela donne

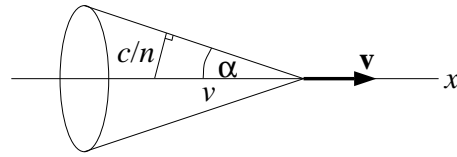
$$\phi = -\frac{4\pi e}{n^2\sqrt{\beta^2 - 1}} G,$$

c'est-à-dire

$$\phi(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{2e}{n^2} \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 - (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2)}} & \text{si } (x - vt)^2 > (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.63)$$

$$A_x = n\beta\phi, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0. \quad (4.64)$$

Nous obtenons alors une surface de discontinuité où ϕ diverge. Elle constitue un cône, le *cône de Mach*, avec angle d'ouverture $\tan \alpha = 1/\sqrt{\beta^2 - 1}$ ou $\sin \alpha = 1/\beta$.



$$\sin \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{c/n}{v} = \frac{\text{vitesse de phase des ondes}}{\text{vitesse de la particule}}.$$

Comme pour des mouvements supersoniques, α s'appelle l'angle de Mach. À l'extérieur du cône de Mach les champs s'annulent et sur le cône ils divergent. Cette singularité n'est pas physique. Elle disparaît si on tient compte de la *dispersion*. Dans le vide, cette remarque ne s'applique pas. (Une indication de plus que v ne peut être supérieur à c !)

Chapitre 5

Diffusion des ondes électromagnétiques

Si une onde électromagnétique entre dans un milieu, les charges du milieu sont accélérées par le champ de l'onde. Cette accélération engendre de nouvelles ondes, les ondes *diffusées*. Ce processus est à l'origine de la couleur rouge du soleil couchant et de la couleur bleue du ciel.

5.1 Diffusion Thomson

Si une onde plane arrive sur une particule chargée libre, elle accélère celle-ci. La particule absorbe donc une partie de l'énergie de l'onde incidente et elle émet une nouvelle onde. Nous voulons calculer la section efficace de ce processus:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{(\text{énergie émise})/(\text{temps} \times \text{angle})}{(\text{énergie incidente})/(\text{temps} \times \text{surface})} \quad (5.1)$$

est la section efficace différentielle dans la direction \mathbf{n} .

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

est la section efficace totale. Sa dimension est cm^2 . Nous considérons maintenant une onde plane diffusée par une particule non relativiste de masse m et de charge e . Le champ électrique de l'onde plane incidente (en écriture complexe) est donné par

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

où $|E_0|$ est l'amplitude, $\boldsymbol{\epsilon}$ le vecteur de polarisation et ω la fréquence angulaire. Soit $\mathbf{z}(t)$ la position de la particule au temps t . Nous avons alors

$$m\ddot{\mathbf{z}}(t) = e\mathbf{E}(\mathbf{z}, t) = eE_0 \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}(t) - \omega t)}.$$

(Nous avons supposé que $v \ll c$ et nous pouvons alors négliger la force de Lorentz, $\frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$.) A fin de calculer l'énergie émise par unité de temps d'après la formule de Larmor (4.45), $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2 \vartheta$, nous avons besoin de la moyenne temporelle $\langle \dot{\mathbf{v}}^2 \rangle$. Sous l'hypothèse que la particule bouge peu par rapport à la longueur d'onde pendant une période (ce qui est équivalent à $v \ll c$), nous obtenons

$$\langle \dot{\mathbf{v}}^2 \rangle = \langle |\text{Re}(\ddot{\mathbf{z}})|^2 \rangle = \frac{1}{2} |E_0|^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2.$$

Avec la formule de Larmor cela donne

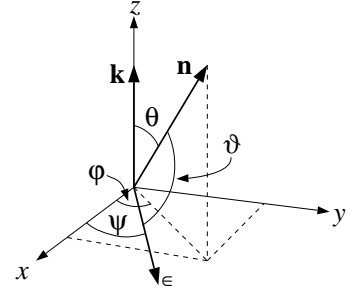
$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta$$

où ϑ est l'angle entre la direction d'observation \mathbf{n} et la direction d'accélération $\boldsymbol{\epsilon}$, $\ddot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{v}}$. Le flux d'énergie incidente par unité de surface et de temps pour une onde plane est l'amplitude moyenne du vecteur de Poynting, $|\mathbf{S}| = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2$. Cela donne

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta. \quad (5.2)$$

C'est la section efficace de Thomson. Pour une onde provenant de la direction z ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$) et avec une polarisation $\boldsymbol{\epsilon}$ dans le plan (x, y) qui fait un angle ψ avec l'axe x , nous avons (voir figure) $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, $\boldsymbol{\epsilon} = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$ et donc

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \sin \theta (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) \\ &= \sin \theta \cos(\varphi - \psi) \\ \cos^2 \vartheta &= \sin^2 \theta \cos^2(\varphi - \psi). \end{aligned}$$



Pour du rayonnement incident non polarisé, nous pouvons moyenner (intégrer) sur ψ en utilisant l'identité $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi - \psi) d\psi = \frac{1}{2}$. Nous obtenons

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (5.3)$$

où maintenant θ est l'angle entre \mathbf{n} et \mathbf{k} , donc entre la direction de l'onde incidente et la direction de l'onde diffusée. La section efficace totale de Thomson est

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 0.665 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.665 \text{ barn} \quad \text{pour un électron.} \quad (5.4)$$

La grandeur $r_e = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$ est appelée "rayon classique de l'électron". En électrodynamique quantique, on peut montrer que la formule (5.3) n'est valable qu'à basse fréquence, $\hbar\omega \ll mc^2$.

5.2 Diffusion élastique et inélastique par des charges quasiment libres

Nous traitons ici d'une façon plus générale une onde incidente sur un système de particules quasiment libres de charges $\{e_j\}$ aux positions $\{\mathbf{x}_j\}$. Comme exemple concret, on peut imaginer la diffusion de rayons X par les électrons d'un solide. L'énergie d'un photon X est beaucoup plus élevée que l'énergie de liaison des électrons dans le solide et ceux-ci peuvent donc être considérés comme libres. Comme dans le paragraphe précédent, l'onde incidente est donnée par

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}.$$

D'après (4.43), le rayonnement des sources $\{e_j\}$ est ($v_j \ll c$)

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \sum_j \frac{e_j}{R_j} \left[\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}_j) \right]_{ret}. \quad (5.5)$$

L'accélération est donnée par

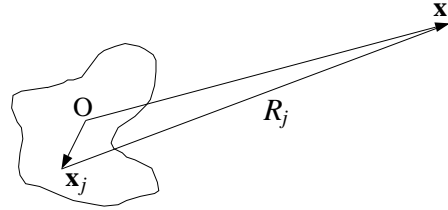
$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_j = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{v}}_j = \frac{e_j}{m_j c} E_0 \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j - \omega t)}. \quad (5.6)$$

Cela conduit à

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}, t) = E_0 [\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\epsilon})] \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} \frac{1}{R_j} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j - i\omega t_{ret}] \quad (5.7)$$

avec $t_{ret} = t - \frac{R_j}{c}$. Avec une précision suffisante ($|\mathbf{x}_j| \ll |\mathbf{x}|$), nous avons

$$\begin{aligned} R_j &= |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j| \approx |\mathbf{x}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_j \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad r = |\mathbf{x}|. \end{aligned}$$



Nous obtenons alors

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{x}, t) = E_0 [\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\epsilon})] \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \quad (5.8)$$

où $\mathbf{q} = (\omega/c)\mathbf{n} - \mathbf{k}$. Comme dans le paragraphe précédent, nous trouvons pour la section efficace

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 |\mathbf{E}_s|^2}{|E_0|^2} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j} \right|^2 \sin^2 \vartheta, \quad (5.9)$$

où ϑ est l'angle entre \mathbf{n} et $\boldsymbol{\epsilon}$. Cette formule n'est valable que si les électrons sont quasiment libres, c'est-à-dire si la fréquence de l'onde incidente est beaucoup plus élevée que les fréquences des transitions atomiques. Pour utiliser (5.9), il faut encore prendre la moyenne sur les positions \mathbf{x}_j .

Diffusion cohérente et incohérente

Nous discutons ici la formule (5.9). Les considérations qui suivent ont une importance qui va au delà de la situation présente et s'appliquent à tous les processus de diffusion, en particulier la diffusion d'un faisceau de particules car, d'après la mécanique quantique, les particules matérielles ont aussi une nature ondulatoire. La section efficace (5.9) dépend sensiblement de $|\mathbf{q}|$. Soit $a = \langle |\mathbf{x}_j| \rangle$ la dimension du système de particules. La section efficace va être très différente pour $qa \ll 1$ et pour $qa \gg 1$. Soit $\cos \theta = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})/k$, θ est alors l'angle de diffusion. Avec $\omega/c = k$ nous avons

$$q^2 = \left(\frac{\omega}{c} \mathbf{n} - \mathbf{k} \right)^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$q = 2k \sin \frac{\theta}{2}.$$

Si $ka \ll 1$, $qa \ll 1$ pour tous les angles θ . Dans la situation inverse, $ka \gg 1$, qa est petit ($qa \ll 1$) seulement si $\theta \ll \theta_c = 1/ka$ et $qa \gg 1$ pour des grands angles.

Pour $qa \ll 1$, toutes les exponentielles $e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j}$ sont très proches de 1 et (5.9) donne

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \ll 1} \approx \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} \right|^2 \sin^2 \vartheta. \quad (5.10)$$

Pour un atome avec Z électrons, cela conduit à

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \ll 1} \approx Z^2 \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta. \quad (5.11)$$

Les Z électrons agissent de façon *cohérente*, comme une particule de rayon $R = Zr_e = Ze^2/(mc^2)$. La section efficace est Z^2 fois la section efficace d'un seul électron!

Dans la limite opposée, $qa \gg 1$, les exposants en (5.9) oscillent très vite et ils ont des phases très différentes. Les termes mixtes s'annulent et seuls les termes diagonaux contribuent à la somme. Nous obtenons alors

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \gg 1} \approx \sum_j \left(\frac{e_j^2}{m_j c^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta. \quad (5.12)$$

Pour Z particules de charge e et masse m , au lieu de (5.11), cela mène à

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \gg 1} \approx Z \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta. \quad (5.13)$$

Dans ce cas, les contributions des particules se superposent de façon *incohérente*. En mécanique quantique, on calcule (modèle de Thomas-Fermi), $a \approx 1.4a_0Z^{-1/3}$ où $a_0 = \hbar^2/(me^2) = r_e/\alpha^2 \simeq 5.3 \times 10^{-9}\text{cm}$ est le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène et $\alpha = e^2/(\hbar c) \approx 1/137$ est la constante de structure fine.

Nous considérons maintenant avec plus de détails la situation de particules identiques, $e_j \equiv e$ et $m_j \equiv m \forall j$. Par exemple, les charges considérées peuvent être les électrons d'un atome de charge totale Z . Dans ce cas, (5.9) se réduit à

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\vartheta \left| \sum_{j=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} \right|^2. \quad (5.14)$$

Nous prenons la moyenne statistique du dernier facteur. Soit $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z)$ la distribution de probabilité de présence des électrons. Nous définissons le *facteur de forme*

$$F^2(\mathbf{q}) = \int \left| \sum_{j=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} \right|^2 W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^{3Z}x. \quad (5.15)$$

Nous avons alors

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Thomson}} F^2(\mathbf{q}). \quad (5.16)$$

D'après (5.15), on a (W est une probabilité, donc $\int W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^{3Z}x = 1$)

$$F^2(0) = Z^2. \quad (5.17)$$

Nous séparons (5.15) en termes diagonaux et non-diagonaux:

$$\left| \sum_{j=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} \right|^2 = Z + \sum_{j \neq m} e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_m)}.$$

Alors

$$F^2(\mathbf{q}) = Z + \sum_{j \neq m} \int e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_m)} W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^{3Z}x.$$

Nous appelons

$$W_{mj}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_j) := \int W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) \prod_{k \neq j, m} d^3x_k \quad (5.18)$$

la distribution de probabilité de présence des électrons m et j . En plus nous définissons $P(\mathbf{q})$ par

$$Z(Z-1)P(\mathbf{q}) = \sum_{j \neq m} \int e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_m)} W_{mj}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_j) d^3x_m d^3x_j. \quad (5.19)$$

On a alors

$$F^2(\mathbf{q}) = Z + Z(Z - 1)P(\mathbf{q}).$$

Evidamment $P(0) = 1$, ce qui est en accord avec (5.17).

L'intégrale dans (5.19) est proportionnelle à la transformée de Fourier de $W_{mj}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_j)$ à la position $(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6$. Le Lemme de Riemann-Lebesgue nous dit que la transformée Fourier d'une fonction continue décroît vers 0 à l'infini: $\widehat{W}_{mj} \in L^\infty$, donc $\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow \infty} \widehat{W}_{mj}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\mathbf{q}) &= 0 \\ \lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow \infty} F^2(\mathbf{q}) &= Z. \end{aligned}$$

Pour de grandes impulsions, la section efficace est donc constante et vaut Z fois la section efficace d'une seule particule. On appelle ce cas de figure le régime "profondément inélastique".

La comparaison entre la section efficace élastique et totale permet alors de déterminer le nombre de particules du diffuseur,

$$Z = \frac{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \ll 1}}{\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \gg 1}}. \quad (5.20)$$

C'est pourquoi les mesures de la section efficace des nucléons ont été interprétées comme une évidence que le nucléon est composé de trois "partons" (quarks).

C'est-à-dire, avec des expériences de diffusion, on peut étudier la structure d'un objet. En utilisant que $Z = F^2(0)/F^2(\infty)$ on peut en principe déterminer si un objet est composé ou non. Pour ceci il faut des ondes avec un nombre d'onde $k > 1/a$, si a est la dimension de l'objet. (C'est-à-dire que pour l'étude d'un objet de taille a , il faut des "photons" d'énergie $E = \hbar\omega = \hbar kc > \hbar c/a$.)

Diffusion élastique

La partie *élastique* de l'onde diffusée est celle qui a la même fréquence ω que l'onde incidente. L'onde incidente dépend du temps comme $e^{i\omega t}$. L'onde diffusée dépend en plus du facteur $\sum_j e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j}$, qui dépend du temps par les positions \mathbf{x}_j . C'est pourquoi elle contient également d'autres fréquences que la fréquence ω . Nous obtenons la partie du champ de fréquence ω en prenant la moyenne temporelle du facteur $\sum_j e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j}$. Avec (5.14) nous avons

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{élast.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Thomson}} \left| \overline{\sum_j e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j}} \right|^2. \quad (5.21)$$

Nous remplaçons la moyenne temporelle par la moyenne spatiale:

$$\overline{\sum_j e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j}} = \sum_{j=1}^Z \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_j} W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^{3Z}x = \sum_{j=1}^Z F_j^*(\mathbf{q}).$$

Ici $F_j(\mathbf{q})$ est la transformée Fourier de la densité de probabilité d'un seul électron,

$$W_j(\mathbf{x}_j) = \int W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) \prod_{k \neq j} d^3x_k,$$

et sa transformée de Fourier, ou son 'facteur de forme' est défini par

$$F_j(\mathbf{q}) = \int W_j(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3x. \quad (5.22)$$

Avec (5.21) ceci donne donc

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{élast.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Thomson}} F_{\text{élast.}}^2(\mathbf{q}), \quad (5.23)$$

$$F_{\text{élast.}}^2 = \left| \sum_{j=1}^Z F_j(\mathbf{q}) \right|^2. \quad (5.24)$$

Le "facteur de forme élastique" peut être interprété comme suit: la densité de charge des Z électrons est

$$\rho(\mathbf{x}) = e \sum_{j=1}^Z \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$$

et sa moyenne statistique est

$$\langle \rho \rangle(\mathbf{x}) = e \sum_j \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_Z) d^{3Z}x = e \sum_j W_j(\mathbf{x}), \quad (5.25)$$

D'après (5.22), la transformée de Fourier de la distribution des charges est alors $\langle \hat{\rho} \rangle(\mathbf{q}) = e \sum_j F_j(\mathbf{q})$ et donc

$$e^2 F_{\text{élast.}}^2(\mathbf{q}) = |\langle \hat{\rho} \rangle(\mathbf{q})|^2. \quad (5.26)$$

Le facteur de forme élastique est le carré de la valeur absolue de la transformée de Fourier de la densité de charge moyenne (à un facteur e^2 près). Dans la direction avant ($\theta = 0$, donc $\mathbf{q} = 0$), on a d'après (5.22) $F_{\text{élast.}}(0) = Z$: la diffusion "en avant" est cohérente

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{élast.}}(\theta = 0) = Z^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Thomson}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{total}}(\theta = 0). \quad (5.27)$$

D'après le Lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{|\mathbf{q}| \rightarrow \infty} F_{\text{élast.}}(\mathbf{q}) = 0.$$

Qualitativement cela mène à la situation esquissée dans la figure 5.1.

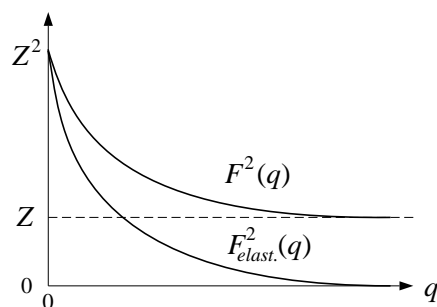


Figure 5.1: Le comportement qualitatif du facteur de forme élastique et total en fonction de $q = |\mathbf{k}\mathbf{n} - \mathbf{k}| = 2k \sin(\theta/2)$.

5.3 Diffusion dans les gaz et les liquides

(Jackson §9.7)

Ici nous analysons la situation suivante: nous considérons un milieu diélectrique homogène et isotrope avec une “constante” diélectrique $\varepsilon_0(\omega)$ qui ne dépend pas de la position \mathbf{x} . Nous considérons une onde qui se propage dans ce milieu pondéré et rencontre une inhomogénéité bien localisée du diélectrique. De cette inhomogénéité, une onde diffusée est émise. Nous voulons déterminer l’énergie émise et calculer la section efficace de ce processus. Comme applications importantes notons:

- i)* La diffusion de la lumière par des particules de poussière.
- ii)* La diffusion de la lumière par les inhomogénéités d’un gaz (théorie de Lorentz).

Généralités

Soient $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)$ les transformées de Fourier des champs par rapport au temps:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \int \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega) = \int \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt.$$

Les équations de Maxwell en l'absence de charges et de courants et sans magnétisation ($\mu = 1$) sont

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \wedge \mathbf{B} + \frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.28)$$

Dans notre situation, nous avons

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \omega) = \varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(\mathbf{x}, \omega) = 1 + 4\pi(\chi_0 + \chi_1) \quad (5.29)$$

où ε_1 est une contribution *localisée* à la fonction diélectrique. Nous représentons les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} par des potentiels:

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{A} - \nabla \varphi$$

avec la condition de jauge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \varphi = 0. \quad (5.30)$$

Les équations de Maxwell conduisent alors à

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \left(-\frac{i\omega}{c} \mathbf{A} - \nabla \varphi \right) - \frac{i\omega}{c} \underbrace{\varepsilon_1 \mathbf{E}}_{4\pi \mathbf{P}_1}$$

En utilisant notre condition de jauge cela donne

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(\omega) \right] \mathbf{A} = \frac{4\pi i\omega}{c} \mathbf{P}_1. \quad (5.31)$$

L'équation pour φ est obtenue en prenant la divergence de (5.31). Avec (5.30) cela donne

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(\omega) \right] \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}_1. \quad (5.32)$$

Si on pose

$$\mathbf{Z} = \frac{ic}{\omega \varepsilon_0} \mathbf{A}, \quad (5.33)$$

alors on a $\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{Z}$ et

$$-(\Delta + k^2) \mathbf{Z} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \mathbf{P}_1, \quad (5.34)$$

avec

$$k^2 = \frac{\omega^2 n_0^2(\omega)}{c^2}, \quad n_0^2(\omega) = \varepsilon_0(\omega).$$

Les champs \mathbf{B} et \mathbf{E} sont faciles à retrouver à partir de \mathbf{Z} :

$$\mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \nabla \wedge \mathbf{Z}, \quad \mathbf{E} = k^2 \mathbf{Z} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}). \quad (5.35)$$

Il faut noter que dans le membre de droite de (5.34), $\mathbf{P}_1 = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} \mathbf{E}$ est une fonction de \mathbf{Z} . La fonction de Green de l'opérateur de Helmholtz, $-(\Delta + k^2)$,

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (5.36)$$

C'est-à-dire, $-(\Delta + k^2)G(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x})$ et donc pour

$$\varphi_s(\mathbf{x}) = G * s(\mathbf{x}) \equiv \int d^3x' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') s(\mathbf{x}') \quad (5.37)$$

satisfait

$$-(\Delta + k^2)\varphi_s(\mathbf{x}) = - \int d^3x' (\Delta_{\mathbf{x}} + k^2)G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')s(\mathbf{x}') = \int d^3x' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')s(\mathbf{x}') = s(\mathbf{x}). \quad (5.38)$$

La solution générale de l'équation $-(\Delta + k^2)\varphi(x) = s(\mathbf{x})$ est alors $\varphi = \varphi_0 + \varphi_s$ où φ_0 est une solution homogène, $(\Delta + k^2)\varphi_0 = 0$.

Ceci nous permet de transformer (5.34) en l'équation intégrale suivante:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}^{(0)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{P}_1(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (5.39)$$

Ici $\mathbf{Z}^{(0)}$ est une solution homogène de (5.34) [c.à.d. $-(\Delta + k^2)\mathbf{Z}^{(0)} = 0$], et décrit l'onde incidente. Le deuxième terme décrit l'onde diffusée. Nous l'appelons $\mathbf{Z}^{(d)}$. A des grandes distances $|\mathbf{x}| = R$, nous approximons $\mathbf{Z}^{(d)}$ par

$$\mathbf{Z}^{(d)}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikR}}{\varepsilon_0 R} \int \mathbf{P}_1(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} d^3x' = \frac{e^{ikR}}{\varepsilon_0 R} \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{k}') \quad (5.40)$$

avec $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ et $\mathbf{k}' = k\mathbf{n}$. Ici $\tilde{\mathbf{P}}_1$ est la transformée de Fourier de \mathbf{P}_1 ,

$$\tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{k}') = \int \mathbf{P}_1(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} d^3x'. \quad (5.41)$$

En utilisant les relations $\nabla (e^{ikR}/R) \approx ik\mathbf{n}e^{ikR}/R + \mathcal{O}(R^{-2})$, et $\nabla \wedge (e^{ikR}\mathbf{V}/R) \approx ik\mathbf{n} \wedge \mathbf{V}e^{ikR}/R + \mathcal{O}(R^{-2})$ pour un vecteur \mathbf{V} quelconque, nous obtenons les champs diffusés

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}^{(d)} &= \frac{k^2}{n_0} \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{k}') \\ \mathbf{E}^{(d)} &= \frac{k^2}{n_0^2} \frac{e^{ikR}}{R} \left(\mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{k}') \right) \wedge \mathbf{n} = \frac{1}{n_0} (\mathbf{B}^{(d)} \wedge \mathbf{n}) \end{aligned} \right\}. \quad (5.42)$$

Nous considérons maintenant les champs $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \omega)$ comme les amplitudes d'ondes de fréquence ω donnée. En ajoutant le facteur $e^{-i\omega t}$, nous obtenons avec $t_{ret} := t - R/(\frac{c}{n_0})$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}^{(d)} &= \frac{k^2}{Rn_0} \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{k}', t_{ret}) \\ \mathbf{E}^{(d)} &= \frac{1}{n_0} \mathbf{B}^{(d)} \wedge \mathbf{n} \end{aligned} \right\}. \quad (5.43)$$

Nous voulons déterminer l'intensité de l'onde diffusée polarisée selon $\boldsymbol{\epsilon}'$, avec $\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{k}' = 0$. Cela donne

$$\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{E}^{(d)} = \frac{1}{R} \frac{k^2}{n_0^2} \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \tilde{\mathbf{P}}_1. \quad (5.44)$$

Le vecteur de Poynting de la partie de l'onde avec polarisation $\boldsymbol{\epsilon}'$ est

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} n_0 |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{E}^{(d)}|^2 \mathbf{n} = \frac{1}{R^2} \frac{c}{4\pi} n_0 \left(\frac{k^2}{n_0^2} \right)^2 |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \tilde{\mathbf{P}}_1|^2 \mathbf{n}.$$

L'intensité de l'onde diffusée est alors (la moyenne temporelle est prise !)

$$\frac{dI}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \langle |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \tilde{\mathbf{P}}_1|^2 \rangle = \frac{n_0 \omega^4}{4\pi c^3} \langle |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \tilde{\mathbf{P}}_1|^2 \rangle. \quad (5.45)$$

Diffusion des ondes de grande longueur d'onde

Supposons que la longueur d'onde λ de l'onde incidente soit beaucoup plus grande que la dimension de l'inhomogénéité. Dans cette situation, nous pouvons remplacer par 1 le facteur exponentiel dans la définition de $\tilde{\mathbf{P}}_1$. C'est l'*approximation dipolaire*,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{n_0}{4\pi c^3} \omega^4 \langle |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathcal{P}_1|^2 \rangle \\ \mathcal{P}_1 &= \int \mathbf{P}_1(\mathbf{x}') d^3 x'. \end{aligned} \quad (5.46)$$

L'intensité est alors proportionnelle à $\omega^4 \propto \lambda^{-4}$.

Conséquences: La lumière bleue est beaucoup plus diffusée que la lumière rouge. C'est pour cette raison que le ciel apparaît bleu et le soleil couchant, qui a perdu toutes ses composantes de longueur d'onde inférieures au rouge, apparaît rouge.

Approximation de Born

Comme assez bonne approximation, on peut substituer dans (5.41)

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}') = \frac{\varepsilon_1(\mathbf{x}')}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}') \approx \frac{\varepsilon_1(\mathbf{x}')}{4\pi} \mathbf{E}_0(\mathbf{x}') \quad (5.47)$$

où $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}')$ est le champ incident. En posant $\mathbf{E}_0(\mathbf{x}') = E_0 \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t)}$, une onde plane linéairement polarisée dans la direction $\boldsymbol{\epsilon}$ ($\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$), nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{P}}_1(\mathbf{k}') = \int \frac{\varepsilon_1(\mathbf{x}')}{4\pi} E_0 \boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t)} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} d^3 x' = \frac{E_0}{4\pi} \boldsymbol{\epsilon} \tilde{\varepsilon}_1(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{-i\omega t}, \quad (5.48)$$

et pour la section efficace d'émission avec polarisation $\boldsymbol{\epsilon}'$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Born}} = \frac{dI}{d\Omega} \left(\frac{1}{\frac{c}{4\pi}n_0|E_0|^2}\right) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}|^2 |\tilde{\varepsilon}_1(\mathbf{k}' - \mathbf{k})|^2.$$

Dans l'approximation dipolaire ($|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \ll 1/d$ pour une inhomogénéité de taille d), cela donne

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{dip.}} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon}|^2 \left| \int \varepsilon_1(\mathbf{x}') d^3x' \right|^2. \quad (5.49)$$

Après intégration sur toutes les directions $\boldsymbol{\epsilon}$ (ce qui donne un facteur $4\pi/3$) et sommation sur les deux polarisations finales (facteur 2), nous obtenons la section efficace totale (en approximation dipolaire):

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left| \int \varepsilon_1(\mathbf{x}') d^3x' \right|^2. \quad (5.50)$$

Nous appliquons maintenant ce résultat général à un gaz qui présente de petites fluctuations statistiques de densité. Pour un gaz avec N_V atomes dans un petit volume V ($V^{1/3} \ll \lambda$), on a

$$\varepsilon(\omega) - 1 \approx 4\pi\alpha(\omega) \frac{N_V}{V}$$

où $\alpha(\omega)$ est la polarisabilité moléculaire. Pour une fluctuation ΔN_V du nombre d'atomes, cela donne (d'après 5.50) une section efficace

$$\sigma \approx \frac{1}{6\pi} (4\pi\alpha)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \langle (\Delta N_V)^2 \rangle. \quad (5.51)$$

Cette diffusion lors des inhomogénéités dans un gaz est appelée diffusion de *Rayleigh*. Pour une distribution aléatoire des particules (non corrélées), la moyenne statistique, $\langle (\Delta N_V)^2 \rangle$ est proportionnelle à V et $\sigma/V = S$, le *coefficient de diffusion*, est indépendant du volume. Einstein a utilisé ce résultat pour déterminer le nombre d'Avogadro (voir A. Einstein, Collected Papers Vol 3, p. 287, 1910).

5.4 Diffraction

(Jackson §9.8)

Toute déviation d'un rayon de lumière de son chemin optique est appelée *diffraction*. Dans la limite de l'optique géométrique, un corps illuminé crée une ombre

précise. A des longueurs d'onde suffisamment grandes, ou pour des corps suffisamment petits, cette approximation n'est plus valable. Les phénomènes de diffraction sont entièrement clarifiés par la nature ondulatoire de la lumière, mais il s'agit d'un problème avec des conditions aux bords non triviales. Il faut résoudre les équations de Maxwell pour des sources données et des conditions aux bords sur les écrans et à l'infini.

Ici nous ne discutons que l'approximation de Kirchhoff. De plus, nous faisons les simplifications suivantes, qui ne sont pas essentielles:

i) Nous utilisons une équation d'onde *scalaires*

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)u = 0, \quad (5.52)$$

qui est supposée valable partout hors de la source et des écrans. (Chaque composante des champs électrique et magnétique satisfait cette équation). Nous supposons aussi que les effets dispersifs du milieu sont négligeables: $\varepsilon = \mu = 1$.

ii) Nous considérons de la lumière monochromatique,

$$u = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}.$$

L'équation (5.52) se réduit alors à

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (5.53)$$

L'approximation de Kirchhoff

La 2^{ème} formule de Green est (D , un ouvert, $u, v \in C^2(D)$)

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v)d^3x = \int_{\partial D} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma.$$

(Ceci est une simple conséquence de la loi de Gauss:

$$\int_D \nabla \cdot \mathbf{W} = \int_{\partial D} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}d\sigma \quad \text{avec} \quad W_i = v\partial_i u - u\partial_i v.)$$

Si nous appliquons cette formule à une solution u de l'équation (5.53) et pour

$$v(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

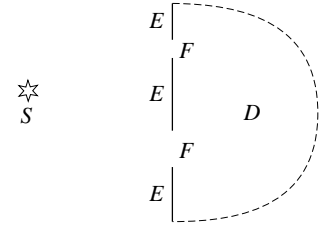
$$(\Delta_{\mathbf{x}} + k^2)G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

la fonction de Green de l'opérateur de Helmholtz, $\Delta + k^2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma &= \int_D [vk^2u + u\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - k^2vu] d^3x \\ &= \begin{cases} u(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in D \\ 0 & \mathbf{y} \notin D \end{cases} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Si nous connaissons les conditions aux bords $u(\mathbf{x})$ et $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial D$, nous pourrions alors trouver la solution $u(\mathbf{y})$ dans D .

Dans les problèmes de diffraction, on détermine l'influence des écrans (E) non transparents et des ouvertures (fentes, F) sur la propagation de la lumière.



L'approximation de Kirchhoff consiste à supposer que

$$\left. \begin{aligned} u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \quad \text{sur le dos des écrans } E \\ u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial n} & \quad \text{dans les fentes } F \end{aligned} \right\}, \quad (5.55)$$

où $u_0 = Ae^{ikr_1}/r_1$ est la solution sans écrans (r_1 est la distance à la source). Dans l'approximation de Kirchhoff, nous obtenons

$$u(\mathbf{y}) = \int_F \left(u_0 \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5.56)$$

Si $u = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_0}{\partial n}$ sur les écrans et les fentes, nous devons retrouver la solution u_0 [d'après (5.54)]. Donc (5.56) est équivalent à

$$u(\mathbf{y}) = u_0(\mathbf{y}) - \int_E \left(u_0 \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (5.57)$$

Cette approximation est utile si les ouvertures F sont relativement grandes par rapport à la longueur de l'onde λ .

De la théorie des équations différentielles partielles, on sait qu'il n'est en général pas possible de résoudre l'équation (5.53) en donnant les deux conditions, u et $\frac{\partial u}{\partial n}$, aux bords: la solution $u(\mathbf{x})$ trouvée avec (5.56) et (5.57) ne satisfait en général plus les conditions (5.55). La contradiction mathématique de donner les deux, u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ aux bords peut être éliminée si on choisit la bonne fonction de Green qui satisfait les bonnes conditions aux bords.

$$\text{Dirichlet: } G_D = 0 \quad \text{sur les écrans et les ouvertures,} \quad (5.58)$$

$$\text{Neumann: } \frac{\partial G_N}{\partial n} = 0 \quad \text{sur les écrans et les ouvertures.} \quad (5.59)$$

De plus, on demande que G décroisse à l'infini, comme l'onde émise:

$$r \left(\frac{\partial G}{\partial n} - ikG \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad G \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Avec (5.58) et (5.59), on obtient

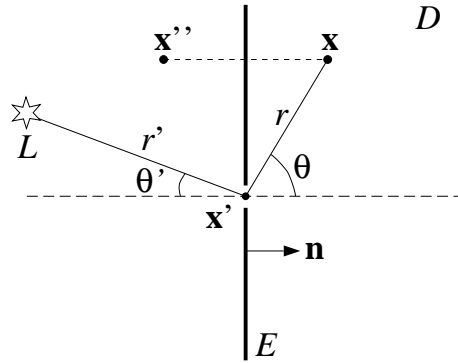
$$u(\mathbf{x}) = \int_{E \cup F} u(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\sigma(\mathbf{x}') \quad (5.60)$$

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{E \cup F} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}') G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\sigma(\mathbf{x}'). \quad (5.61)$$

Cette approximation est mathématiquement non contradictoire. Pour un *écran plat*, les fonctions de Green G_N et G_D sont faciles à déterminer. On a

$$G_{D,N}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \mp \frac{e^{ikr''}}{r''} \right) \quad (5.62)$$

Le signe $-$ correspond à G_D et le signe $+$ correspond à G_N , et $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ et $r'' = |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|$. Ici \mathbf{x}'' est la position *miroir* de \mathbf{x} par rapport à l'écran (voir figure)



Pour $\mathbf{x}' \in E \cup F$, nous avons $r = r''$ et

$$\frac{\partial G_D}{\partial n} = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r}$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Dans l'approximation de Kirchhoff nous obtenons alors

$$u(\mathbf{x}) = \frac{k}{2\pi i} \int_F \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{r} u_0(\mathbf{x}') d\sigma. \quad (5.63)$$

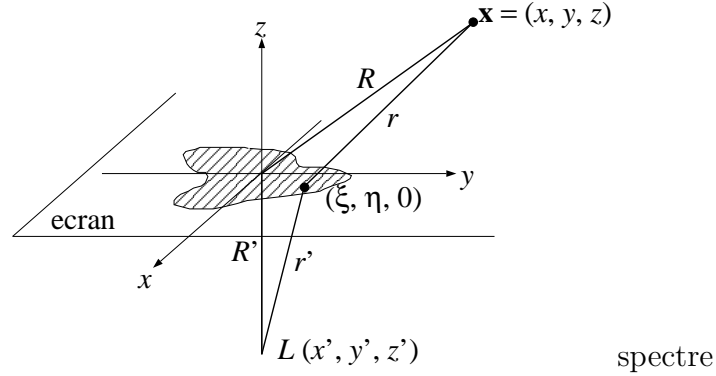
En négligeant le terme $1/r^2$, cela donne pour $u_0 = Ae^{ikr'}/r'$ (r' est la distance entre \mathbf{x}' et la source)

$$u(\mathbf{x}) = \frac{kA}{2\pi i} \int_F \frac{e^{ikr}}{r} \frac{e^{ikr'}}{r'} \cos \theta d\sigma. \quad (5.64)$$

De la formule approximative de Neumann, on obtient le même résultat avec $\cos \theta$ remplacé par $\cos \theta'$ et de la formule originale (5.56) on obtient (5.64) avec $\cos \theta$ remplacé par $\frac{1}{2}(\cos \theta + \cos \theta')$. Par la suite, nous remplaçons $\cos \theta$ par une valeur moyenne $\cos \vartheta$ et $1/r r'$ par une valeur moyenne $1/RR'$:

$$u(\mathbf{x}) = A \frac{k}{2\pi i} \frac{\cos \vartheta}{RR'} \int_F e^{ik(r+r')} d\sigma$$

Nous posons la fente dans un système de coordonnées dans le plan (x, y) avec O dans l'ouverture



$$\begin{aligned} r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 \\ r'^2 &= (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + z'^2 \\ R^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \quad R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ r &= R - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} + \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3} + \dots \\ r' &= R' - \frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R'} + \frac{(x'\xi + y'\eta)^2}{2R'^3} + \dots \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$u(\mathbf{x}) = A \frac{k}{2\pi i} \cos \vartheta \frac{e^{ik(R+R')}}{RR'} \int_F e^{ik\phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (5.65)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) &= - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} + \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3} + \dots \\ &\quad - \frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R'} + \frac{(x'\xi + y'\eta)^2}{2R'^2} + \dots \end{aligned}$$

Diffraction de Fraunhofer

Nous supposons maintenant que R et R' sont beaucoup plus grands que la dimension d de l'ouverture, de sorte que nous pouvons négliger les termes d'ordre d/R et d/R' . Avec les cosinus directeurs,

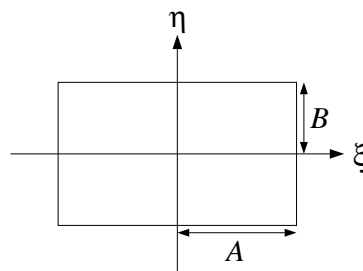
$$\alpha = \frac{x}{R}, \quad \beta = \frac{y}{R}; \quad \alpha' = \frac{x'}{R'}, \quad \beta' = \frac{y'}{R'},$$

et en définissant

$$a = \alpha + \alpha', \quad b = \beta + \beta',$$

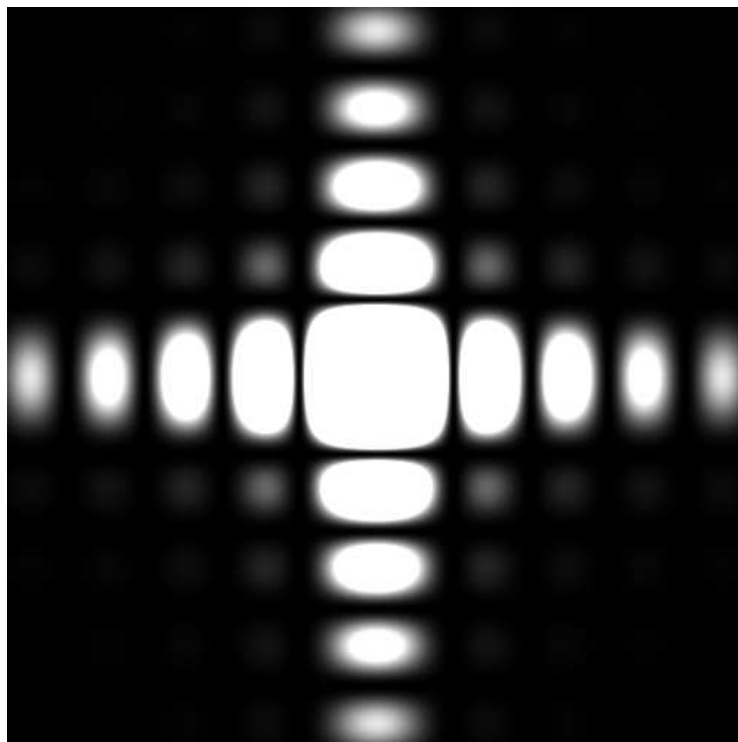
nous obtenons

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\text{const.}}{\lambda} \int_F \exp(-ik(a\xi + b\eta)) d\xi d\eta.$$



Pour une ouverture de forme rectangulaire, cette intégrale donne une intensité

$$I(\mathbf{x}) = |u(\mathbf{x})|^2 = \frac{\text{const}}{\lambda^2} (4AB)^2 \left(\frac{\sin kaA}{kaA} \right)^2 \left(\frac{\sin kbB}{kbB} \right)^2.$$



Pour qu'une source à la position (α', β') puisse être distinguée d'une source à la position (α'', β'') , il faut que les premiers zéros dans l'intensité de l'image à travers "l'ouverture" de taille AB soient bien distinctes. C'est-à-dire

$$\alpha' - \alpha'' \geq \frac{\pi}{kA} = \frac{\lambda}{2A}$$
$$\beta' - \beta'' \geq \frac{\pi}{kB} = \frac{\lambda}{2B}.$$

Cette *limite de diffraction* est importante en astronomie. Un télescope de diamètre D qui observe de la lumière de longueur d'onde λ ne peut distinguer deux astres que si leur séparation angulaire δ est suffisamment importante:

$$\delta > \frac{\lambda}{D}.$$

Exercice: Quelle est la limite de diffraction d'un télescope optique avec un miroir de 4 m (prendre de la lumière rouge)?

Réponse: 0.036 second d'arc.

FIN